1. Introducción

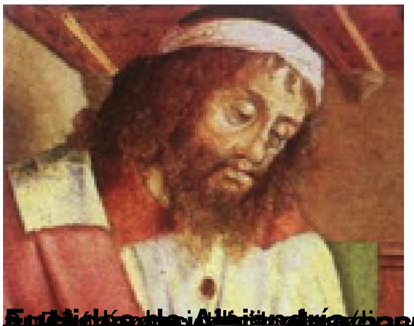
La palabra “álgebra” con la que se designa una parte de las Matemáticas, proviene del término *al-jabr* que aparece en el título de un texto del siglo IX, escrito por el matemático árabe al-Khowarizmi.

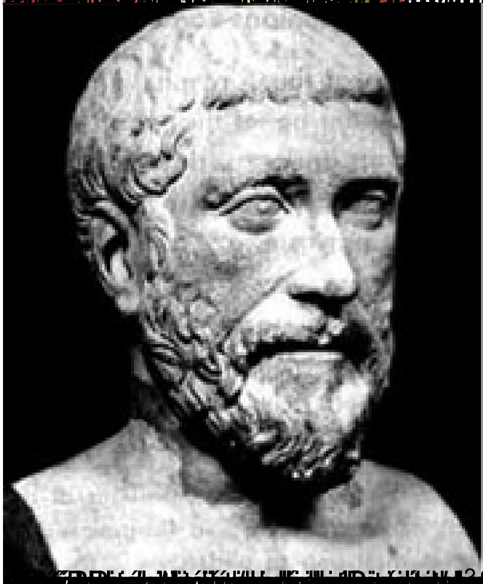
Los contenidos y métodos de esta disciplina no han permanecido invariables a lo largo de los tiempos, sino que han estado sometidos a cambios diversos. Así, en sus inicios, el álgebra era el arte de reducir y resolver ecuaciones. Actualmente, el álgebra moderna se centra en el estudio de estructuras (grupos, anillos, ...), pero su punto de arranque proviene de las investigaciones del genial Evariste Galois (1811-1832) sobre la resolución de ecuaciones por radicales.

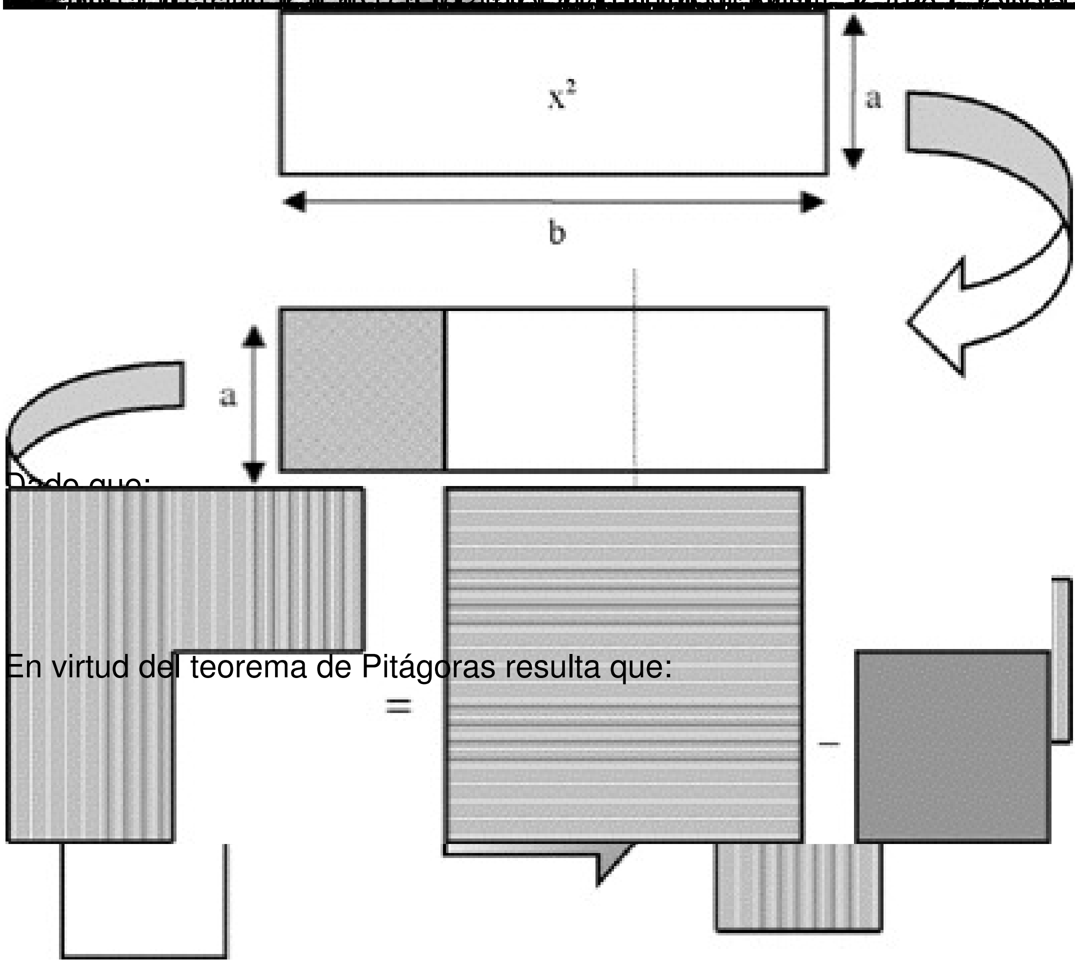
En la historia del álgebra se suelen distinguir tres periodos bien diferenciados:

(i) Periodo retórico, en el que todas las expresiones se escribían utilizando el lenguaje ordinario.
(ii) Periodo sincopado, en el que se empezaban a utilizar símbolos y abreviaturas para representar la incógnita, sus potencias y los signos de las operaciones elementales.
(iii) Periodo simbólico, en el que se usaban símbolos especiales tanto para la incógnita y sus potencias como para las operaciones y relaciones.

En la clasificación anterior no se incluye un tipo especial de álgebra que se sirve o se ayuda de diagramas para obtener resultados interesantes (expresiones notables, resolución de ecuaciones, ...). Esta *álgebra geométrica o álgebra diagramática* parece que se originó en la Escuela Pitagórica (allá por el siglo VI a. C.) y fue dada a conocer por Euclides de Alejandría (ca. 300 a. C.) en el libro II de sus famosos Elementos.

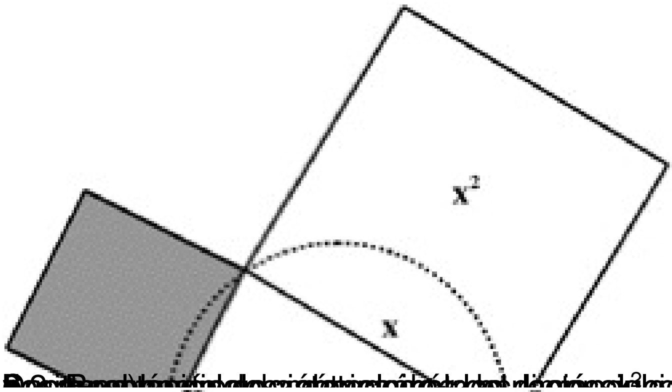




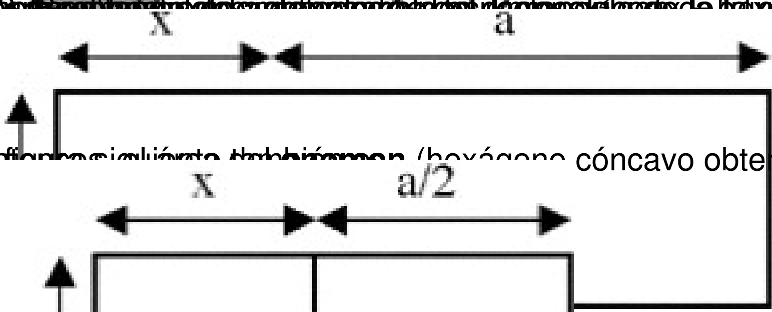


Dado que:

