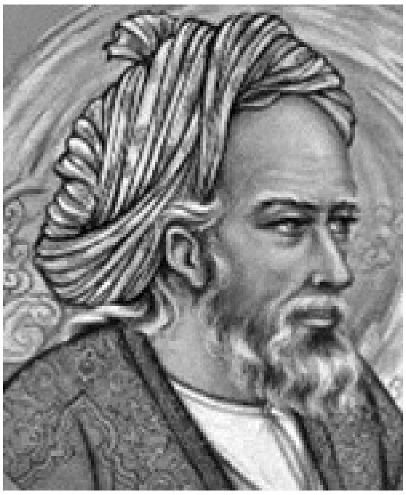
Escrito por Ricardo Moreno (Universidad Complutense de Madrid)



Poco se sabe de la vida de Omar Jayyam. Tan solo que nació a mediados del siglo XI en Nishapur (Persia), donde pasó casi toda su vida, y que murió en el 1131. En el 1074 fue llamado por Malik Sha para reformar el calendario, cuando ya era un famoso científico.

El Álgebra La obra fundamental de Jayyam es un Álgebra, escrita alrededor del 1074. Se conservan varias copias de fecha bastante temprana, por lo que es un tratado muy bien conocido.

En las ecuaciones algebraicas de grado menor o igual que tres reconoce Jayyam veinticinco formas distintas. Seis ya habían sido estudiadas por los algebristas anteriores. Otras cinco son reducibles a éstas. Las catorce restantes, que no pueden ser resueltas geométricamente con la sola ayuda de los Elementos, son las siguientes:

Cubo de la cosa igual a número x

Cubo de la cosa más cosa igual a número $x^3 + bx = c$

Cubo de la cosa más número igual a cosa $x^3 + c = bx$

Cubo de la cosa igual a cosa más número $x^3 = bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número $x^3 + ax^2$

Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa $x^3 + c = ax^2$

Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número $x^3 = ax$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número $x^3 + ax^2 + bx$

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa $x^3 + ax^2 + c =$

Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa $x^3 + bx + c = ax$

Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número
x ^{3} ***= ax*** ^{2} ***+ bx***

Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número
x ^{3} ***+ ax*** ^{2} ***= bx***

Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número
x ^{3} ***+*** ***bx*** ***=***

Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más cosa
x ^{3} ***+*** ***c*** ***=***

Después de demostrar unos lemas muy sencillos, veremos como Jayyam resolvió algunas de ellas. Las palabras “número” y “segmento” serán utilizadas indistintamente.

LEMA 1: Dados dos segmentos *a* y *b*, encontrar otros dos *x* e *y* tales que:

Jayyam resuelve este problema igual que Menecmo, cortando dos parábolas.

LEMA 2: Sean dos paralelepípedos de bases cuadradas de lados *a* y *b*. La altura del primero es *h*. Queremos calcular la altura del segundo (lo cual significa fabricar un segmento igual a dicha altura) para que ambos tengan idéntico volumen (figura 1).

La proposición 11 del libro VI de los Elementos de Euclides permite dibujar un segmento de longitud *m* tal que *a/b=b/m*. Con la proposición 12 del mismo libro construimos un segmento *k* cuarto proporcional de *m*, *a* y *h*, esto es, tal que *m/a=h/k*. Este segmento es la altura buscada. En efecto, por la proposición 34 del libro XI:

Volumen del primero $= a^2h = a(ah) = a(mk) = (am)k = b^2k =$ *Volumen del segundo*

LEMA 3: Conocemos ahora la altura del segundo paralelepípedo y queremos saber el lado de su base. Buscamos un segmento *m* cuarta proporcional de las tres longitudes conocidas *k/n=a/m*: Mediante la proposición 13 del libro VI fabricamos otro segmento *b* media proporcional entre a y m: $a/b=b/m$. La misma cadena de igualdades utilizada más arriba demuestra que este segmento es el lado buscado.

1. Ecuación $x^3=c$. Según el lema 1 podemos encontrar dos segmentos x e y tales que $1/x=x/y=y/c$. Ahora bien, según la primera igualdad, $x^2=y$. Entonces:

De aquí se deduce que $x^3=c$. El segmento x es solución de la ecuación. Ecuación $x^3+bx=c$. Dibujamos un cuadrado de lado $\sqrt{b}$ (proposición 13 del libro VI de los Elementos) y sobre él, por el lema 2, un paralelepípedo de altura h y volumen c. Construimos ahora una parábola de vértice O y lado recto $OA=\sqrt{b}$, y un círculo de diámetro $OH=h$ y tangente al eje de la parábola en su vértice (ver figura 2).

