Teorema de los cuatro colores

Poemilla de J.A. Lendon, Surrey, Inglaterra:

"Cuatro colores usan los matemáticos de emblema,
ansiosamente regiones colocando
deseando obtener el teorema
donde siguen sin remedio fracasando."

Entre todas las grandes conjeturas todavía no demostradas de las matemáticas, la más sencilla (sencilla en el sentido de que hasta un niño pequeño puede comprenderla) es la del famoso teorema topológico de los cuatro colores: ¿Cuántos colores son necesarios para iluminar un mapa arbitrario, de modo que nunca dos regiones colindantes sean del mismo color? La imposibilidad de trazar cinco regiones planas, de manera que cada par de ellas tenga frontera común, fue enunciada por Moebius en una conferencia que dio en 1840, donde la presentó en forma de cuento acerca de un príncipe oriental que legó su reino a sus cinco hijos con la condición de que fuera dividido en cinco regiones, cada una de ellas fronteriza con las otras cuatro. Este problema es equivalente al siguiente de la teoría de gráficos: ¿Es posible disponer cinco puntos sobre el plano de manera que sea posible unir cada uno con los otros cuatro mediante líneas rectas que no se corten? En cualquier libro de teoría de grafos puede verse la demostración de esta imposibilidad. Se podría creer que el teorema de los cuatro colores (para iluminar un mapa arbitrario, de modo que nunca dos regiones colindantes sean del mismo color, es siempre suficiente con cuatro colores) sería consecuencia inmediata de éste, pero tal conjetura es errónea. Es fácil hacer mapas que exigen cuatro colores; y basta un conocimiento elemental de las matemáticas para poder entender la demostración de que cinco colores son siempre suficientes. ¿Pero son los cuatro colores necesarios y suficientes? Para expresarlo de otro modo, ¿es posible hacer un mapa que exija utilizar cinco colores?

Contra lo que se ha dicho frecuentemente, no fueron los cartógrafos los primeros en observar que tan sólo son precisos cuatro colores para iluminar un mapa. Al parecer, el primero en enunciarlo explícitamente fue Francis Guthrie, un estudiante de Edimburgo quien se lo mencionó a su hermano Frederick, que más tarde sería químico. Éste, a su vez, se lo comunicó en 1852 a su profesor de matemáticas, Augustus de Morgan. La conjetura se hizo célebre después de que el gran Arthur Cayley admitiera, en 1878, que había estado trabajando infructuosamente en esta cuestión. En 1879, el jurista y matemático inglés Sir Alfred Kempe publicó la que él creía ser una demostración. Un año más tarde hacía aparecer en la revista Nature un artículo con el título «Cómo iluminar un mapa con cuatro colores». Durante una decena de años, los matemáticos creyeron el problema resuelto, hasta que P. J. Heawood localizó un error fatal en la demostración de Kempe. Desde entonces, las mejores mentes matemáticas del mundo han estado bregando inútilmente con el problema. Lo que hace el problema tan atrayente y fascinador es que parece que demostrarlo haya de ser tarea fácil. En su obra autobiográfica titulada "Ex-Prodigy", Norbert Wiener escribe que, como todos los matemáticos, intentó demostrar el teorema de los cuatro colores, con el único resultado de ver todas sus demostraciones fundirse como el oro en la mano del pródigo.

El estado actual del problema es que se ha establecido su validez para todos los mapas que no tengan más de 38 regiones. Puede pensarse que se trata de un exiguo resultado, pero éste parece algo menos trivial cuando se sabe que hay más de 10^{38} mapas topológicamente distintos que tengan treinta y ocho o menos regiones. Ni siquiera una moderna computadora electrónica podría examinar todas estas configuraciones en un tiempo razonable. El hecho de que hasta el momento se carezca de demostración para el teorema resulta todavía más exasperante si se tiene en cuenta que se han podido demostrar teoremas análogos para superficies mucho mas complejas que el plano. (La esfera es en lo que a este problema se refiere equivalente al plano, pues cualquier mapa sobre la esfera se puede transformar en un mapa plano pinchando el mapa por el interior de una región y proyectando la figura que resulta sobre una superficie plana.) Para las superficies de una sola cara como la banda de Moebius, la botella de Klein y el plano proyectivo, se ha podido demostrar que seis son los colores necesarios y suficientes. Este número es de siete para la superficie del toro. De hecho, el problema de iluminar un mapa ha sido resuelto para todas las superficies de orden superior que han sido estudiadas seriamente. Solamente cuando se quiere aplicar el teorema a superficies topológicamente equivalentes al plano o a la superficie esférica, continúa el problema desafiando a los topólogos; y lo que es peor, sin que aparentemente haya ninguna razón para ello. Hay algo de diabólico en el modo en que todos los intentos de demostración van progresando para, a última hora, cuando está a punto de completarse la cadena deductiva, mostrar una laguna irreparable. Nadie puede predecir lo que el porvenir reserva a este famoso problema, pero es seguro que alcanzará renombre universal quien sea capaz de alcanzar alguno de estos tres posibles resultados:

1. Descubrir un mapa que forzosamente necesite cinco colores. En su excelente artículo «El problema del mapa de cuatro colores, 1840-1870» H. S. M. Coxeter escribe: «Si hubiera de atreverme a formular una conjetura, diría que posiblemente existan mapas que exigen el empleo de cinco colores, pero que incluso el más sencillo de ellos tendrá tantas regiones, centenares de miles, posiblemente, que nadie enfrentándose a él, tendría el tiempo ni la paciencia para hacer todas las comprobaciones que serían necesarias para excluir la posibilidad de poderlo colorear con cuatro tintas.»

2. Descubrir una demostración del teorema, verosímilmente mediante alguna técnica nueva que quizá permitiera al mismo tiempo abrir algunas de las puertas más sólidamente ancladas en diversas partes de las matemáticas.

3. Demostrar que es imposible demostrar el teorema. Esto quizá suene extrañamente, pero en 1931, Kurt Godel estableció que en cada sistema deductivo lo bastante complejo como para incluir en si toda la aritmética, existen teoremas matemáticos que son «indecidibles» en ese sistema. Hasta el momento, sólo para muy pocas de las grandes conjeturas todavía no resueltas de las matemáticas se ha podido establecer su indecidibilidad en este sentido. ¿Es una de ellas el teorema de los cuatro colores? Si así fuera, la única manera de que pudiéramos considerarlo como «verdadero» seria adoptarlos bien a él mismo, bien a otro teorema indecidible que le esté íntimamente ligado, como postulado nuevo e indemostrable de un sistema deductivo más amplio.

Javier de Lucas (http://platea.pntic.mec.es/~jdelucas/anecmate.htm)