
HISTORIA

Sección a cargo de

Luis Español González

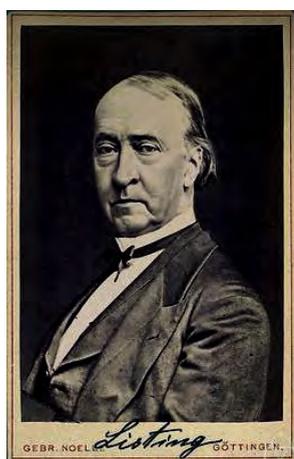
J. B. Listing y el primer libro de Topología

por

Carlos Gómez Bermúdez

1. EL PERSONAJE

J. B. Listing (1808–1882) nació en Frankfurt, de familia con pocos medios. Fue siempre brillante y polifacético. Ya a los trece años ayudaba a la economía familiar con trabajos de dibujo y caligrafía. Recibió ayuda de la Fundación Städel, mecenas de arte. Quiso estudiar Matemáticas en Göttingen, pero Städel solo pagaba arte, por lo que se matriculó en Arquitectura y Matemáticas, pero además estudiaba Astronomía, Anatomía, Fisiología, Botánica, Geología y Química.



J. B. Listing y su libro «Vorstudien zur Topologie».



C. F. Gauss y A. F. Möbius.

Alumno de Gauss, este pronto apreció su talento y capacidad de trabajo, invitándole a formar parte de su círculo de amigos, entre los que estaban Weber y el geólogo Walterhausen, con el que Listing, después de doctorarse con el trabajo *De superficiebus secundi ordinis*, haría una expedición de más de dos años para estudiar el Etna, viaje que aprovechó para hacer, además, estudios de magnetismo terrestre, tema que trabajaba con Gauss, con el que también se ocupaba de «Topología».

Cuando Weber perdió su cátedra en Göttingen por motivos políticos, Listing ocupó su plaza, convirtiéndose así en profesor de aquella Universidad, por la que en esos años pasaron Gauss, Dirichlet, Riemann, Weber, Dedekind, Cantor, Frege y, más tarde, Klein o Hilbert entre otros. Listing generalizó la característica de Euler en poliedros [5]. Además del término «Geoide», le debemos el de «Topología», que consta por primera vez en 1836, en una carta a Müller, su antiguo profesor de Instituto, once años antes del libro objeto de este artículo. Descubrió antes que Möbius, e independientemente de este, las propiedades de la famosa banda. También un método de determinación de glucosa en la orina de diabéticos.

2. JUSTIFICACIÓN DE LA TOPOLOGÍA Y DE SU NOMBRE

El «libro» que comentamos, *Vorstudien zur Topologie* [4], es breve, un poco al estilo de los dos de Dedekind sobre continuidad, irracionales, y números. En él, Listing comienza por distinguir dos puntos de vista respecto a la consideración de las estructuras espaciales: cantidad y modalidad. Tras argumentar que la Geometría, hasta entonces, solo contemplaba el primero de ellos (de hecho su nombre apela al concepto de medida), de entre los escasos ejemplos de tratamiento modal o aproximado cita algunos, como el problema del salto de caballo en ajedrez o trabajos de Vandermonde sobre problemas de posición.¹ Y encuentra la primera idea de un *tratamiento científico de la parte modal de la Geometría* en una carta de Leibniz en 1679, en la que este dice a Huygens:

... pero después de todos los progresos que he hecho en estas materias, todavía no estoy contento con el Álgebra, en el sentido de que no da ni las

¹ *Histoire et Mémoires de l'Acad. roy. des sciences*, 1771, 566-574 + 5 figuras.

*vías más cortas, ni las construcciones más bellas de la Geometría. Es por ello que, cuando se trata de esto, creo que aún necesitamos otro análisis propiamente geométrico o lineal que nos exprese directamente **situm**, como el Álgebra expresa **magnitudinem**. Y yo creo ver en ello el medio, y que se podrían representar figuras, e incluso máquinas y movimientos, con caracteres, como el Álgebra representa números o magnitudes.*

Luego de apelar a Gauss, *En bastantes ocasiones, por el más grande géometra de la actualidad, se ha llamado la atención acerca de la importancia del tema, Listing nos propone:*

*Permítaseme utilizar para esta clase de estudios de configuraciones espaciales el nombre de «Topología», en vez de la denominación «Geometría situs», propuesta por Leibniz, que alude al concepto de medida, que aquí es enteramente secundario, y que colisiona con el de «Geometría de posición», que ya se ha hecho común para otra clase de consideraciones Geométricas. Por **Topología** se entenderá, pues, la teoría de las relaciones modales de las estructuras espaciales, o de las leyes de conexión de las posiciones recíprocas, y de las sucesiones de puntos, líneas, superficies, cuerpos y sus partes, o de sus agregados en el espacio, excluidas las relaciones de medida y magnitudes.*

Listing divide su trabajo en tres partes: posición, hélice y nudos o mallas. Obviamente, no aparecen ni la definición de espacio topológico, ni la topología conjuntista, que ha de esperar a Cantor, quien establecerá las ideas de conjunto, derivado, etc.

