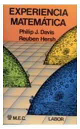

Categoría: **Sobre las matemáticas**

Autor:
Philip J. Davis y Reuben Hersh

Editorial:
Labor/MEC

Año de publicación:
1988

Nº de hojas:
314

ISBN:
84-335-5138-8

Con esta reseña termina una serie, que empezó hace ocho años -cuando Emilio y yo nos hicimos cargo de la edición de la revista SUMA-, dedicada a glosar algunos libros que hemos creído de un valor o significado especial, o que deberían tenerla, para los profesores de matemáticas. Seguro que todos los que hayáis seguido la serie, habréis coincidido alguna vez con nuestra opinión, aunque en otras ocasiones vuestro «clásico» hubiera sido otro, pero me atrevo a decir que el libro que hemos elegido para esta ocasión contará con un casi unánime consenso como uno de los clásicos recientes cuya lectura resulta imprescindible.

La edición española fue uno de los frutos de una corta etapa de colaboración entre el Ministerio de Educación y Ciencia y el sector privado que nos trajo la traducción, además, de algunos otros títulos importantes como *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, de Lauren B. Resnick y Wendy W. Ford (Paidós/MEC), *El lenguaje matemático en el aula*, de D. Pimm (Morata/MEC), *Didáctica de las matemáticas*, de A. Orton (Morata/MEC), *El aprendizaje de las matemáticas*, de Linda Dickson, Margaret Brown y Olwen Gibson (Labor/MEC) o *Pensar matemáticamente*, de John Mason, Leone Burton y Kaye Stacey (Labor/MEC).. Sin duda, corrían otros vientos...

Después de los años de estudio académico, acabé por rechazar el estilo bourbakista con el que se nos presentaron las matemáticas; sentía la necesidad de saber dónde partía y a dónde conducía cada trayecto matemático, cómo se había llegado a elaborar ese aparato tan sofisticado y para resolver qué problemas. Llegué a experimentar que el verdadero aprendizaje lo conseguía cuando era yo mismo el que me enfrentaba a los pro-blemas y descubría las soluciones y que, a partir de entonces, el estudio de los aspectos teóricos se volvía más provechoso. Tras finalizar los estudios, la práctica de la enseñanza me condujo a la conclusión de que la mera exposición clara de los hechos matemáticos por desgracia no tenía como consecuencia el aprendizaje de los contenidos por los alumnos. Así, finalmente, se me hizo imprescindible revisar mis puntos de vista sobre lo que eran las matemáticas, la construcción del conocimiento matemático y la forma en que éstas se enseñaban.

Por ello me impresionaron las palabras de Gian-Carlo Rota en la introducción cuando afirma que:

Con frecuencia oímos que la matemática consiste fundamentalmente en la «demostración de teoremas». ¿Consiste acaso la labor del escritor en «escribir frases»? El trabajo del matemático es, en su mayor parte, un embrollo de conjeturas, analogías, ilusiones y frustraciones, y la demostración, en lugar de ser el núcleo del descubrimiento, es las más de las veces una forma de asegurarnos de que nuestra mente no nos está gastando malas pasadas. Pocas personas, si alguna, se habían atrevido a escribir tales cosas antes de Davis y Hersh. (p. 16)

Y empecé a leer, y leí devorando las páginas porque, sin duda, la lectura del libro de Davis y Hersh me ayudó a encontrar muchas de las respuestas que andaba buscando.

Coincidencias

Los autores declaran las intenciones con las que acometieron la redacción de su libro bien pronto:

Este libro no tiene el propósito de presentar una exposición sistemática y autónoma de un corpus específico de material matemático, ni reciente ni clásico. Su ambición es, mas bien, la de capturar la inagotable variedad que ofrece la experiencia matemática. Las líneas maestras de nuestra exposición consistirán en mostrar la sustancia de las matemáticas, su historia, su filosofía y el modo en que se obtiene el conocimiento matemático. (p. 11)

!Nada menos¡ Se trata de un programa ambicioso, un programa en el que la coincidencias con mis preocupaciones e intereses era plena.