Ambas curvas se cortan en O y en otro punto P. En adelante nos fijaremos en los segmentos $OX=x$ y $OY=y$ que el punto de encuentro de las cónicas proyecta sobre rectas relacionadas con ellas (en este caso, el eje de la parábola y el diámetro de la circunferencia perpendicular a él).

Por la proposición 33 del libro III y el corolario de la proposición 8 del libro VI de los Elementos, los triángulos rojo y verde son semejantes:

Y por ser P un punto de la parábola:

Combinamos las do proporciones y tenemos lo siguiente:
de donde se deduce que $OX^3=OA^2HX$. El segmento $OX=x$ es la solución:
$x^3+bx = OX^3+OA^2OX = OA^2HX+OA^2OX = OA^2(OX+HX) = OA^2OH = bh = c$ Ecuación $x^3+cx = bx$.
Los segmentos *OA* y *OH* y la parábola son los de antes. Tangente en *O* a su eje, dibujamos una hipérbola de lado recto *OH* (figura 3).

La rama de la derecha de la hipérbola puede no cortar a la parábola, tocarla en un punto o cortarla en dos, con lo cual la ecuación carecería de soluciones, tendría una o tendría dos (a ojos de Omar Jayyam: para él no existen soluciones negativas ni complejas). Suponemos que se encuentran por lo menos en un punto ***P***. Por ser un punto de la hipérbola (y la proposición 21 del libro I de las Cónicas de Apolonio): $PX^2 = OY^2 = OX\ HX$ y en consecuencia y por serlo de la parábola: Entonces sucede lo que viene a continuación:
, de donde se deduce:
$OX^3 = OA^2HX$
y ya tenemos la solución: $x^3+c = OX^3+OA^2OH = OA^2HX+OA^2OH = OA^2(HX+OH) = OA^2OX = bx$ Ecuación $x^3+ax^2=c$. Dibujamos la arista *OH* de un cubo de volumen ***c*** (ecuación x^3

=c
), un segmento prolongación del anterior, una recta perpendicular en
O
a
AH
, y un punto
C
que con
O
y
H
determine un cuadrado (figura 4). Después, la parábola de vértice
A
, eje
AH
y lado recto
OH
, y la hipérbola que pasa por
C
y de asíntotas las dos rectas perpendiculares (proposición 4 del libro II de las Cónicas). Ambas curvas se cortan
P
. Los rectángulos rojo y negro tienen idéntica superficie:

Y por estar P en la parábola

Entonces tenemos lo siguiente:
de donde se deduce: $OH^3 = OX^2AX$. Como siempre, la solución es:

$$x^3+ax^2 = OX^3+OX^2OA = OX^2(OX+OA) = OX^2AX = OH^3 = c$$

Ecuación $x^3+ax^2+bx=c$. Sean los segmentos ***AB=a***, ***OB=√b***, y ***BC***, cuya longitud es la altura de un prisma de volumen c y base cuadrada de lado ***OB*** (lema II). ***BC*** prolonga a

AB, y ***OB*** es perpendicular a ***AC*** (figura 5). Dibujamos el círculo de diámetro ***AB***, y la hipérbola que pasa por **C** y tiene como asíntotas a la recta que contiene al segmento ***OB*** y a su perpendicular que pasa por ***O***. Ambas curvas se encuentran en ***P***. A los rectángulos rojo y negro, que tienen la misma superficie, les quitamos su parte común y tenemos otros dos rectángulos, también de la misma superficie:

El triángulo negro es rectángulo, por la proposición 32 del libro III de los Elementos, y por el corolario de la proposición 8 del libro VI:

Entonces tenemos que
de donde se deduce: $\boldsymbol{OB^2DC = OX^2AD}$ y en consecuencia:

$$x^3+ax^2+bx = OX^3+ABOX^2+OB^2OX = OX^2(OX+AB)+OB^2OX = OX^2AD+OB^2OX = OB^2DC+OB^2OX = OB^2(DC+OX) = BC^2 BC = c$$

Sobre la división de un cuarto de círculo

Otra obra de Omar Jayyam se titula *Sobre la división de un cuarto* *de círculo* , un opúsculo en el cual propone una cuestión geométrica que lleva a una ecuación cúbica. El problema es el siguiente: si para cada punto ***P*** de un círculo consideramos las proyecciones ***CA*** y ***CB*** sobre dos diámetros perpendiculares (ver figura 8), se trata de encontrar el punto para el cual sucede lo que viene a continuación:

(lo cual equivale a resolver la ecuación trigonométrica)

El problema, traducido algebraicamente, lleva a la ecuación $x^3+2x=2x^2+2$, que es una ecuación del tipo *cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número,* que está entre las inventariadas más arriba.

Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides

La otra obra que vamos a comentar de nuestro matemático tiene un título muy explícito: Comentarios sobre aspectos dudosos en los postulados del libro de Euclides. En ella reflexiona sobre dos puntos que, a su juicio, Euclides los había tratado de un modo incompleto. Uno de ellos es el del V postulado, que para él, como para tantos otros matemáticos, no era tal postulado y requería una demostración. De esta manera entra en una polémica que ya era antigua en su época y que todavía duraría mucho más, hasta dar lugar a las geometrías no euclidianas. El otro punto es la teoría de las proporciones irracionales. Jayyam lo aborda mediante un algoritmo que es el antepasado, no demasiado remoto, del de las fracciones continuas.

BIBLIOGRAFÍA SOBRE MATEMÁTICA ÁRABE

CATALÁ, M. A. (1981), "El nacimiento del álgebra", en Historia de la ciencia árabe, Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales, Madrid.

MILLÁS VALLICROSA, J. Mª, (1947), "Sobre la valoración de la ciencia arábigo-española de fines del siglo X y principios del XI", en Al-Andalus, Vol. XII, págs. 199-210.

MORENO CASTILLO, R. (1998), "La Matemática en Bagdad", en Boletín de la Sociedad « Puig Adam » de profesores de Matemáticas, nº 49, págs. 53-67.

MORENO CASTILLO, R. (2002), Omar Jayyam, poeta y matemático, Nivola, Madrid. RASHE D, R. y VAHABZADEH, B. (1999), Al-Khayyam Mathématicien, Editions Albert Blanchard, París.

ROMO SANTOS, C. (1997), "La aritmética árabe durante la Edad Media. Antiguos problemas aritméticos árabes", en Tarbiya, nº 15, págs. 57-64.

SAMSÓ, J. (1971), "En torno al Arquímedes árabe: el testimonio de al-Biruni", en Al-Andalus, vol. XXXVI, págs. 383-390.

SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. (1921), Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España, Estanislao Maestre, impr., Madrid.

SESIANO, J. (1990), "Rhetorische Algebra in der arabiscsh-islamischen Welt", en Geschichte der Álgebra, Wissenschaftsverlag, Mannheim.

SESIANO, J. (1990), "Aufnahme und Fortführung der arabiscshen Algebra im europäischen Mittelater", en Geschichte der Álgebra, Wissenschaftsverlag, Mannheim.
VAHABZADEH, B. (1997), "al-Khayyam´s conception of ratio and proportionality", en Arabic Sciencies and Philosophy, vo´lumen 7, págs. 247-263.

VERNET GINÉS, J. (1978), La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente, Ariel, Barcelona

VERNET GINÉS, J. (1986), "La matemática árabe", en Historia de la matemática hasta el siglo XVII, Real Academia de Ciencias Exactas. Físicas y Naturales, Madrid.

VERNET, J. y CATALÁ M. A. (1965), "Las obras matemáticas de Maslama de Madrid, en Al-Andalus, vol. XXX, págs. 15-45.

VERNET, J. y CATALÁ M. A. (1965), "Un ingeniero árabe del siglo XI: al-Karayi", en Al-Andalus, vol. XXXV, págs. 69-92.

VILLUENDAS, M. V. (1981), "El origen de la trigonometría", en Historia de la ciencia árabe, Real Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales, Madrid.

YOUSCHKEVITCH, A. (1976), Les Mathématiques Arabes, Librairie Philosophique J. Vrin,

París.