3. DE LA POSICIÓN

Comienzo con una de las consideraciones preliminares más sencillas, análoga a la teoría combinatoria, que se basa en el esquema de espacio de tres dimensiones. Todo objeto espacial puede dotarse de tres líneas ortogonales que se cortan en su interior, de acuerdo con las cuales distinguimos unas de otras sus dimensiones y caras.

Listing denota direcciones y sentido tal como se aprecia en la figura 1, que incluye el 0 como punto de corte de los tres ejes. Esta posición concreta la designará como *posición primaria positiva*. Dados dos cuerpos A y B , denota la posición de B respecto de A con $\text{pos}(A)B$, más precisamente escribirá $\text{pos}(A)B = xyz$, siendo x, y, z tres números de $\{1, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ e indicando x, y, z la caras de B que están orientadas igual, respectivamente, que las caras 1, 2, 3 de A , como en el ejemplo de la figura 1.

A partir de aquí, podemos averiguar la cantidad de posiciones posibles de un cuerpo respecto a otro; cuando seleccionamos la primera posición tenemos 6 posibilidades, pero, elegida una, sea esta x , tenemos también elegida \bar{x} , por lo que para la segunda cara solo tenemos 4 posibilidades y, \bar{y}, z, \bar{z} . Elegida una, por ejemplo y , también tenemos elegida \bar{y} ; quedan así para la tercera cara 2 posibilidades, de manera

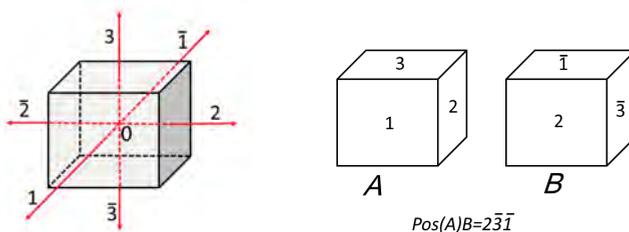


Figura 1: Notación de Listing para dirección y sentido.

que la cantidad total de posiciones posibles es $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48$; son las siguientes:

1 2 3	2 3 1	3 1 2	$\bar{3} \bar{2} \bar{1}$	$\bar{2} \bar{1} \bar{3}$	$\bar{1} \bar{3} \bar{2}$
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$	2 $\bar{3}$ $\bar{1}$	3 $\bar{1}$ $\bar{2}$	$\bar{3}$ 2 1	$\bar{2}$ 1 3	$\bar{1}$ 3 2
$\bar{1}$ 2 $\bar{3}$	$\bar{2}$ 3 $\bar{1}$	$\bar{3}$ 1 $\bar{2}$	3 $\bar{2}$ 1	2 $\bar{1}$ 3	1 $\bar{3}$ 2
$\bar{1}$ $\bar{2}$ 3	$\bar{2}$ $\bar{3}$ 1	$\bar{3}$ $\bar{1}$ 2	3 2 $\bar{1}$	2 1 $\bar{3}$	1 3 $\bar{2}$
$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	$\bar{2}$ $\bar{3}$ $\bar{1}$	$\bar{3}$ $\bar{1}$ $\bar{2}$	3 2 1	2 1 3	1 3 2
$\bar{1}$ 2 3	$\bar{2}$ 3 1	$\bar{3}$ 1 2	3 $\bar{2}$ $\bar{1}$	2 $\bar{1}$ $\bar{3}$	1 $\bar{3}$ $\bar{2}$
1 $\bar{2}$ 3	2 $\bar{3}$ 1	3 $\bar{1}$ 2	$\bar{3}$ 2 $\bar{1}$	$\bar{2}$ 1 $\bar{3}$	$\bar{1}$ 3 $\bar{2}$
1 2 $\bar{3}$	2 3 $\bar{1}$	3 1 $\bar{2}$	$\bar{3}$ $\bar{2}$ 1	$\bar{2}$ $\bar{1}$ 3	$\bar{1}$ $\bar{3}$ 2

Las posiciones se clasifican en: **crecientes** si el orden, sin signo, es 1, 2, 3, 1, 2, o **decrecientes** si el orden es 3, 2, 1, 3, 2. Y considerando el ser creciente como un signo positivo, y el ser decreciente como uno negativo, el signo de una posición sería **positivo** si hay una cantidad par de signos negativos, y **negativo** en otro caso.