El origen de *Experiencia matemática* hay que buscarlo en el encargo que recibieron los autores de impartir un semestre sobre fundamentos de las matemáticas. Había que comenzar planteando las cuestiones básicas y tratar de aclararlas antes de acabar el curso:

¿Qué es un número? ¿Qué es un conjunto? ¿Qué es una demostración? ¿Qué conocemos en matemáticas, y cómo lo conocemos? ¿Qué es el «rigor matemático»? ¿Qué es la «intuición matemática»?

Al ir formulando estas preguntas me daba cuenta de que no conocía las respuestas. Ello no era sorprendente, desde luego, pues en cuestiones tan vagas, «filosóficas», no es de esperar que las matemáticas sean nítidas y tajantes, como las que buscamos en matemáticas. Siempre *existirían diferencias de opinión acerca de cuestiones de esa naturaleza.*

Lo que me inquietaba e incomodaba era que yo no sabía cuál era mi propia opinión acerca de ellas, Peor todavía, no tenía base alguna, carecía de criterio para evaluar diferentes opiniones, para abogar en favor de un punto de vista o para atacar otro.

Comencé a hablar con otros matemáticos acerca de la demostración, el conocimiento y la realidad en matemáticas, y descubrí que mi situación de confusa incertidumbre era típica. Descubrí igualmente una notable sed de conversación y análisis de nuestras experiencias y convicciones personales. (p. 21)

Preguntas similares a las que se hacen Davis y Hersh en las líneas anteriores rondaban por mi cabeza cuando terminaba los estudios, después de haber aprendido a dominar muchas técnicas y de conocer gran cantidad de resultados matemáticos. Esa sensación molesta de estar trabajando sobre la nada o al menos sobre algo cuya naturaleza desconocía, también la experimenté. Y, por supuesto, di palos de ciego tratando de elaborar mis propias respuestas, aunque casi siempre con escasa capacidad para valorar tanto mis opiniones como las opiniones que leía en diversas fuentes o las que obtenía cuando hablábamos de estos temas.

No es extraño, por tanto, que sintiese que el libro estaba reclamando que lo leyera, ya que su contenido se dirigía directamente al fondo de mis preocupaciones y que era muy probable que en él iba a encontrar una descripción convincente de las matemáticas, de su objeto, de cómo se construyen y qué da validez a sus resultados.

El contenido

Vamos a repasar de forma breve el contenido de los ocho capítulos del libro.

El primer capítulo comienzo abordando la pregunta ¿qué son las matemáticas?: históricamente comienzan concibiéndose como la ciencia de la cantidad y el espacio, pero con el tiempo, el énfasis que se le va dando a los aspectos deductivos van conduciendo a una concepción en la que lo importante no es sobre qué objetos trata la matemática sino más bien el hecho de que su estudio se ajuste al esquema hipotético-deductivo. Pero ni siquiera esta definición es definitiva sino que distintos pensadores irán formulando sus propias definiciones y a lo largo del libro serán analizadas algunas de ellas.

Luego sigue el análisis de otras preguntas: ¿Dónde se puede encontrar el conocimiento en matemáticas? ¿Qué es la comunidad matemática y quiénes y cuántos son los miembros que la constituyen? ¿Cuáles son las herramientas de este oficio?

