Escrito por Marta Macho Stadler
Martes 13 de Noviembre de 2012 23:00

En el blog The Dude Minds… recuerdan una demostración de la irracionalidad de √***2***, también por reducción al absurdo, como la clásica prueba que solemos enseñar en el aula.

Supongamos que √***2*** es racional y que se escribe como

con ***m*** y ***n*** coprimos (es decir, la fracción es reducida), entonces se cumple también que

y aquí está la contradicción: se trata de una fracción con términos menores a la primera.

Esto se merece una explicación un poco más minuciosa. ¿Seguro que la segunda fracción es igual a la primera? ¿Seguro que el denominador de la segunda es positivo y menor que el denominador de la primera ***n***? Vamos a verlo. Como

Y como ***n*** es positivo, multiplicando por ***n***

n < m < 2n,

y restando ***n***

$0 < m - n < n.$

Así, el denominador de la segunda fracción es positivo y menor que el de la primera fracción.

Partiendo de

de manera equivalente se tiene que

Observar que como m y n son coprimos, n es el menor entero que hace que el miembro de la izquierda sea entero. Elevando al cuadrado

$2 n^2 = m^2$

y restando nm de cada lado de la igualdad

$2 n^2 - mn = m^2 - mn.$

Observar que como $n < m < 2n$, es $mn < m^2$, luego ambos lados de la anterior igualdad son positivos. Sacando factor común, queda

$n(2n-m) = m(m-n)$,

y entonces se obtiene el resultado buscado

y la contradicción.

En el artículo [David M. Bloom, *A One-Sentence Proof That √2 Is Irrational*, Mathematics Magazine 68 (1995), no. 4, 286] el autor menciona que Ivan Niven hizo una demostración un poco diferente en 1985. También comenta que este argumento puede modificarse para tratar la irracionalidad de cualquier $\sqrt{k}$ donde k no es un cuadrado perfecto.

Nota: Esta entrada está traducida de *Plus d'une preuve dans son sac…* del blog The Dude Minds…

Artículo publicado en el blog de la Facultad de Ciencia y Tecnología (ZTF-FCT) de la Universidad del País Vasco ztfnews.wordpress.com