ABC, 23 de Septiembre de 2019
CIENCIA - El ABCdario de las matemáticas
Maria Pilar Sabariego Arenas

Una explicación a la suma infinita que hace que de la nada salga uno

Os voy a demostrar que Dios existe:

Todo el mundo estará de acuerdo en que $0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots$ ¡hasta el infinito y más allá!, como diría mi queridísimo Buzz Lightyear ¿verdad?

Y también estaréis de acuerdo en que la expresión anterior es igual a la siguiente:

$$0 = 0 + 0 + 0 + 0 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots$$

Si ahora cambio los paréntesis, incluso me diríais qué propiedad estoy utilizando:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots$$

¡Eso es! La propiedad asociativa.

Pero si ahora calculamos esa suma infinita …

$$0 = 0 + 0 + \cdots = (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + 0 + \cdots = 1$$

¡Obtenemos 1! ¡Teníamos 0 y obtenemos 1! ¡De la nada ha nacido algo! ¡Dios existe!

¡Y os digo más! Si ordenamos los números de otro modo, podemos obtener que 0 es igual a cualquier número, al que queramos, basta con agrupar tantos 1 como queramos y después poner los infinitos paréntesis cuyo valor es 0.

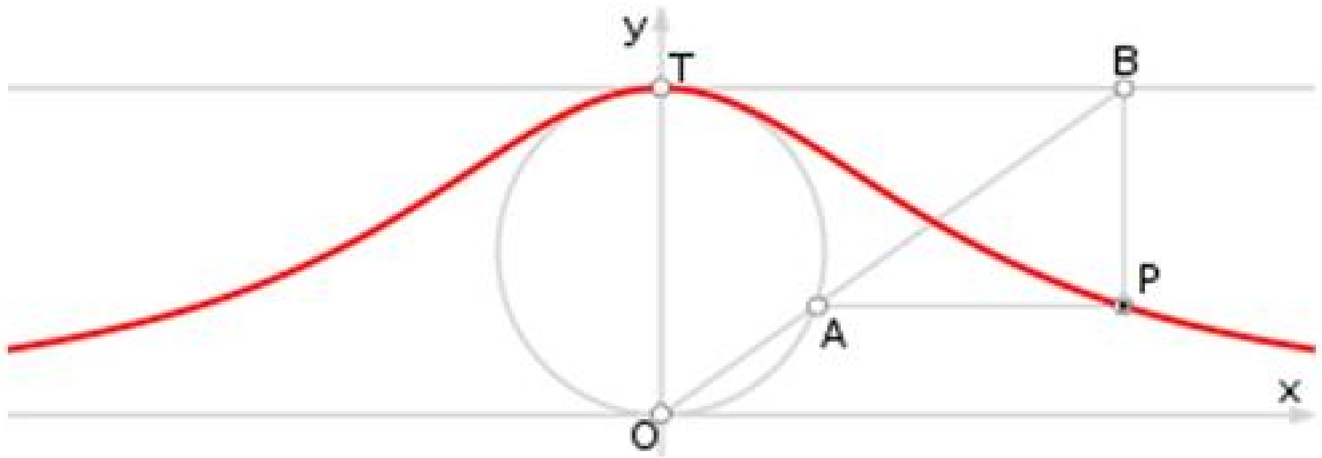
¿Qué os parece? ¡Sorprendente, cuando menos! ¿no? (Recordad esta entrada del ABCdario).

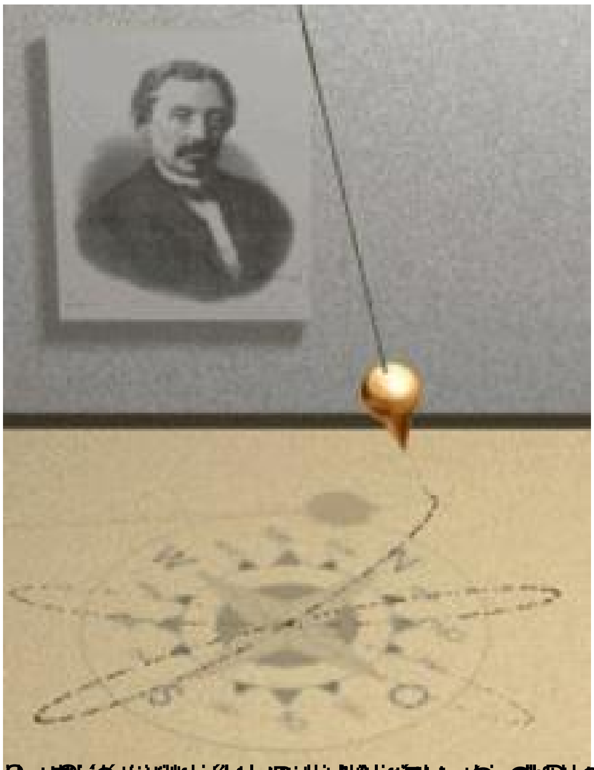
Pues esta es la forma de la que se valió **Guido Grandi**, también conocido como **Guido Ubaldus**, para **demostrar la existencia de Dios** en 1703.