En la última parte del capítulo se preguntan por la extensión del conocimiento matemático para lo que usan un símil muy sugerente: un gran océano de textos (por ejemplo, una gran biblioteca universitaria podría contener más de 60.000 volúmenes de matemáticas) que no parece dejar de crecer, puesto que las fuentes de nuevos problemas no muestran señales de estar agotándose. Dado que el número de libros que puede haber estudiado un matemático hasta su especialización está entre 60 y 70, resulta ser ésta la profundidad media del océano de conocimientos que es la matemática, la máxima que suelen alcanzar la gran mayoría de los matemáticos. Tal amplitud de conocimientos con esa profundidad media presenta un horizonte de subespecialidades muy amplio que hoy se estima que supera las 3.000. Con este panorama, sólo dentro de una de esas subespecialidades puede decirse que un matemático está capacitado para juzgar sobre el valor de lo que es interesante y lo que no lo es. Tan sólo unos pocos matemáticos excepcionales tienen capacidad y conocimientos para juzgar sobre distintos subespecialidades. Siendo esto así, ¿es posible aún hablar de una única ciencia?

Por otra parte, en este punto encontramos una nueva justificación para reflexionar en la dirección de los temas propuestos en el libro: para juzgar lo que es matemáticamente valioso no es posible basarse en el conocimiento de lo que es importante dentro de las matemáticas (nadie tiene una visión de conjunto que permita pronunciarse sobre ello), sino que los juicios:

...se fundan en la noción que tengamos de la naturaleza y propósito de la propia matemática. ¿En qué consiste el conocer algo en matemática? ¿Qué clase de significado encierran los enunciados matemáticos? Vemos así como los inevitables problemas del diario ejercicio de las matemáticas conducen, inexorablemente, a cuestiones ontológicas y epistemológicas fundamentales, a pesar de que muchos profesionales hayan aprendido a dejar de lado tales cuestiones, teniéndolas por irrelevantes. (p. 34)

El segundo capítulo se centra en las diversas formas que adquiere la experiencia matemática. Esta, en primer lugar, se configura históricamente ya que en cada momento el estado de los conocimientos es el resultado de una compleja red de motivaciones e intereses personales y sociales, así como de las interpretaciones y posibilidades de las matemáticas disponibles.

Resulta francamente divertido el retrato que trazan del «matemático ideal», es decir paradigmático. Se trata de una persona que trabaja en un campo del que tan sólo unos pocas especialistas saben que existe y al que dedica todo su atención. No puede hablar de su tema con nadie cercano y tan sólo lo hace cuando se reúne en un congreso con el resto de sus colegas. Allí desearía llegar en alguna ocasión con la comunicación de un resultado crucial para la resolución del problema central de su especialidad: es su gran sueño. Le resulta muy difícil hacer comprender al resto del mundo la importancia de sus investigaciones, y no sólo eso, también tiene dificultades para convencer a los demás de que lo que el llama demostración no es algo subjetivo ya que afirma que una demostración es «un razonamiento que convence a quienes conocen bien la cuestión». Este retrato, en el que se sienten también reflejados, les lleva a poner los pies un poco más cerca de la tierra y afirmar que:

...nada de lo anterior demuestra que no estemos en lo cierto en nuestra convicción de que disponemos de un método fiable para el descubrimiento de verdades objetivas. Pero es preciso que nos detengamos un instante y caigamos en la cuenta de que, exceptuada nuestra capillita, a los demás les resulta incomprensible gran porte de lo que hacemos. No hay forma de que podamos convencer a un escéptico seguro de sí de que las cosas de que hablamos tienen sentido y, no digamos, «existencia». (p. 47

Pero no se reduce a la figura y los pensamientos del matemático ideal la totalidad de la experiencia matemática. Y así lo demuestran los autores cuando nos dan otros ejemplos como la visión de un físico para el que es posible encontrar demostraciones empíricas de hechos matemáticos, o personajes atípicos como Shafarevich que espera que la matemática pueda servir para revelar una meta religiosa suprema. También hay heterodoxos, convencidos de que la comunidad matemática no les comprende, pero que ellos han logrado demostrar alguno de los teoremas pendientes e incluso «insolubles» con el que nadie había podido hasta ahora. ¿Quién que no haya trabajado en una publicación no ha recibido alguna «sorprendente» demostración del teorema de Fermat, o de que "Pi" es un número racional?

