
J[ulius] W[ilhelm] Richard Dedekind (Braunschweig, Alemania, 6 Octubre 1831 – 12 Febrero 1916).

El matemático alemán Richard Dedekind fue una figura clave en el surgimiento de la matemática conjuntista y estructural del siglo XX. Su obra y su importancia han sido reevaluadas en los últimos treinta años, resultando que no deja de crecer la estimación que de él se tiene. Hasta cierto punto, se le puede considerar un moderno Euclides: dejó una huella muy importante en los *elementos* de la matemática, de ahí que los Bourbaki le consideraran uno de sus antecesores directos. Durante el siglo XX, a Dedekind se le ha conocido sobre todo por su aportación a los fundamentos del sistema numérico (definiciones de los números reales y naturales), pero su principal contribución como investigador fue en el terreno del álgebra y sobre todo la teoría de números algebraicos.

Igual que quien sería su director de tesis: Gauss, el “primero entre los matemáticos”, Dedekind nació en Braunschweig (Brunswick), capital de un pequeño ducado situado al oeste de Berlín. Era el cuarto hijo de una familia acomodada, de padre jurista, profesor en el Collegium Carolinum de la ciudad. En ese mismo lugar, convertido en Politécnico, impartiría clases el matemático desde 1862 y durante más de 30 años, encargándose entre otras cosas (como rector) de su transformación en Escuela Técnica Superior. Siendo estudiante, en 1850 fue a la célebre Universidad de Göttingen, y escuchó entre otras las lecciones de Gauss sobre el método de mínimos cuadrados y las de Wilhelm Weber sobre física experimental. Tras el doctorado, fue miembro del Seminario Físico-Matemático de la universidad, donde conocería nada menos que a Bernhard Riemann, figura capital en su desarrollo como matemático. E n el año 1854 se “habilitan” como profesores asistentes (*Privatdozent*) tanto Dedekind como su compañero Riemann, cinco años mayor. Pero, a diferencia de las tremendas contribuciones que hizo Riemann en sus dos tesis y en su lección de habilitación, no encontramos nada comparable en los trabajos de Dedekind. Eso sí, la lección de habilitación mostraba su interés por los fundamentos de la matemática y su orientación reflexiva y sistemática. Fue a partir de 1855, cuando muere Gauss y la universidad contrata a otra gran figura, Gustav Lejeune-Dirichlet, que Dedekind entró realmente en la atmósfera de la alta investigación. La interacción con Riemann, a cuyos cursos asistía regularmente, y la conversación diaria con el riguroso y omniabarcante Dirichlet, resultaron estímulos decisivos.

Hacia 1856 nuestro hombre encontró el que sería su principal campo de trabajo. Escucha las lecciones de Dirichlet sobre teoría de números, famosas por haber puesto el contenido de las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss al alcance del "gran público" matemático, y las discute minuciosamente con su maestro. Pero sobre todo estudia los trabajos de Abel y Galois, a resultas de lo cual imparte un curso sobre álgebra superior y teoría de Galois, aparentemente el primero de este tipo en Alemania. El primero, y el más avanzado por mucho tiempo: se conserva un manuscrito (redactado probablemente hacia 1858, después de concluidas las lecciones) y de él se ha dicho que constituye "el primer tratamiento moderno del tema". Concibe la teoría directamente en términos de extensiones de cuerpos, estudia cuidadosamente las relaciones entre dichas extensiones y los grupos de las ecuaciones, y además –a diferencia de sus contemporáneos– pone en segundo plano el estudio de las soluciones de ecuaciones.

Pero Dedekind no llegó a publicar ese manuscrito cuidadosamente redactado, y de hecho tardó mucho (demasiado) en publicar contribuciones importantes. En 1858 se desplaza a Zurich como profesor del Politécnico (la famosa ETH posterior), año y lugar donde por cierto concibió su célebre definición de los reales mediante cortaduras. En 1862 vuelve a Braunschweig, y durante unos años parece abandonar la investigación para dedicarse a publicar trabajos de sus grandes maestros: las *Vorlesungen über Zahlentheorie* de Dirichlet (1863) y algunos trabajos de Riemann (en 1868 los célebres trabajos de habilitación, sobre geometría y sobre teoría de funciones reales, con la definición de la integral; en 1876 las obras completas editadas por él y Heinrich Weber).