Luigi Francesco Ludovico, que ese era su nombre completo, fue un monje, filósofo, teólogo, ingeniero y matemático italiano que vivió entre los siglos XVII y XVIII. Nació en 1671 en Cremona y estudió en el colegio jesuita de dicha ciudad. Al terminar sus estudios, decidió tomar los hábitos y comenzó su noviciado en el monasterio de Camáldula en Ferrara, al norte de Italia, recibiendo entonces el nombre de Guido.

En 1693 fue trasladado al monasterio de San Gregorio Magno en Roma para completar sus estudios de filosofía y teología, y un año después comenzó a dar clase de dichas disciplinas en el monasterio de Santa María de los Ángeles en Florencia. En 1700 fue nombrado profesor de filosofía en el monasterio de San Gregorio y más tarde ocupó un puesto similar en Pisa.

Durante ese tiempo, despertó el interés de Guido por las matemáticas y en 1701 publica un estudio sobre la loxodrómica cónica (movimiento con dirección constante sobre un cono), seguido, en 1703, de un estudio sobre la que posteriormente será conocida como la **«bruja de Agnesi»**, siendo el primero que la nombró con el término italiano **«versiera»** (representada en la imagen, abajo). Los estudios que Guido realizó sobre esta curva ayudaron en gran medida a que las ideas sobre el cálculo de Leibniz se introdujeran en Italia.





¿Dónde está el error?

Pero volvamos a la serie de Grandi con la que comenzamos. ¿Habéis averiguado ya dónde está el error? Porque es evidente que algo está mal. De hecho, Guido Grandi publicó el primer resultado en 1703 en su libro «Quadratura Circula et hyperbolae per infinitas hyperbolas geometrice exhíbita», realizando un razonamiento geométrico relacionado con su estudio de la «bruja de Agnesi», y en 1710, en la segunda edición del mismo libro y en el libro «De Infinitis infinitorum, et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica», demostró que la suma de dicha serie podría ser 0 y 1/2. Algo había en sus razonamientos que no le daban la seguridad de estar haciéndolo bien. Veamos cómo lo argumentó la segunda vez:

Dos hermanos heredan una joya de un valor incalculable de su padre, pero tienen prohibido venderla, así que acuerdan intercambiársela cada año: Uno la tendrá en su museo un año y el otro la tendrá en el suyo el siguiente. De este modo, si el trato perdura entre los descendientes de los dos hermanos, cada familia tendrá la mitad de la posesión de la joya durante toda la eternidad, cambiando de manos infinitamente.