Termina el capítulo con una discusión sobre dónde hay que situar el origen de la creación matemática. ¿Se trata del fruto de la genialidad individual o por el contrario son las condiciones sociales y económicas las que lo desencadenan? Aunque hay autores que se colocan radicalmente en uno u otro de los extremos la mayoría busca una postura de equilibrio entre ambos. No obstante está por hacer una historia de las matemáticas que refleje esta postura.

El capítulo siguiente se dedica a explorar diversos aspectos externos de las matemáticas. Se empieza con la sugerente pregunta: ¿Por qué funcionan las matemáticas? A la respuesta platónica de que el universo se expresa en lenguaje matemático se contrapone cada vez con mayor fuerza la postura convencionalista de que la creación matemática genera «modelos» cuya utilidad se mide por su capacidad de explicar y predecir el comportamiento de los fenómenos. Un modelo matemático es algo provisional; puede ser bueno o malo para explicar los fenómenos a los que se enfoca, simple o demasiado complejo, bonito o antiestético, útil o inútil pero no se le calificará nunca como verdadero o falso:

La verdad ha abdicado, en su trono reina ahora hoy la utilidad inmediata. (p. 62)

Después de analizar con un cierto detalle la naturaleza de los modelos matemáticos y su construcción, el resto del capítulo se dedica a una revisión de la gran variedad de usos de las matemáticas. En primer lugar se repasa su utilidad con respecto a las actividades científicas y tecnológicas, empezando en el propio campo matemático. Aunque no suele ser reconocido en las historias oficiales hay una serie de campos en los que las ideas matemáticas han jugado un papel interesante y a ellos dedican alguna atención en esta parte final del capítulo. Entre ellos se encuentran: el comercio y los negocios, la guerra, el misticismo numérico, la astrología y la religión.

El siguiente capítulo de *Experiencia matemática* está dedicado a analizar los aspectos internos que caracterizan la actividad matemática. Entre éstos está el
uso de símbolos
, con lo que se gana en precisión a la hora de representar las ideas matemáticas pero se pierde fidelidad y aplicabilidad a los problemas que les dieron origen;
la abstracción
que, tanto en su faceta de idealización de los objetos como en el de extracción de sus características comunes, son el inicio del pensamiento matemático;
la generalización
, que unifica en un mismo enunciado diversos hechos relacionados entre sí;
la formalización
, que en última instancia permite la manipulación y transformación de los símbolos tanto de forma mecánica como manual;
los objetos y estructuras matemáticas
, sobre los que se construye el discurso matemático y que plantean la cuestión de la naturaleza de su existencia; y

la demostración
, que proporciona la posibilidad de escrutinio y crítica de las afirmaciones y les confiere autoridad, revela una comprensión más profunda de los problemas y sugieren nuevos desarrollos y:

... es rito y celebración de la potencia de la razón pura. (p.l 18)

No terminan aquí los aspectos internos destacables. Los autores dedican su atención a revisar cuestiones como el papel del infinito, las nociones de recta y moneda justa.

La parte final del capítulo constituye uno de los apartados más sugerentes de todo el libro, ya que muestra, a través de atractivos ejemplos, el papel que tienen en la creación matemática cuestiones tales como la componente estética, la creación de orden a partir del caos, la diferencia entre la concepción dialéctica y la algorítmica de atacar un problema, la ambición por ampliar el grado de generalidad y abstracción en los resultados y finalmente el descubrimiento de relaciones entre objetos inicialmente muy distintos.

En ***el prefacio*** de la obra los autores afirman que el libro puede ser leído como una serie de ensayos independientes. De hecho, parte del material proviene de artículos publicados con anterioridad por los autores en otras publicaciones. Sin embargo, no hay duda de que existe un hilo conductor que le da una gran unidad. Así, en el quinto capítulo se exponen seis temas matemáticos que pretenden mostrar el corazón de la experiencia matemática, las propias matemáticas. Son:

-- La teoría de grupos simples finitos, campo muy fructífero que se caracteriza por lo largo y prolijo de sus demostraciones.