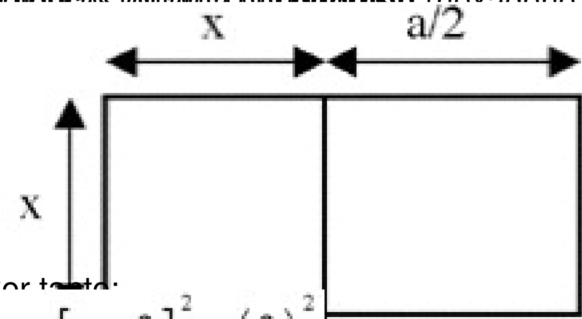
En virtud del teorema de Pitágoras resulta que:



[illegible] cuadrática $\mathbf{x^2 + ax = b}$ (siendo



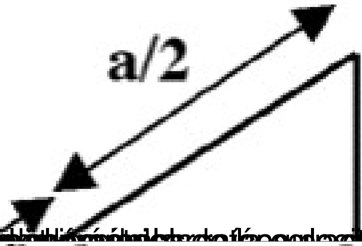
[illegible] cóncavo obtenido a partir del rectángulo anterior) de [illegible] **b**.



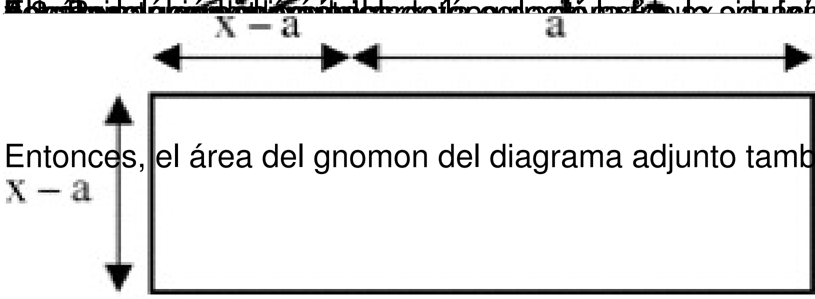
Por tanto:

$$b = \left[x + \frac{a}{2}\right]^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

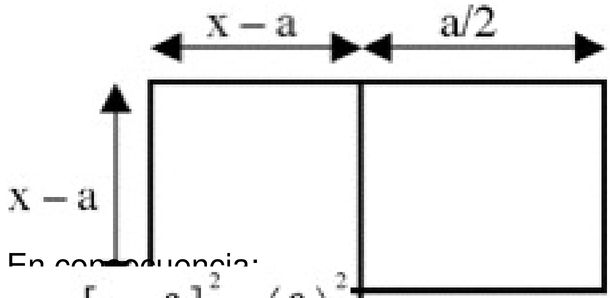
[illegible] la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son [illegible] resolución geométrica de la ecuación (véase la [illegible] **a/2**. El segmento resultante es **x**.



[illegible] cuadrática $\mathbf{x^2 = ax + b}$ consiste en



Entonces, el área del gnomon del diagrama adjunto también es **b**.

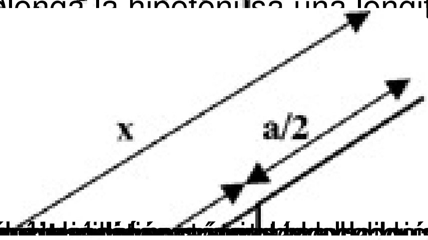


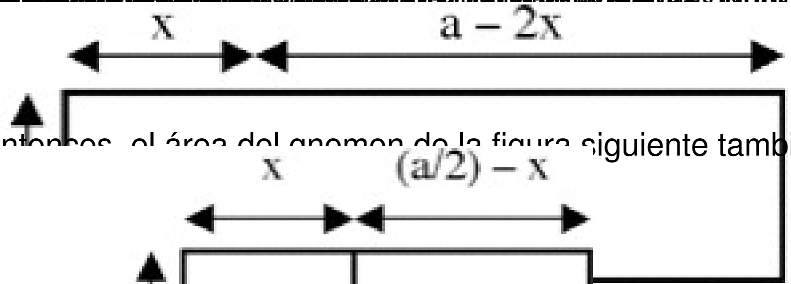
En consecuencia:

El segmento **x – (a/2)** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son **a/2** y $\sqrt{b}$.