Segunda edición (1871) por R. Dedekind de las "Vorlesungen über Zahlentheorie de Dirichlet, que in

La razón de no publicar venía en buena medida de lo exigente que era Dedekind a la hora de juzgar sus logros, cosa quizá normal en alguien que había conocido en persona a Gauss y Riemann (!). Su largo trabajo sobre números algebraicos, hacia 1860, no le había permitido elaborar una teoría perfectamente general, y eso al parecer le desencantó. Por fin, ya a los 40 años, publica la segunda edición de las Vorlesungen de Dirichlet (1871), y dentro de ella –curioso lugar en una época ya de artículos especializados– un apéndice "sobre la teoría de los números enteros algebraicos". Se ha llegado a decir que este trabajo dio forma a la teoría de números moderna. Aparecían aquí diversas estructuras algebraicas, estudiadas empleando homomorfismos, isomorfismos, clases de equivalencia: las estructuras de cuerpo, anillo –sin este nombre–, módulo, ideal (siempre dentro del contexto particular de los números complejos). La teoría de los enteros algebraicos se convertía en una teoría de ideales en anillos de enteros, y mediante esta transformación Dedekind lograba la generalidad deseada. Un ideal (en un anillo de números) es un conjunto de infinitos números enteros del anillo, cerrado para la suma y también para la multiplicación por números cualquiera del anillo. El replanteamiento que propuso Dedekind significaba introducir "a todo trapo" el lenguaje conjuntista en este campo de la matemática. La recepción de su trabajo fue lenta, sin duda porque se trataba de un cambio muy radical. Este punto es difícil de juzgar hoy para nosotros, acostumbrados como estamos desde muy pronto al lenguaje conjuntista. Pero en aquella época el álgebra era todavía la teoría de las ecuaciones, y el estudio de los enteros algebraicos consistía en estudiar propiedades y relaciones de números concretos. Dedekind pasaba a analizar las propiedades de la multiplicación de ideales, y esto representaba para sus contemporáneos una abstracción sumamente difícil. Se puede decir que sólo hacia 1890 encontró continuadores.

Entretanto, Dedekind había publicado otras dos versiones de la teoría de ideales, en sendas reediciones del libro de Dirichlet (1879 y 1893). Estas nuevas versiones introducían cambios muy importantes, guiados por un ideal de pureza de método. Dado que el punto de partida de la teoría eran definiciones de estructuras conjuntistas, el método de trabajo debía basarse en el manejo lo más directo posible de conjuntos y morfismos. Dedekind era, en cierto sentido, más un sistemático que un matemático orientado a la resolución de problemas. En su afán de pureza, y de acuerdo con el espíritu "aritmetizador" de la época, llegó a sugerir en algún momento que el álgebra debía olvidarse de los polinomios. Pero ese mismo afán le llevó a desarrollar métodos que tenían un gran potencial de generalización; de ahí la famosa frase que Emmy Noether solía repetir a sus colaboradores: "ya está todo en Dedekind" (*es steht alles schon bei Dedekind*).

La versión de 1893 incluía un nuevo tratamiento de la teoría de Galois, muy abstracto para la época, en términos de grupos de automorfismos del cuerpo correspondiente. Resultados como el teorema sobre independencia lineal de los automorfismos prefiguran el modo de trabajo del álgebra abstracta de los años 1920 (Artin, Noether). Sin embargo, los matemáticos de su momento se quejaban de tanta abstracción. Frobenius, que conocía bien a Dedekind y su trabajo, bromeaba diciendo que iba demasiado lejos y que sus morfismos eran "demasiado incorpóreos" (recuérdese que fue Dedekind quien introdujo el término "cuerpo"). Les parecía que con medios más tradicionales se podían desarrollar los resultados de un modo más económico y elegante, y así lo hizo por ejemplo Hilbert en su célebre *Zahlbericht* de 1897. Dedekind respondía que si elaboraran todo desde el principio y justificaran todos los pasos, el desarrollo al modo habitual resultaría más largo y complejo que el suyo. Pero su enfoque purista y abstracto tardó en imponerse.