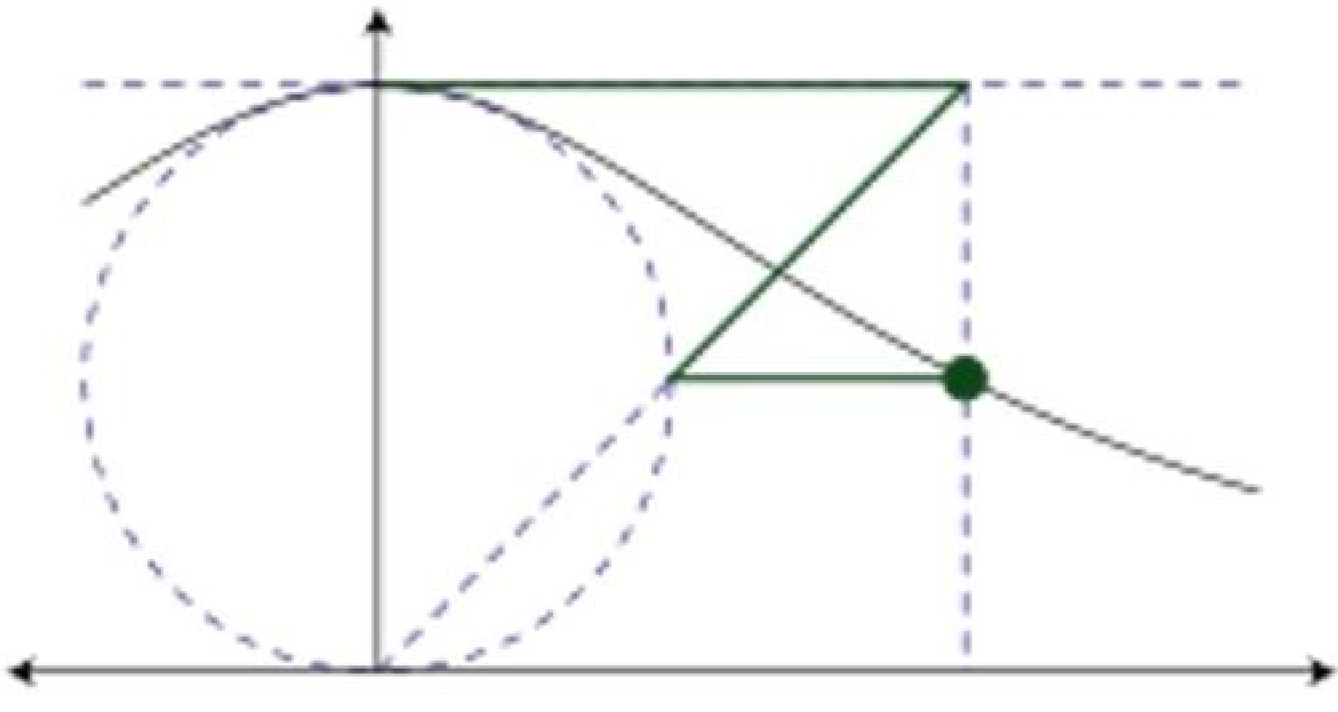
Como era de esperar el corolario de esta argumentación volvía a ser el mismo: ¡Dios existe!

Pero en esta ocasión, apareció un crítico: **Alessandro Marchetti**, un colega y compatriota, que veía absurdo añadir una cantidad infinita de ceros a una suma finita y, además, alertaba del peligro que planteaba añadir un razonamiento teológico a los cálculos matemáticos. Los dos matemáticos se enzarzaron en una discusión por correspondencia, como era costumbre en la época, que no acabó hasta la muerte de Alessandro en 1714.

No obstante, los argumentos de Alessandro no cayeron en saco roto, pues consiguió atraer la atención de Leibniz, quien anteriormente había calificado el trabajo de Guido como "intento" poco original y menos avanzado de su cálculo. Leibniz publicó una primera respuesta en Acta Eruditorum en la que atacaba la serie de Grandi desde varios puntos de vista.

Interpretaciones geométricas

En general, Leibniz creía que los razonamientos debían basarse en interpretaciones geométricas y no en algoritmos de cálculo, a los que consideraba "razonamientos ciegos". Por este motivo, estaba de acuerdo con Guido en que la serie sumaba 1/2, pues la demostración geométrica, basada en la "bruja de Agnesi", estaba bien fundamentada, según él.



Sin embargo, Leibniz criticó duramente el argumento de la joya compartida por los hermanos, afirmando que la serie no tiene relación con la historia, puesto que, para cualquier número par finito de años, los hermanos tienen la misma posesión, y sin embargo la suma de los términos de la serie es cero.

A pesar de los argumentos dados y del trabajo previo que ya en 1674 había realizado Leibniz sobre la serie que nos ocupa:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}=1-\frac{1}{1+1}=1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)=1-1+\frac{1}{1+1}\\=1-1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)=1-1+1-\frac{1}{1+1}=1-1+1-\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}\right)\\=1-1+1-1+\frac{1}{1+1}\end{aligned}$$

y así sucesivamente, realizando sustituciones de forma repetida. En 1712, Leibniz pensaba que podría encontrarse la suma de la serie directamente. Observó que. al tomar un número par de términos de la serie, el último término es – 1, y la suma es 0:

1 – 1 = 1 – 1 + 1 – 1 = 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 = 0

Y que, con un número impar de términos, el último término es + 1 y la suma es 1:

1 = 1 – 1 + 1 = 1 – 1 + 1 – 1 + 1

Leibniz pensó que si tomáramos la serie infinita, que no tiene un número par ni impar de términos, no obtendríamos ni 0 ni 1. Es decir que, al llevar la serie al infinito, se convertiría en algo entre esas dos opciones, sin que hubiese motivos a favor de un valor o de otro. Que por la teoría de la “probabilidad” y la “ley de la justicia”, se debería tomar la media aritmética de 0 y 1, es decir (0+1)/2 = 1/2.

Un razonamiento de este tipo no parece propio de Leibniz, pero él mismo admitió que era más metafísico que matemático y que en las matemáticas hay más verdades metafísicas de las que se reconocen. Seguramente, no habría tenido tanta confianza en su argumentación, si no hubiera obtenido el mismo resultado que con los otros enfoques.