-- El problema de los números primos gemelos, que muestra la importancia del cálculo para construir juicios teóricos.

-- La geometría no euclídea, una de las mayores rupturas de la historia de las matemáticas.

-- La teoría de conjuntos no cantoriana, cuyas ideas han sido a la vez que fructíferas muy influyentes.

-- El análisis no estándar, en el que se pone de manifiesto la sorprendente aplicación de la lógica matemática al análisis.

-- El análisis de Fourier, fundamental en gran parte de la matemática pura y aplicada actual.

Empecé la lectura del ***sexto capítulo*** -cuyo título *Enseñar y aprender* - con la esperanza de que el material que hallaría estaría al nivel de lo que llevaba leído, pero además con el aliciente de que reflexionaba sobre los aspectos que para mí, como profesor de matemáticas, podían resultar más decisivos. El discurso de los autores se orienta fundamentalmente a la enseñanza de las matemáticas superiores, pero creo que es posible hacer una traslación a la enseñanza elemental de las matemáticas. Lo primero que me sorprendió es que, desde su perspectiva de profesores universitarios, se reclamaba una visión didáctica muy distinto a la que estamos acostumbrados a escuchar en nuestro entorno. Así, podemos leer el siguiente texto que es francamente revelador de su actitud:

Es frecuente, sobre todo en las clases más elementales, que algún alumno sincero y confuso interrumpa la demostración, exclamando: «No veo por qué ha hecho lo que acabo de hacer. Y, además, no comprendo cómo se le pudo ocurrir hacer lo que ha hecho». Todos los profesores de matemáticos han tenido experiencias como ésta. El profesor se encara entonces con lo que *podríamos denominar «una crisis de comprensión». ¿Qué tratamiento acostumbra a dársele? No muy bueno, desgraciadamente. Es posible que el profesor vuelva a presentar el punto oscuro de forma ligeramente distinta; es posible también que en su ansia por exponer una determinada cantidad de material deje de lado la objeción del estudiante, diciéndole que sin duda llegaría a comprenderla si se tomara la molestia de repasar la cuestión tranquilamente en casa. (p. 203)*

La lectura de las páginas siguientes muestra mediante un ejemplo cómo encarar una de estas crisis de comprensión. En ellas se reflexiona sobre las causas por las que les resulta difícil a los aprendices seguir las explicaciones de los textos de matemáticas y cómo el tono de los libros y de las explicaciones del aula tiene un aire dogmático o autoritario. Por último se analizan las causa de la resistencia y el rechazo de los alumnos ante las matemáticas a partir de ciertos niveles: ausencia de esfuerzo, carencia de experiencia y técnicas con las que enfrentarse a verdaderos problemas, falta de talento matemático, etc..

Una vez llegados a este punto en el libro se aborda la cuestión de la creatividad y de las formas en que ésta puede ser enseñada o acrecentada. Aquí los autores se fijan en algunos autores que a nosotros nos resultan muy familiares. Por ejemplo, destacan la obra de Pólya y de otros investigadores posteriores, que han desarrollado sus ideas acerca de las técnicas heurísticas. Concluyen su revisión de Pólya con una reflexión que después de estos años en los que se ha intentado poner en funcionamiento una didáctica de las matemáticas basada en la resolución de problemas resulta especialmente sugerente:

Todo esto es muy bello, pero uno se pregunta, ¿será ésta la luz que despunta como la mañana, «el relámpago que sacia el deseo»? ¿No será meramente la sabiduría de quien acierta el lunes la quiniela? ¿Funcionan en clase estas ideas? Resulta difícil extraer conclusiones claras al evaluar las tentativas de convertir el programa de Pólya en didáctica práctica. Al parecer, la enseñanza requiere algo más que una buena idea de un maestro. (p. 215)

