Aryabhata, el más antiguo de los matemáticos hindúes cuyos trabajos se conservan, nació en el 476, en un lugar que desconocemos. Su obra más importante, llamada por la posteridad *Aryabhatiya*, es un libro en verso organizado en cuatro capítulos en el que se habla de muy diversos temas de astronomía y matemáticas. En él aparecen aportaciones propias del autor, y también se recogen y sistematizan resultados procedentes de los *Siddhantas* (una colección de textos donde teorías astronómicas de origen griego aparecen mezcladas con viejas creencias hindúes) y de obras ce científicos anteriores. Así, aunque el *Aryabhatiya* carece del orden expositivo de los *Elementos*, el papel de Aryabhata en la matemática India recuerda al de Euclides en la griega, porque de los escritos de los matemáticos anteriores solo han sobrevivido pequeños fragmentos.

El método de inversión para resolver ecuaciones algebraicas

En el *Aryabhatiya* aparecen algunas ecuaciones algebraicas resueltas por el método de inversión, que consiste en partir del resultado e ir haciendo las operaciones inversas en sentido contrario a como se dan en el enunciado. Una de ellas es la siguiente:

Se multiplica un número por 3, al producto se le suman sus tres cuartas partes, la suma se divide por 7, del cociente se resta su tercera parte, la diferencia se multiplica por sí misma, al cuadrado se le resta 52, de la diferencia se extrae la raíz cuadrada, a la cual se la suma 8, dicha suma se divide por 10 y el resultado es finalmente 2. ¿Cuál es ese número?

Entonces se procede de la siguiente manera: Si la última operación antes de llegar a 2 es dividir por 10, multiplicamos 2 por 10: 2 x 10 = 20. La penúltima operación consistió en sumar 8, entonces restamos 8: 20 - 8 = 12. La antepenúltima consistió en una raíz cuadrada, luego calculamos el cuadrado de lo que tenemos: 12^2 = 144. Antes de hacer la raíz se restó 52, que es lo que se ha de sumar ahora: 144 + 52 = 196. Antes de restar 52 se hizo un cuadrado, entonces se ha de hacer ahora una raíz cuadrada: $\sqrt{196} = 14$. Previamente a la raíz, se había sustraído de una cantidad su tercera parte, lo cual equivale a multiplicarla por dos tercios, entonces multiplicamos por tres medios: 14 x (3/2) = 21. La cantidad multiplicada por tres medios era el resultado de dividir algo entre 7, por consiguiente se ha de multiplicar el último resultado por 7: 21 x 7 = 147. Lo que se había dividido entre 7 es el triple del número buscado al cual se le había sumado sus tres cuartas partes, lo cual equivale a multiplicar por siete cuartos, entonces hay que multiplicar ahora por cuatro séptimos y dividir por 3: (147 x (4/7)) / 3 = 28.

El método de pulverización para resolver ecuaciones diofánticas

Los matemáticos hindúes resolvieron las ecuaciones diofánticas lineales según un procedimiento llamado *kuttaka*, palabra sánscrita que se podría traducir por *pulverización*. Vamos a describir el método a través del siguiente ejemplo:

$29x + 4 = 8y$

Dividimos el coeficiente mayor entre el menor: 29 = 8 x 3 + 5, y hacemos el cambio $y = 3x + u$, lo que da lugar a una nueva ecuación $5x + 4 = 8u$.

Volvemos a dividir el coeficiente mayor entre el menor: 8 = 5 x 1 + 3, y hacemos $x = u + v$, y tenemos una tercera ecuación $5v + 4 = 3u$.

La tercera división es 5 = 3 x 1 + 2, hacemos $u = v + w$, y tenemos una cuarta ecuación $2v + 4 = 3w$.

La cuarta división es 3 = 2 x 1 + 1. Hacemos $v = w + t$, y tenemos una quinta ecuación $2t + 4 = w$.

El coeficiente de una de las incógnitas es 1, entonces damos la otra un cierto valor y hacemos el camino inverso: si $t = 0$, entonces $w = 4$, $v = 4$, $u = 8$, $x = 12$ e $y = 44$. Si se necesita la solución más pequeña posible, se divide 12 por 8 (el coeficiente de la y) y 44 por 29 (el coeficiente de la x), divisiones que dan lugar a los restos 4 y 15. Estos restos son la solución buscada. En cuanto tenemos una solución particular, es fácil comprobar que las demás proceden de la siguiente fórmula:

$x = 4 + 8m$

$y = 15 + 29m$

Sobre progresiones aritméticas

Una *progresión aritmética* es una sucesión de números cada uno de los cuales se deduce del anterior sumándole un numero fijo d llamado *diferencia* de la progresión. Entonces, si $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ es una progresión, $a_2 = a_1 + d$, y en general $a_p = a_1 + (p-1)d$.