En 1882, Dedekind publicó junto a su buen amigo Heinrich Weber (entonces profesor en Königsberg, con el joven Hilbert entre sus alumnos) un trabajo fundamental sobre curvas algebraicas bajo el título “Teoría de las funciones algebraicas de una variable” (*Journal für die reine und angew. Mathematik*). Se establecía aquí un paralelismo muy notable con la teoría de ideales, y por esta vía puramente algebraica se llegaba a dar una definición de los puntos en una superficie de Riemann y se alcanzaba a demostrar el teorema de Riemann-Roch. El cambio con respecto al tratamiento habitual de estas cuestiones era de nuevo inmenso, los autores describían su método como “simple pero a la vez riguroso y plenamente general”. El tipo de paralelismo estructural que aquí se plantea sería premonitorio de la matemática del siglo XX. Se abría el camino a la geometría algebraica, que también recibió por entonces estímulos de Kronecker, el gran “contrincante” de Dedekind.

A propósito de Kronecker, famoso por su enfrentamiento con Cantor, no está de más recordar que fue todavía más beligerante con Dedekind. (Si éste se lo tomó relajadamente, la razón hay que buscarla en las grandes diferencias entre su personalidad y la del genial pero inestable Cantor.) Kronecker y Dedekind compartían casi todo: campos de trabajo –teoría de números, álgebra, curvas algebraicas–, interés por los fundamentos y capacidad para ir a fondo en ambas direcciones. Pero había buenas razones para su enfrentamiento, no casual sino sintomático de dificultades que ya no desaparecerían. Se trataba del enfrentamiento entre los métodos y concepciones de la matemática moderna, conjuntista y estructural, por un lado, y por otro los métodos y concepciones de la matemática constructivista (que en cierta medida seguía más apegada a los modos de hacer tradicionales). Kronecker fue, en efecto, un antecesor muy coherente de Brouwer, Weyl, Lorenzen o Bishop, partidario de que todos los objetos matemáticos fueran definidos o construidos explícitamente a partir de los números naturales, sin recurrir al artificio de los conjuntos infinitos. Nada más lejano del punto de vista de Dedekind, quien creía, con cierta ingenuidad, que recurrir a conjuntos infinitos eran simplemente hacer uso de la lógica y del pensamiento racional.

Siendo como era profesor en una Escuela Técnica, Dedekind no tuvo discípulos, no creó escuela. Pero además de la influencia de sus escritos, magníficamente presentados, estuvo su colaboración con grandes matemáticos como el citado Heinrich Weber, como Frobenius, etc. Años después de su artículo conjunto, Weber publicó un manual de álgebra que sería obra de referencia obligada durante tres décadas. La correspondencia con Frobenius, publicada hace poco, desempeñó un papel importante en el desarrollo de la teoría de caracteres de grupos. Las indicaciones de Dedekind fueron importantes para orientar a Frobenius, y también lo fue el trabajo de aquél sobre números hipercomplejos publicado en 1885. En una de las cartas escribe Frobenius: *Hace ya mucho tiempo me sorprendía que no hubiera Ud. participado más activamente en el desarrollo de la teoría abstracta de grupos, pese a que, dada su disposición, este campo debía haberle resultado especialmente atractivo. Ahora veo que se ha ocupado Ud. de ella durante diez años, pero sin compartir con sus amigos y admiradores*

(¿quizá también, desgraciadamente, dada su disposición?) sus resultados extremadamente bellos. Y por supuesto está la famosísima correspondencia con Cantor, sobre todo de 1872 a 1882, en la que éste iba desarrollando sus geniales ideas nuevas y las sometía al riguroso análisis de su colega. Es a Dedekind a quien Cantor dirige la conocida frase "lo veo pero no lo creo" (añadiendo "mientras no me dé Ud. su aprobación") en referencia a la equipotencia de los continuos de cualquier número de dimensiones.