Christian von Wolff, un matemático de la época, al leer la respuesta de Leibniz, quiso extender el método de las sustituciones infinitas para calcular la suma de la serie 1 – 2 + 4 – 8 + 16 – 32 + ···, usando la expresión,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots,$$

muy popular entre los matemáticos en aquel momento, pero Leibniz le hizo cambiar de intención contestándole que, aunque la idea era interesante, no era válida porque los términos de la serie deberían disminuir acercándose a cero. Es ese momento, de manera implícita, Leibniz estaba aplicando la prueba moderna de la convergencia de una serie alternada.

Posteriormente fueron muchos los matemáticos que se interesaron por la serie de Grandi: **Jac ob Bernoulli, Varignon, Euler, Daniel Bernoulli, De Morgan,**
… obteniendo distintos resultados, pero ninguno definitivo.

Veamos, pues, cuál es la prueba moderna que intuyó Leibniz.

Es fácil entender que una serie alternante o alternada es una serie cuyos términos son alternadamente positivos y negativos.

Un ejemplo distinto al de la serie del Guido puede ser:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots=\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

Siguiendo con este ejemplo, el término n-ésimo de esta serie es de la forma donde es un número positivo. De hecho,

$$a_n = (-1)^{n-1} b_n$$

donde b_n es un número positivo. De hecho, $b_n = |a_n|$.

Para comprobar si una serie alternada es convergente, solo hay que ver si sus términos, en valor absoluto, decrecen hacia cero. Con terminología matemática:

Si la serie alternada

$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \cdots$ con $b_n > 0$ cumple que:

1. $b_{n+1} \leq b_n$ para todo n (b_n es decreciente)
2. $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (los términos tienden a 0)

Entonces la serie es convergente.

Así pues, ¿qué es lo que ocurre con la serie de Grandi? Es evidente que se trata de una serie alternada, pero también está igual de claro que no cumple ninguna de las dos condiciones que implican la convergencia puesto que sus términos no decrecen ni tienen por límite cero, son todos iguales a 1 en valor absoluto (). Por tanto, se trata de **una serie alternada no convergente** . Es decir, **la suma de la serie no es un número real.**

La suma de una serie infinita se define a partir del límite de sus sumas parciales. La secuencia de sumas parciales de la serie de Guido es: 1, 0, 1, 0, … y no tiende a ningún número ya que tiene dos subsucesiones convergentes, una a 1 y la otra a 0. Por lo tanto, la serie de Guido no es convergente, sino oscilante.

Por otro lado, si volvemos al razonamiento que realizamos al principio y repasamos las operaciones que realizamos, hay una que nos debe llamar la atención: la del cambio de paréntesis. Y es que, en una serie, no se pueden realizar operaciones aparentemente "inofensivas" (como reordenar sus términos o introducir paréntesis) a no ser que la serie sea absolutamente convergente, es decir que la serie de los valores absolutos de sus términos sea convergente. Si esta condición no se cumple, estas operaciones pueden modificar la suma como ocurre en la serie de Guido, con la que podemos obtener cualquier número entero.

En el s. XIX, Ernesto Cesàro desarrolló un método alternativo para asignarle una suma a una serie infinita, con la ventaja de que, si la serie es sumable en el sentido habitual, la serie es sumable Cesàro y el valor de ambas sumas es el mismo. Sin embargo, una serie divergente en el sentido habitual puede tener suma Cesàro.

Una sucesión $\{a_n\}$ es sumable Cesàro, con suma a, si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = a,$$

siendo $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$, la suma de los primeros k términos de la serie.

En el caso de la serie de Grandi: $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$, los términos de la secuencia

$$\frac{s_1 + \cdots + s_n}{n}$$

son $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}. \frac{4}{7}, \frac{4}{8}, \ldots$

así que su suma de Cesàro es 1/2, ya que $\lim_{n\to\infty} \frac{s_1 + \cdots + s_n}{n} = 1/2$.

Por tanto, la serie de Grandi es una serie no convergente en el sentido usual y sumable Cesàro con suma 1/2.

En cuanto a la existencia de Dios, como nos recomendó Alessandro Marchetti, dejaremos que sean los razonamientos teológicos la que la traten.

Maria Pilar Sabariego Arenas es profesora de Matemáticas en el IES Santa Cruz de Castañeda y profesora asociada en la Universidad de Cantabria.

El ABCDARIO DE LAS MATEMÁTICAS es una sección que surge de la colaboración con la Comisión de Divulgación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)