Aryabhata tiene algunas consideraciones sobre progresiones aritméticas. En primer lugar, explica cómo sumar *m* términos consecutivos, multiplicando el número de sumandos por el término central (dando así por sentado que el número de sumandos es impar), y para calcularlo proporciona la siguiente regla:

El número de términos menos uno se divide por dos, se suma el número de términos que preceden, se multiplica el resultado por la diferencia, y al producto se le suma el primer *elemento de la progresión.*

Si los términos a sumar son a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_{p+m}, el "número de términos que preceden" es p, el elemento central se calcula como sigue:

$$\frac{a_{p+1}+a_{p+m}}{2}=\frac{a_1+pd+a_1+(p+m-1)d}{2}=a_1+\left(\frac{m-1}{2}+p\right)d$$

También explica como calcular el número total de términos cuando se conoce el primero, la suma de todos ellos y la diferencia de la progresión:

Multiplica la suma por ocho veces la diferencia, suma el cuadrado de la distancia entre el doble del primer miembro y la diferencia, haz la raíz cuadrada, resta dos veces el primer término, divide el resultado por la diferencia, suma uno y divide por dos.

En efecto, por lo que se ha visto antes, la suma de todos los elementos de la progresión es (porque ahora $m = n$ y $p = 0$):

$$n\left(a_1+\frac{n-1}{2}d\right)=S$$

El número n es solución de la ecuación cuadrática:

$$dn^2 + (2a_1 - d)n - 2S = 0$$

Resolviéndola, tenemos la regla de Aryabhata:

$$n = \frac{\sqrt{8dS + (2a_1 - d)^2} - 2a + d}{2d} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{8dS + (2a_1 - d)^2} - 2a}{d} + 1 \right)$$

La trigonometría del *Aryabhatiya*

La trigonometría griega trabajaba con las cuerdas de los arcos. La idea del seno, la semicuerda del ángulo doble, es de origen hindú. En el *Aryabhatiya* se da una tabla de los senos de 24 ángulos, cada uno de los cuales excede al anterior en (3 + 3/4)º. Pero no se utilizaba, como se hace hoy, una circunferencia de radio uno, de manera que su concepto de seno no es idéntico al nuestro, de manera que si *R* es el radio de la circunferencia, el seno hindú de un ángulo es el seno actual multiplicado por *R*.

Aryabhata toma como unidad de longitud el minuto de arco. Como da al número el valor de 3.1416, el radio es:

$$R = \frac{longitud\ de\ la\ circunferencia}{2\pi} = \frac{21600}{6.2832} = 3437.73\ldots \cong 3438$$

La longitud del radio es aproximadamente 3438 veces la del arco de un minuto. Como valor del seno del ángulo más pequeño de su tabla toma 225, la longitud del arco. El error cometido es insignificante:

$$Seno\ hind\acute{u}\ de\left(3+\frac{3}{4}\right)^{\circ} = 3438\,sen\left(3+\frac{3}{4}\right)^{\circ} = 3438 \times 0.0654031 = 224.85596$$

Para el cálculo de los demás senos, se sirve de la siguiente fórmula (en la cual α = (3 + 3/4)º):

$$Sen(n+1)\alpha = 2sen\,n\alpha - sen(n-1)\alpha - \frac{sen\,n\alpha}{Rsen\,\alpha}$$

De este modo:

$$Sen\left(7+\frac{1}{2}\right)^{\circ} = 2sen\left(3+\frac{3}{4}\right)^{\circ} - \frac{1}{3438} = 2\times 0.065450 - 0.000287 = 0.13060$$

$$Seno\ hind\acute{u}\ de\left(7+\frac{1}{2}\right)^{\circ} = 3438\times 0.13060 = 449$$

Y así va completando su tabla.

Bibliografía

- DICKSON, L. E. (1971), *History of de theory of numbers*, Chelsea Publishing company, New York.
- GERICKE, H. (1984), *Mathematik in Antike Orient*, Springer-Verlag, Berlín.
- GHEVERGHESE, G. (1996), *La cresta del pavo real*, Ediciones Pirámide, Madrid.
- MORENO, R. (2011), *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskara, tres matemáticos de la India*, Editorial Nivola, Madrid.
- ORE, O. (1988), *Number Theory and its History*, Dover Publications, New York.
- VAN DER WAERDEN, B. L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations,* Springer-Verlag, Berlín.