

La sucesión de Thue-Morse

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 19 de Febrero de 2013 16:00



El matemático noruego [Axel Thue](#) nació un 19 de febrero, así que hoy es un buen día para hablar de la conocida como [sucesión de Thue-Morse](#) que ha aparecido en contextos matemáticos tan diferentes como la teoría de los números –

[Eugène Prouhet](#)

–, la combinatoria –Alex Thue–, la geometría diferencial –

[Marston Morse](#)

– o el ajedrez –

[Max Euwe](#)

–.

Se trata de una sucesión binaria que tiene la siguiente propiedad: ninguna secuencia finita de números se repite tres veces en la sucesión. Es decir, no hay nunca tres '0' o tres '1' seguidos, ni tres '00', tres '01' o tres '10' consecutivos, ni tres '100', tres '101', tres '110', tres '111', tres '000', tres '001', tres '010' o tres '011' seguidos, etc.

Se define de manera muy sencilla: si $u(k)$ denota el k -ésimo término de la sucesión, entonces

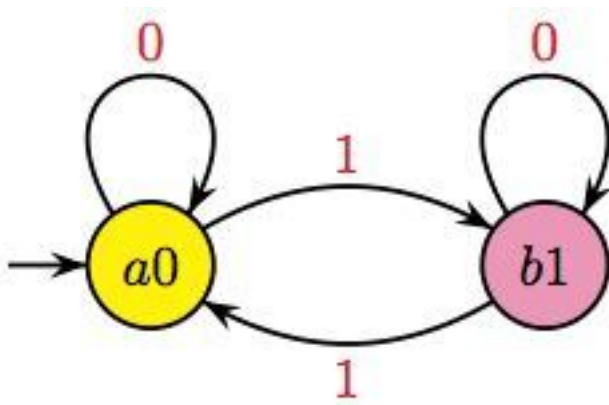
La sucesión de Thue-Morse

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 19 de Febrero de 2013 16:00

$u(0)=0$, $u(2n)=u(n)$ y $u(2n+1)=1-u(n)$.

Empieza así: 01101001100101101001011001101001...

Otra forma recurrente de definirla es la siguiente: si $a(n)$ denota los 2^n primeros términos de la sucesión, entonces $a(0)=0$ y $a(n+1)=a(n)b(n)$, donde $b(n)$ se obtiene a partir de $a(n)$ al intercambiar los 0's y los 1's.



Autómata de Thue-Morse

Además $u(k)$ es la suma, módulo 2, de las cifras en el desarrollo binario de k . Por ejemplo, $(18)_2 = 10010$ y por lo tanto $u(18)=0$. Este cálculo se realiza por medio del [autómata de Thue-Morse](#)

: partiendo del estado inicial, se siguen las transiciones indicadas por los bits del desarrollo binario. Dependiendo del color del estado de llegada, el término de la sucesión es 0 ó 1. Por ejemplo, para el 18, se obtiene:

La sucesión de Thue-Morse

Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 19 de Febrero de 2013 16:00

$$a0 \xrightarrow{1} b1 \xrightarrow{0} b1 \xrightarrow{0} b1 \xrightarrow{1} a0 \xrightarrow{0} a0$$

y entonces el valor es 0.

PD: Esta entrada participa en la [edición 4.1](#) del [Carnaval de Matemáticas](#) cuyo blog anfitrión es [Eliatron Dixit](#)

[Tito](#)

Artículo publicado en el blog de la Facultad de Ciencia y Tecnología (ZTF-FCT) de la Universidad del País Vasco ztfnews.wordpress.com