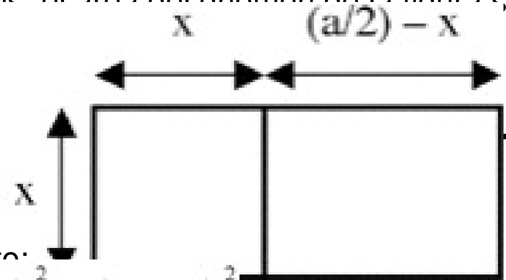
Esto es, el procedimiento geométrico para resolver la ecuación propuesta consta de las fases

... se prolonga la hipotenusa una longitud igual a **a/2**. El segmento obtenido es **x** (véase la figura





Entonces, el área del gnomon de la figura siguiente también es **b**.



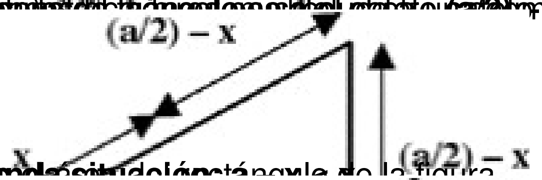
Por tanto:

El segmento **a/2** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son $\sqrt{b}$ y **(a/2) – x**.

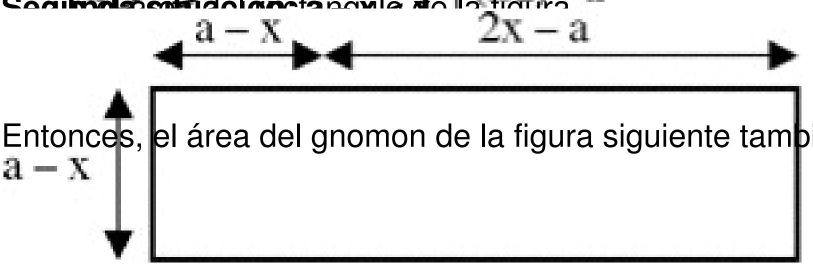
Esto sólo es posible si **a/2 >** $\sqrt{b}$

[si **a/2 =** $\sqrt{b}$ ...

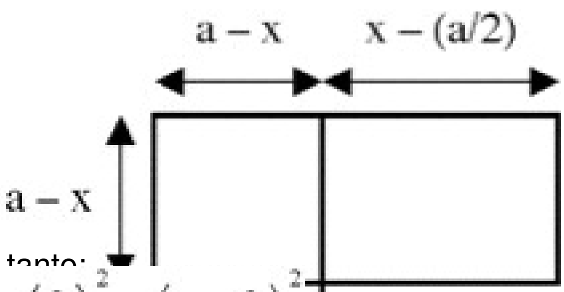
... **(a/2) – x** ... resultante es **x** (véase el esquema



Segunda situación: ... rectángulo de la figura



Entonces, el área del gnomon de la figura siguiente también es **b**.



Por tanto:

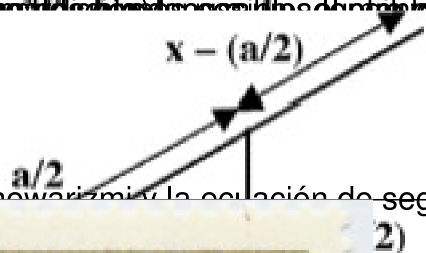
El segmento **a/2** es la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos son

Consecuentemente, la resolución geométrica de la ecuación cuadrática $x^2 + b = ax$ se reduce,

