(1ª Parte)

En la enseñanza y aprendizaje de la Geometría, es (o debería ser) esencial la experimentación con figuras o situaciones geométricas, el análisis de propiedades, la exploración y la formulación de conjeturas, su comprobación o su rechazo por falta de validez, la generalización a situaciones análogas, etc.

Para una actividad de ese tipo, los programas de geometría dinámica son una herramienta valiosa no sólo porque permiten construir figuras geométricas con rapidez y precisión sino, sobre todo, porque la misma construcción puede permitir, con sólo un arrastre de ratón, el estudio o la exploración de innumerables ejemplos.

Esta cualidad permitirá que las experiencias puedan conducir a investigaciones mucho más profundas y ricas que las alcanzables sólo con lápiz y papel.

Con el siguiente ejemplo, extraído de los “Principios y Estándares para la Educación matemática” del NCTM, pretendemos ilustrar todo lo anterior y reflejar cómo un hipotético grupo de estudiantes podría investigar conjeturas en un entorno de geometría dinámica.

Se pide a nuestros alumnos que dibujen un triángulo, que construyan otro uniendo los puntos medios de sus lados y que determinen la razón entre las áreas de los dos triángulos, justificando sus conclusiones.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Una figura como la anterior, que ellos mismos pueden construir sin dificultad con cualquier programa de GD permitirá observar que la razón entre las dos áreas permanece constante (e igual a 0,25) para tantos ejemplos de triángulos como quieran, con sólo deslizar los vértices a cualquier otra posición.

A la hora de justificar o argumentar la causa de este resultado, habrá quienes aludan a lo que "ya se ve": que el triángulo grande contiene cuatro triángulos pequeños congruentes (iguales dirán ellos) entre sí.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Es de esperar que muchos de nuestros estudiantes recurran a la base y la altura de uno y otro triángulo: si las del pequeño son la mitad que las del original, al calcular "base por altura dividido por dos" al área saldrá, lógicamente, la cuarta parte.

Otra posible argumentación se puede apoyar en el concepto de semejanza entre los triángulos: las longitudes de los tres lados del triángulo interior son la mitad de las de sus correspondientes en el triángulo inicial. Así pues, se tratará de figuras semejantes con razón de semejanza igual a 1/2. Por consiguiente, las razones entre las áreas será (como quizás se haya explicado en clase anteriormente) el cuadrado de 1/2, o sea 1/4.

Por otro lado, la situación se presta a buscar posibles generalizaciones: ¿qué ocurrirá si planteamos algo análogo con cuadriláteros?

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

De nuevo, la construcción de la figura interactiva anterior no tiene ninguna dificultad y permite observar y analizar múltiples ejemplos de cuadriláteros en poco tiempo.

En esta ocasión se puede comprobar que la razón entre las áreas del nuevo cuadrilátero "de los puntos medios" y del original es de nuevo constante (incluso para cuadriláteros cóncavos), pero tiene otro valor: 0,5 .

La justificación de ese resultado puede ser más complicada de encontrar para los chavales. Una posibilidad es la de dividir el cuadrilátero en dos triángulos y éstos en nuevos triángulos "de puntos medios", como puede observarse en la figura.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

A partir de esa descomposición se pueden encontrar pares de triángulos iguales que justificarán el resultado anterior, al menos en el caso de los cuadriláteros convexos.

Si se compara la situación de los cuadriláteros con la anterior de los triángulos, comprobaremos que la relación de semejanza ha desaparecido. A cambio, se pueden observar y de nuevo intentar justificar nuevas propiedades: ¿Qué tienen de particular o qué tienen en común todos los polígonos obtenidos a partir de los puntos medios de un cuadrilátero?

Puedes ver muchos de ellos en la siguiente figura interactiva:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Efectivamente: son paralelogramos (los llamados paralelogramos de Varignon)… ¿siempre o sólo cuando el cuadrilátero es convexo? Y ¿por qué?

De nuevo cada diagonal del cuadrilátero inicial puede servirnos, junto con el Teorema de Thales (o su recíproco) -por no decir la simple observación de, nuevamente, tantos ejemplos como se deseen- para justificar que cada par de lados del cuadrilátero interior es paralelo a la misma diagonal, luego se trata de dos pares de lados opuestos paralelos entre sí.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Y ¿cómo ha de ser el cuadrilátero para que su correspondiente paralelogramo de Varignon sea un rectángulo?

Compruébalo sobre la figura interactiva (y luego justifica el motivo):

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

A propósito del paralelogramo de Varignon se podrían plantear otras cuestiones quizás de mayor dificultad que lo expuesto hasta ahora. Lo dejamos para la segunda parte de este artículo y volvemos al problema inicial:

Resulta que tanto con los triángulos como con los cuadriláteros, existe una razón constante entre las áreas del polígono obtenido por el "método de los puntos medios" y del original. ¿Habremos descubierto una propiedad de todos los polígonos?

El siguiente paso natural será comprobar qué ocurre con los pentágonos. Una nueva figura interactiva nos lo permitirá:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

En los primeros ejemplos observados parece que la razón también en esta ocasión vaya a permanecer invariante. Quizás sea tras intentar infructuosamente encontrar la justificación cuando se observen más ejemplos hasta comprobar que no era así y que la razón no es constante.

Puede que ello suponga una pequeña decepción para los alumnos que esperaban que lo "descubierto" en los triángulos y cuadriláteros fuera una ley general.