Muy interesante es el ejemplo en el que muestran cómo va creciendo un resultado a partir de una «semilla» inicial, siguiendo los pasos del modelo de creación de nuevas matemáticas de Lakatos (Tanto *Cómo plantear y resolver problemas* de Pólya, como el libro de Lakatos, *Pruebas y refutaciones*, han sido objeto de análisis en esta misma sección de la revista SUMA). La experiencia profesional de los autores con este tipo de acercamiento refleja también algunas de nuestra apreciaciones cuando planteamos a los alumnos situaciones abierta: desconcierto inicial que en los mejores alumnos se convierte en usa sensación de libertad fruto del control que tienen sobre el material matemático sobre el que están trabajando.

La parte final del libro, que integra el contenido de ***los dos últimos capítulos*** es la más filosófica de todo el texto. En el primero de ellos se da un repaso a las corrientes principales de la filosofía de las matemáticas: *el platonismo*, para el que los objetos matemáticos son reales y las matemáticas se dedican a descubrirlos, *el formalismo*, en el que no hay objetos matemáticos y la matemática consiste en axiomas, definiciones y

teoremas y por último
el constructivismo
que considera que las únicas matemáticas válidas son las que pueden construirse mediante un proceso finito. Por otro lado, en el último capítulo se vuelven a examinar algunos ejemplos concretos de trabajo matemático tratando de extraer algunas lecciones filosóficas de ello: así se analizan el reforzamiento de la validez de una conjetura cuando puesta a prueba repetidas veces sale airosa, la existencia de «demostraciones probabilísticas» de la conjetura de Riemann, las demostraciones por ordenador del
teorema de los cuatro colores
, teoremas que como el de la clasificación de los grupos finitos simples que ocupan varios miles de páginas y por eso mismo escapan al análisis de los expertos matemáticos y otras.

Conclusión... y otra coincidencia

En resumen, *Experiencia matemática* proporciona el punto de vista de un profesional de las matemáticas que trata de explicarse, y explicar al público en general, cuáles son los materiales con los que éstas están construidas, de qué modo son creadas, qué criterios tenemos para reconocer el valor de sus resultados y también qué se siente al hacer matemáticas. Y lo hace de una forma excepcional.

Poco tiempo después los mismos autores publicaron *El sueño de Descartes* (Labor/MEC, Barcelona, 1989) que en cierto modo es una continuación del anterior trabajo pero desde otra perspectiva. Aquí se ocupan del impacto de las matemáticas al ser aplicadas al mundo exterior a ellas, es decir del mundo de las aplicaciones: cuándo éstas son beneficiosas, peligrosas o irrelevantes; de qué modo limitan nuestras vidas o transforman nuestra visión de la realidad. La lectura de este segundo libro complementa de forma excelente la del primero.

Al releer *Experiencia matemática*, sorprendentemente he encontrado una nueva coincidencia cuyo significado alcanza para mi todo su sentido después de estos últimos ocho años. En el libro, los autores emplean el «yo» como recurso estilística a pesar de su autoría conjunta.

De todos modos, la confusión de identidad no puede causar gran daño, pues, en términos generales, cada uno de los autores está de acuerdo con las opiniones de su colega.

Tan sólo puedo decir que puedo hacer mía esta afirmación y emplearla para resumir lo que ha sido el trabajo conjunto en la dirección de SUMA junto a Emilio. No se me ocurre una manera más clara de decirlo y tampoco una forma más conveniente de terminar este texto y esta etapa.

(Reseña aparecida en la revista SUMA nº 43 -Jun 2003)

Materias: demostración, creación, modelos, modelización, símbolo, abstracción, generalización, formalización, creatividad, teoría grupos, primos gemelos, geometría no euclídea, conjunto

Autor de la reseña: Julio Sancho