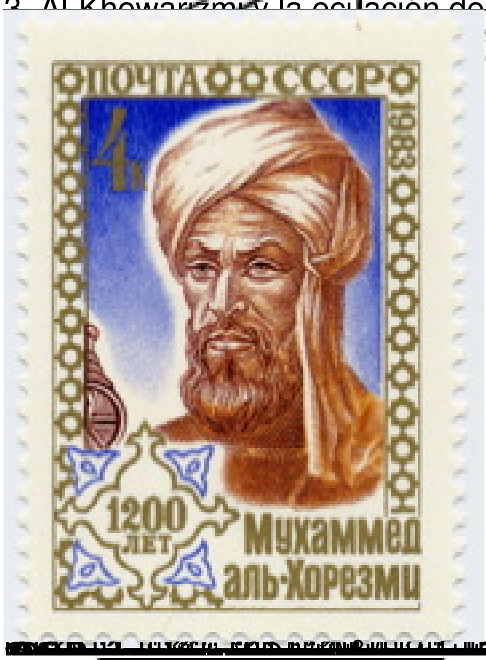
Esto sólo es posible si **a/2 >**

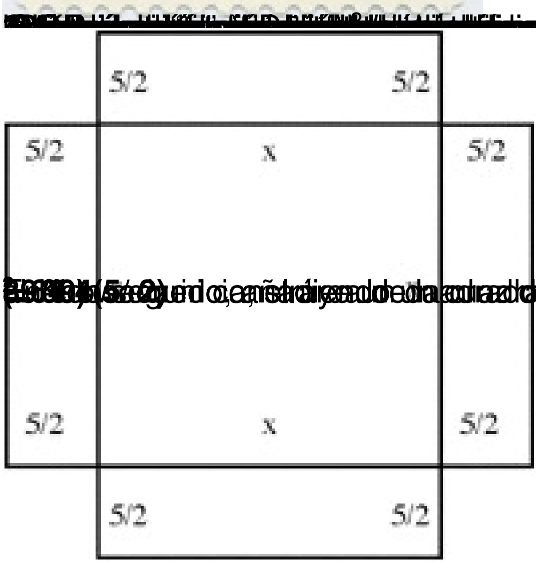
[si **a/2 =**

a/2 + (a/2). El segmento obtenido es **x** (véase el

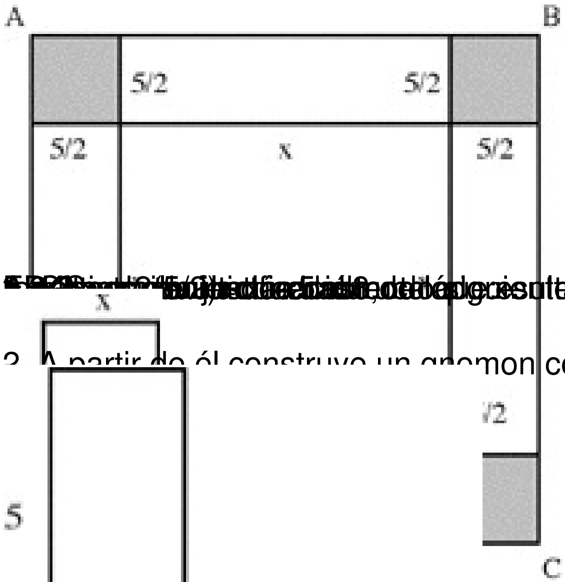


3. Al-Khowarizmi y la ecuación de segundo grado





(5/2) ... cuadrado ... lado **5/2** ... igual a $x^2 + 10x$



... claro que el lado del cuadrado ABCD es igual a **8**.

2. A partir de él construyo un gnomon como el de la figura adjunta.

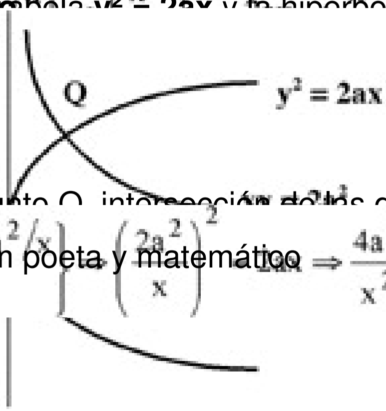
... (véase la figura adjunta),

... de la duplicación del

La abscisa del punto P, intersección de las dos gráficas, satisface la relación $x^3 = 2a^3$.

$$x^2 = ay \Rightarrow y = x^2/a \; \ldots \; \left(\frac{x^2}{a}\right)^2 = 2ax \Rightarrow x^4 = 2a^3x \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

Segundo método ... parábola $\mathbf{y^2 = 2ax}$ y la hipérbola equilátera $\mathbf{xy = 2a^2}$.