El trabajo de Dedekind sobre fundamentos del número estaba íntimamente ligado con su investigación en álgebra y teoría de números. Este tipo de interacción es distintiva de su obra, y precisamente es lo que le condujo a dar con nociones fundamentales que tenían a la vez la generalidad necesaria para reconstruir todo el edificio de la matemática pura. Igual que veía el álgebra en términos de estructuras (esencialmente cuerpos o subestructuras de cuerpos) y morfismos, acabó reduciendo el concepto de número a conjuntos y aplicaciones. Nacía así, en paralelo con las novedosas contribuciones de Cantor, el enfoque conjuntista de los fundamentos. Lo característico y muy original de Cantor fue su fantástico viaje de exploración de lo que él llamaba transfinito; pero en lo relativo a reformular la matemática dentro del enfoque conjuntista, Dedekind fue más lejos y además se anticipó.

El primer paso fundamental en esa dirección lo dio Dedekind en 1858, cuando ideó la definición de los números reales mediante cortaduras, insatisfecho porque hasta entonces la teoría de límites se apoyaba en evidencias geométricas. Dedekind advirtió que las propiedades de orden denso de los números racionales hacían posible utilizar el fenómeno de las cortaduras para definir los reales. Una cortadura es una partición de **Q** en dos subconjuntos disjuntos (A_1, A_2) tal que cada número de A_1 es menor que todo número de A_2. El conjunto de los números reales es (en esencia) el conjunto de todas las cortaduras sobre **Q**, y Dedekind demostraba rigurosamente que dicho conjunto es continuo. De este modo, podía demostrar con rigor que toda sucesión estrictamente creciente y acotada de reales tiene por límite un número real. Con ánimo polémico, Dedekind escribió que hasta ese momento nadie había dado los medios para demostrar que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

De nuevo, su trabajo quedó muchos años sin publicar, y la razón –si creemos a su autor– fue que no era original, sino que cualquier buen matemático que decidiera prestar su atención al tema llegaría a algo similar. Sólo en 1872, teniendo que escribir algo para un volumen de homenaje a su padre, Dedekind sacó sus notas del cajón y publicó "Continuidad y números irracionales", un artículo magistral. Se debe notar que aquí

R
queda caracterizado, al pie de la letra, como un cuerpo de números dotado de un orden lineal continuo (el orden denso del cuerpo
Q
era analizado también con toda precisión, pero sin usar el término “denso”).

El descubrimiento de que los números reales eran reducibles a los números racionales, empleando sólo teoría de conjuntos, debió tener un efecto muy poderoso sobre Dedekind. Como muchos de sus contemporáneos, Dedekind creía (ingenuamente) que la teoría de conjuntos no era más que una parte de la lógica elemental. (Este punto de vista exigía recurrir implícita o explícitamente al
principio de comprehensión
, presunto axioma lógico que años después se demostró contradictorio gracias precisamente a las paradojas.) Al pensar de esa manera llegó al convencimiento de que –como escribió en 1888– “la aritmética”, pero también “el álgebra y el análisis”, son “sólo una parte de la lógica”. Nacía así, hacia 1872, el programa logicista en fundamentos de la matemática. Pero para establecerlo era necesario dar una teoría totalmente rigurosa de los números naturales, basada sólo en la teoría de conjuntos y aplicaciones.

¿Qué son y para qué sirven los números? de R. Dedekind (1888)

Dedekind se puso manos a la obra durante los años 1870, y publicó sus resultados en el librito *¿Qué son y para qué sirven los números?* (1888), una obra que hizo época, según dijo el propio Hilbert. El nivel de rigor alcanzado en el desarrollo de la aritmética de
N
era altísimo, sin precedentes, pero lo más notable era el enfoque. La teoría de los naturales, que siempre se habían considerado los objetos finitos por excelencia, se deducía íntegramente a partir de resultados sobre conjuntos infinitos. Otro ejemplo similar: la equipotencia entre todos y partes, que ya desde Galileo se había considerado la gran paradoja del infinito, se convertía simplemente en definición de conjunto infinito.

En su libro, Dedekind axiomatizaba la aritmética de los naturales ofreciendo una caracterización de la estructura del conjunto de los números naturales. La idea es que
N
es un conjunto dotado de una aplicación inyectiva
Φ
(la función sucesor) y con un elemento distinguido
1
, tal que: (a)

$\Phi(N) \subset N$, lo que le hace infinito; (b) $1 \notin \Phi(N)$, es decir, no es un sucesor; y (c) N es la Φ-cadena de $\{1\}$, lo que intuitivamente significa que es el más pequeño conjunto que satisface (a) y (b) y es cerrado bajo Φ. Estas condiciones son equivalentes a los famosos axiomas de Peano, propuestos por éste un año más tarde. En concreto, la condición (c) de ser una cadena permite deducir el axioma de inducción. Pero lo cierto es que Dedekind era más general y más riguroso que Peano, como muestra por ejemplo el hecho de que desarrolló una teoría general de las definiciones recursivas.