Pero también puede tratarse de un interesante final, desde el punto de vista didáctico, para ilustrar la idea de que en la actividad matemática, tras la formulación de conjeturas, se trata tanto de justificar o intentar demostrar las que son válidas como de ir descartando las que resultan no serlo.

(2ª Parte)

EL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUADRILÁTERO

Olvidemos en esta segunda parte el “problema de los puntos medios” para abordar otro diferente relacionado con el paralelogramo de Varignon: Mirado desde el punto de vista de la Geometría analítica, es decir, pensando en las coordenadas de todos los puntos que intervienen en la figura, y como consecuencia de que el punto medio de cada lado se obtiene como “media aritmética” de sus extremos, el centro del paralelogramo, o sea el punto de corte de las diagonales, ha de tener como coordenadas las respectivas medias aritméticas de las coordenadas de los cuatro vértices del cuadrilátero inicial.

Un programa como GeoGebra, con el que se han construido todas las figuras interactivas de este artículo, permite comprobar cómodamente lo anterior, pues opera directamente con las coordenadas de los puntos y “nos entenderá” si tecleamos en su campo de Entradas una expresión como la siguiente: (A+B+C+D)/4 , donde A, B, C y D son los nombres de los cuatro vértices del cuadrilátero y visualizaré el punto “media aritmética” de los mismos.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Algo análogo a lo que ocurre en un cuadrilátero con las coordenadas del “centro de Varignon” ocurre en un triángulo con las de su baricentro, cuya mayor singularidad radica en que es el “centro de gravedad” del mismo.

Esto es, si recortamos una plancha de material rígido y uniforme de forma triangular, su baricentro sería el centro de masas o punto de sustentación (donde habría de ser apoyado para mantenerse en equilibrio sobre una punta).

¿Se podrá entonces deducir que el centro de gravedad de un cuadrilátero cualquiera está situado en el centro de su paralelogramo de Varignon?

Una vez más el punto de partida de la investigación puede ser la disección del cuadrilátero en dos triángulos mediante una diagonal: Mirado desde el punto de vista físico, cada uno de los triángulos podría ser sustituido por su masa concentrada en el baricentro y eso llevaría a concluir que el centro de masas del cuadrilátero habría de estar situado sobre el segmento determinado por los baricentros de los dos triángulos.

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

¿Pertenecerá el centro de Varignon a ese segmento? Comprobémoslo de nuevo en una figura de GD:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

La respuesta es que no necesariamente. Una nueva pregunta a lanzar podría ser ¿para qué tipos de cuadriláteros sí ocurre?

Descartado pues el centro del paralelogramo de Varignon, insistiremos en la búsqueda del centro de gravedad del cuadrilátero: ¿y si repetimos la disección con la otra diagonal?

De ese modo obtendremos un segundo segmento que ha de pasar por el punto buscado.

De modo que, si nuestro razonamiento es válido, el centro de masas de un cuadrilátero ¿cualquiera? será el punto de intersección del par de segmentos determinados por los baricentros de los triángulos en que cada diagonal divide al mismo:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

¿Será útil este método para cualquier tipo de cuadrilátero? ¿Qué ocurre con las diagonales de un cuadrilátero cóncavo?

Leemos en las “Vitaminas matemáticas” de Claudi Alsina un método diferente para encontrar el centro de masas de un cuadrilátero convexo: se puede determinar como el centro de un pariente cercano al paralelogramo de Varignon: se trata del paralelogramo de Wittenbauer que se obtiene a partir, no de los puntos medios de los lados, sino de los puntos que los trisecan:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

¿Coincidirá ese centro de Wittenbauer con el de obtenido por el método de los baricentros? Una vez más, la anterior o la siguiente figura interactiva permite comprobarlo para muchos ejemplos diferentes de cuadriláteros, con sólo deslizar los vértices:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

La misma figura puede ser útil para indagar una nueva pregunta: ¿en qué cuadriláteros coinciden los centros de los paralelogramos de Varignon y de Wittenbauer?

Vamos con una última conjetura y su comprobación:

Justificábamos en un párrafo anterior que, tras la división del cuadrilátero inicial, mediante una diagonal, en dos triángulos, se podrán considerar las masas de cada triángulo en su respectivo baricentro.

Podría añadirse que esas dos masas serían proporcionales a las áreas de sus respectivos triángulos y de ello se deduciría que el centro de gravedad se ha de situar en el segmento determinado por los baricentros a distancias de éstos también proporcionales a esas áreas.

Naturalmente también se le puede pedir a GeoGebra que nos mida longitudes y áreas. Hagámoslo y comprobemos esa proporcionalidad:

Pulsa sobre la imagen para interactuar con ella

Con la anterior damos por finalizada esta serie de propuestas para el trabajo en el aula con las que pretendíamos poner énfasis en la potencialidad de los programas de Geometría dinámica para el trabajo ante situaciones geométricas y particularmente para la formulación de conjeturas y su comprobación. Imaginemos las mismas propuestas para ser desarrolladas con los recursos convencionales, lápiz y papel o tiza y pizarra. Parece evidente que el alcance y la riqueza de la experiencia así como la profundidad de la investigación se verían muy mermados.

A propósito de investigaciones: dejamos abierta para un próximo artículo de esta sección de Divulgamat una de las cuestiones que no hemos resuelto: ¿cómo ha de ser una familia de polígonos para que la razón entre las áreas de cada polígono y el generado a partir de sus puntos medios permanezca constante?