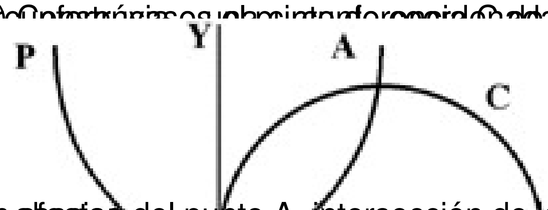
La abscisa del punto Q, intersección de las dos gráficas, satisface la relación $x^3 = 2a^3$.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2a^2 \Rightarrow y = 2a^2/x \\ y^2 = 2ax \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2a^2}{x}\right)^2 = 2ax \Rightarrow \frac{4a^4}{x^2} = 2ax \Rightarrow 4a^4 = 2ax^3 \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

5. Omar Khayyam poeta y matemático

(i) Dibújese una parábola P de ecuación $x^2 = y\sqrt{a}$

(ii) Constrúyase una circunferencia C de ecuación $y^2 = x(h - x)$. El centro de dicha circunferencia es $(h/2, 0)$ y su radio es $h/2$.



En efecto, la abscisa del punto A, intersección de las dos curvas, satisface la ecuación propuesta.

$$x^2 = y\sqrt{a} \Rightarrow x^4 = ay^2 \Big\rceil \Rightarrow x^4 = ax(h - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 = ah - ax \Rightarrow x^3 + ax = ah \Rightarrow x^3 + ax = b$$

6. El álgebra geométrica de Descartes

Comment ils se resoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple

$z^2 \infty az + bb$

ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b [...]

LIVRE PREMIER. 303

angle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, [...]

[illegible]

[illegible] resolver [z(z − a) = b²]

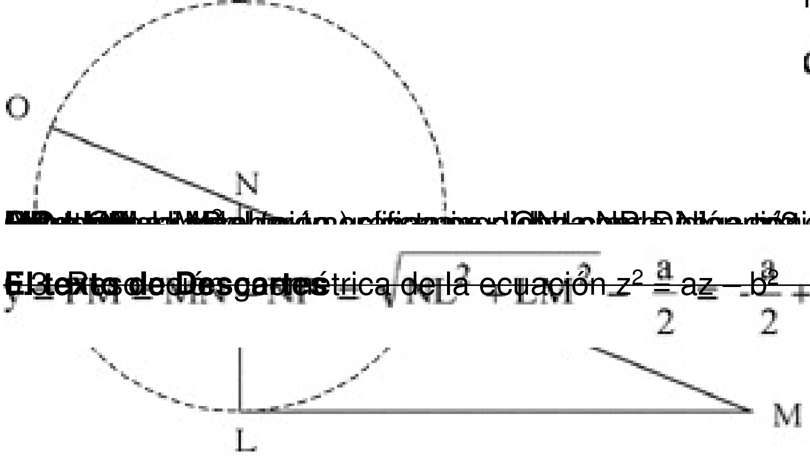
El texto de Descartes [illegible]

Que si i'ay $yy \infty -- ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que i'ay [...] $\frac{1}{4}aa + bb$. Et tout de mesme si i'a- [...] P M seroit x, & i'aurois [...] des autres.