Para preparar esa definición de los naturales, Dedekind empezaba su libro presentando una teoría elemental pero general de conjuntos, en la que encontramos algunos de los axiomas de Zermelo. Estudiaba luego la teoría de aplicaciones, por primera vez en la historia, y finalmente desarrollaba una teoría general de cadenas que tuvo mucha importancia en el desarrollo de la teoría de conjuntos. Sólo a partir de la sección 6 limitaba sus consideraciones con vistas a la aritmética finita, y en algún lugar sugería que era fácil generalizar sus ideas al caso transfinito. Ahora bien, hay un punto (afortunadamente sólo uno) donde su enfoque no resultó aceptable a la vista de las antinomias: el intento de *demostrar* que existe un conjunto infinito. Las paradojas arruinaron la interpretación logicista de esos resultados, pero no el desarrollo teórico mismo, que fue reincorporado dentro de la teoría axiomática de conjuntos. (Por cierto, Zermelo solía denominar “axioma de Dedekind” al axioma del infinito, ya que las ideas esenciales y la necesidad de un principio así se encuentran en su trabajo.)

Para quienes entendieron esa obra de Dedekind, y comprendieron sus conexiones con el álgebra y el análisis, los conjuntos y las aplicaciones se convertían en las piedras básicas con las que se construía todo el edificio de la nueva matemática estructural. Una de estas personas fue Hilbert, que –como hemos descubierto recientemente– fue partidario del logicismo de Dedekind hasta 1900 o algo más. Precisamente Hilbert escribió que el enfoque de Dedekind, con su idea de fundar lo finito en lo infinito, resultaba “deslumbrante y cautivador”.

Dedekind fue un hombre de vida retirada, modesto, recto y exigente, aunque con sentido del humor. Soltero, vivió una existencia provinciana y cerrada junto a su madre y su hermana, rehusando incluso alguna cátedra universitaria por no alejarse de la familia. Eso sí, parece haber disfrutado mucho de la música (tocaba bien el cello y el piano), de la lectura (junto a su hermana, escritora de éxito), y de la naturaleza. Felix Klein, hombre de mundo, amante del poder y las grandes empresas, escribió de él:

Su fuerza estaba en la capacidad de penetrar profundamente en los principios de su ciencia; fue en esencia un hombre de natural contemplativo, al que quizá le faltaba empuje y capacidad de decisión.

Quizá, más que nada de esto, de lo que careció es de ambición y, sin duda, de espíritu aventurero.

Bibliografía:

- G. Cantor & R. Dedekind, Briefwechsel, Paris, Hermann, 1937. (Hay trads. francesa de Cavaillès e inglesa de Ewald.)
- R. Dedekind, Mathematische Werke, 3 vol., Braunschweig, Vieweg, 1930–1932.
- R. Dedekind, ¿Qué son y para qué sirven los números?, ed. & introduc. J. Ferreirós, Madrid, Alianza/UAM, 1997.
- R. Dedekind, Theory of algebraic integers [trad. de un artículo original en francés, 1877], Cambridge Univ. Press, 1996.
- G. L. Dirichlet y R. Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, Braunschweig, Vieweg, 1863, 1871, 1879, 1894. Reimpresión de la 4ª edición en New York, Chelsea, 1968 (selecciones de las otras eds. en Werke, vol. 3). Versión inglesa: American Mathematical Society (AMS), 1999.
- P. Dugac, Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux texts inédits), Paris, Vrin, 1976.
- H. M. Edwards, The genesis of ideal theory, Arch. Hist. Exact Sciences 23 (1980), 321-378.
- H. M. Edwards, Dedekind's invention of ideals, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 8-17. Reimpreso en Studies in the history of mathematics (Washington, DC, 1987).
- J. Ferreirós, Labyrinth of Thought: A history of set theory, Basel, Birkhäuser, 1999.