[illegible] *y de la base MN quito NP igual a NL, entonces PM es y, la raíz*

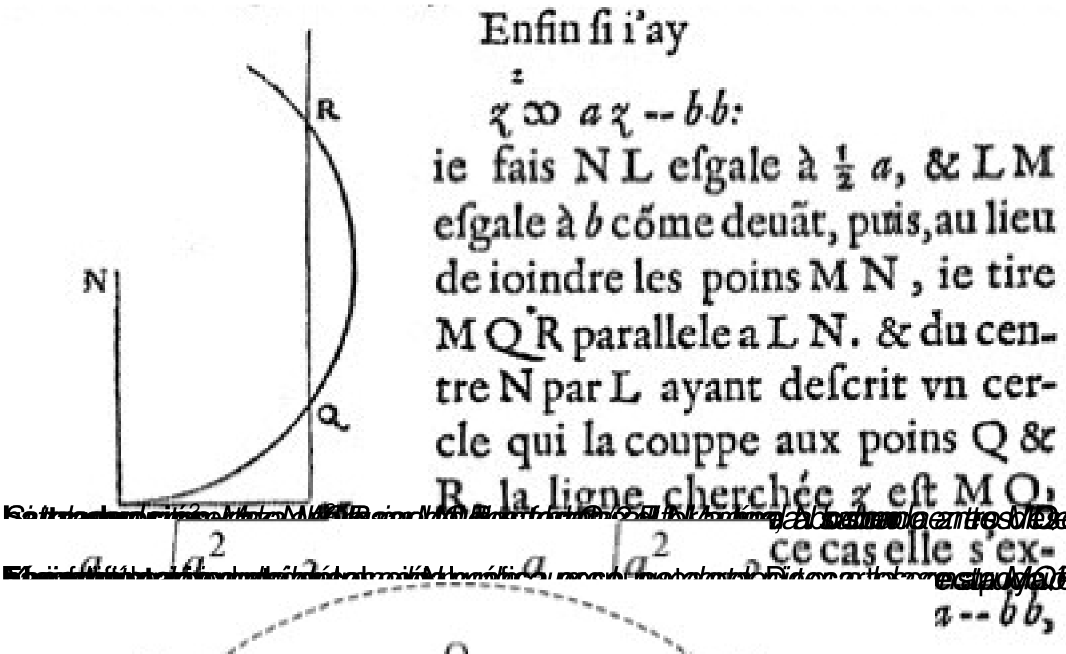
Y del mismo modo, si se tiene $x^4 = -ax^2 + b^2$ entonces PM será x^2 y se tendrá que:

[illegible] también se apoya en la proposición 36



[illegible] resolver [y(y + a) = b²]

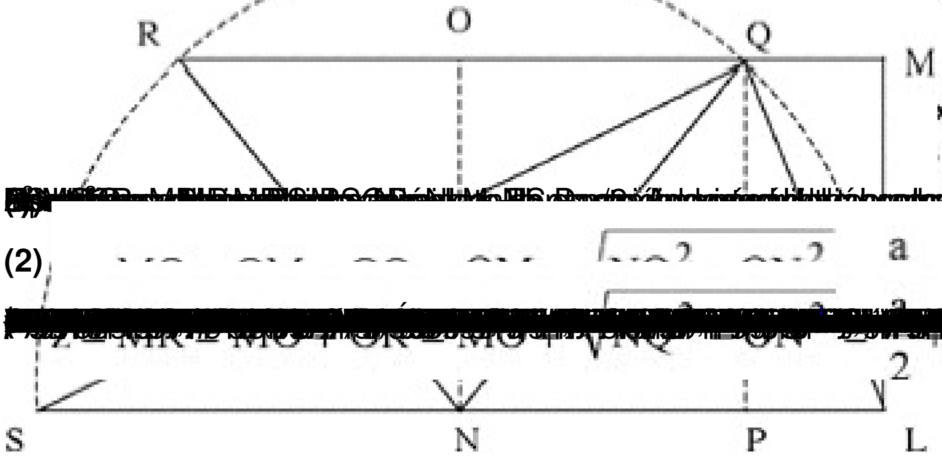
El texto de Descartes [illegible] geométrica de la ecuación $z^2 = az + b^2$



Enfin si i'ay

$z z \infty a z -- bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}$ a, & L M esgale à b cõme deuãt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, … ce cas elle s'ex- … z -- bb, … , passe … droite



(2)