Pero hay un elemento más a tener en cuenta, la orientación. Dice Listing:

*Imaginemos en el lugar del punto origen a un individuo humano,² con la coronilla dirigida hacia el punto 1 y la cara hacia el punto 2, entonces el punto 3 está o bien a la derecha o a la izquierda. Las orientaciones mutuas de los tres ejes de posición se llaman, en caso de que el eje 3 esté a la derecha, orientación de ejes **derecha**, y en caso de que el eje 3 esté a la izquierda, orientación de ejes **izquierda**; dos orientaciones de ejes derechas o dos izquierdas se llaman **homólogas**, una derecha y otra izquierda, **heterólogas**.*

Podríamos decir, considerando con conceptos actuales a 1, 2, 3, como vectores, que en el producto vectorial $1 \times 2 = \bar{3}$, la orientación es derecha y en $1 \times 2 = 3$ es izquierda. De esta manera, decidida una orientación, solo hay 24 posiciones posibles y no 48.

Dada $\text{pos}(A)B$, llama **inversa** a $\text{pos}(B)A$. ¿Cómo se calcula? Cada posición consta de tres «índices» (1° , 2° , 3°), el número que se coloca en cada uno de ellos es su «término». Para invertir intercambiamos términos e índices, conservando el

²N.T.: Listing escribió: *ein menschliches Individuum*. Como se verá más adelante, se preocupa por la taxonomía y la precisión de las denominaciones.

De acuerdo con lo anterior, para el primer término el recorrido es $\bar{2}, 2, 3, \bar{1}, \bar{2}, 3, 1, 1, \bar{3}, \bar{1}$; para el segundo $\bar{3}, 1, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, 1, 2, \bar{3}, \bar{1}, 2$, y análogamente para el tercero. Obviamente, $\text{pos}(A)B + \text{pos}(B)A = 1\ 2\ 3$. Así que solo la exigencia de consecutividad en la suma impide que quede definido un grupo aditivo. También podemos multiplicar una posición por un número entero:

$$6 \cdot (3\ \bar{1}\ 2) = 1\ 2\ 3 :$$

$$\begin{array}{r} 3\ \bar{1}\ 2 \\ \hline 1\ 2\ 3 \end{array}$$

Y, en el caso de posiciones recíprocas,

$$\text{pos}(A)B = \text{pos}(B)A \quad \Rightarrow \quad \text{pos}(A)B + \text{pos}(B)A = 2\ \text{pos}(A)B.$$

Luego de discutir lo que ocurre con las imágenes de espejos, planos o no, y de las lentes de varios tipos, simples o compuestas, de microscopios y telescopios, clasifica también las modificaciones de signo en una posición. Si se modifica el signo de dos dimensiones, por ejemplo mediante un giro de 180° , estamos ante una **inversión**, si modificamos el signo de solo una dimensión estamos ante una **perversión** y si se invierten los tres signos hay perversión e inversión; es decir:

1 2 3	la posición natural
1 $\bar{2}$ $\bar{3}$	} posiciones invertidas
$\bar{1}$ 2 $\bar{3}$	
$\bar{1}$ $\bar{2}$ 3	
$\bar{1}$ 2 3	} posiciones pervertidas
1 $\bar{2}$ 3	
1 2 $\bar{3}$	
$\bar{1}$ $\bar{2}$ $\bar{3}$	posición pervertida e invertida

A continuación, dice Listing:

Como ejemplo de posiciones consecutivas, todavía nos pueden servir las orientaciones de las imágenes reflejadas por tres espejos planos fijos, mutuamente perpendiculares. Si I, II, III, son los tres espejos y A el objeto, situado de modo que está frente a cada uno de los espejos, provisto de los tres ejes de posición, de manera que el 1 es paralelo a la normal al espejo I y de igual manera 2 y 3, respectivamente, a las normales levantadas sobre los espejos II y III. Entonces, las posiciones que las siete imágenes especulares y el objeto mantienen entre sí, son fáciles de determinar. Tres imágenes B, C, D, producidas por simple reflexión tras los espejos I, II, III, como explicita la figura que se adjunta [ver la

figura 2],³ están con respecto a **A** en las posiciones $\bar{1} 2 3, 1 \bar{2} 3, 1 2 \bar{3}$, además las imágenes **E**, **F**, **G**, producidas por doble reflexión tras **II** y **III**, **III** y **I**, **I** y **II** están en las posiciones $1 \bar{2} \bar{3}, \bar{1} 2 \bar{3}, \bar{1} \bar{2} 3$, y finalmente la imagen **H**, producida por triple reflexión, en la posición $\bar{1} \bar{2} \bar{3}$. Ahora se puede, partiendo de **A**, pasar hasta **H** mediante perversiones simples consecutivas, por seis caminos diferentes en los que la suma de las siete posiciones, siempre negativas, debe dar la posición primaria negativa, a saber:

(A)						
C	D	B	C	D	B	B
$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$
E	F	G	G	E	F	F
$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$
D	B	C	B	C	D	D
$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$
F	G	E	F	G	E	E
$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 \bar{2} 3$
B	C	D	D	B	C	C
$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$1 2 \bar{3}$
G	E	F	E	F	G	G
$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$\bar{1} 2 3$
H	H	H	H	H	H	H
$1 2 \bar{3}$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$\bar{1} 2 3$	$1 \bar{2} 3$	$1 2 \bar{3}$	$1 2 \bar{3}$
(A)H						
$\bar{1} \bar{2} \bar{3}$						

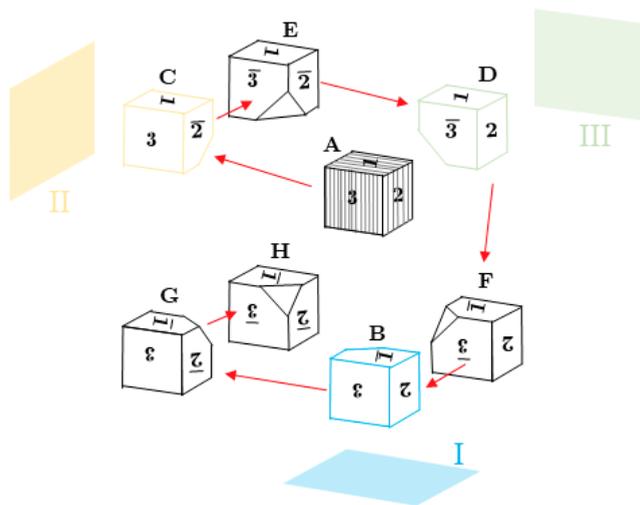


Figura 2: Imágenes reflejadas en tres espejos.

Tras abundar en consideraciones acerca de, por ejemplo, pasar de **A** a **H** por 24 caminos diferentes, mediante tres inversiones luego una perversión y de nuevo tres inversiones, o ver qué pasa si el objeto **A** se gira $1/8$ de vuelta en torno al eje 1, o la aplicación de lo anterior a un teodolito, Listing pasa al segundo de los temas.

³El dibujo de Listing no incluye espejos, colores, ni flechas, que indican uno de los caminos de **A** a **H**, mediante perversiones simples.

4. DE LA HÉLICE O ESPIRAL

La hélice⁴ o espiral es una línea doblemente curvada, que puede considerarse como un camino de un punto del espacio, que se mueve a la vez cíclica y progresivamente.

Por línea cíclica, línea anular o **anillo**, entendemos el contorno de toda figura plana arbitraria, supuesto que su línea de frontera nunca se atraviesa a sí misma ni presenta puntos múltiples.

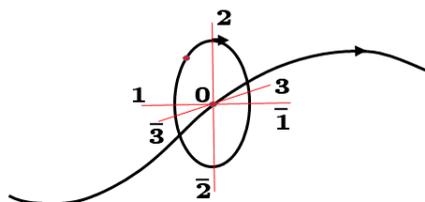


Figura 3: Anillo y directriz de la hélice.

Al anillo (figura 3) le asigna también tres ejes y un centro 0, que puede ser cualquier punto del interior del anillo, aunque elige el centro de gravedad. La línea descrita por 0 es la **directriz** o conductriz o trayectoria, a la que, en principio, solo le permite *variaciones continuas de dirección*, cosa que no ocurre con el anillo. Al movimiento en la dirección 3 le llama **progresivo**, y en la dirección $\bar{3}$ **regresivo**. La forma y tamaño del anillo no tienen por qué ser constantes durante el movimiento. Además:

*La superficie que se generará con tal movimiento de la línea anular, y que rodea a la línea conductriz, la denominamos una **askoide**.*

Obviamente, la línea generada en la askoide por el punto móvil del anillo, es la **hélice** o espiral, y utiliza la notación (1 2)3 para indicar:

La espiral que describe un punto, que se mueve cíclicamente en el sentido 1 2 y progresivamente en el sentido 3.

Define el helicoides como la superficie generada por una recta ilimitada que une el punto 0 con el punto móvil del anillo.

Da mucha importancia a la orientación del giro y observa que invirtiendo los dos movimientos, no se genera diferencia topológica:

... por ejemplo, los caminos ocasionados con (1 2)3 y con (1 $\bar{2}$) $\bar{3}$ pueden considerarse como topológicamente equivalentes. Pero, de la inversión del sentido de solo uno de los dos movimientos asociados, o lo que es igual, del intercambio de las orientaciones derecha e izquierda de los ejes, al establecer los puntos 1 y 2 en el contorno del anillo, manteniendo la misma simbología, se origina una diferencia topológica esencial.

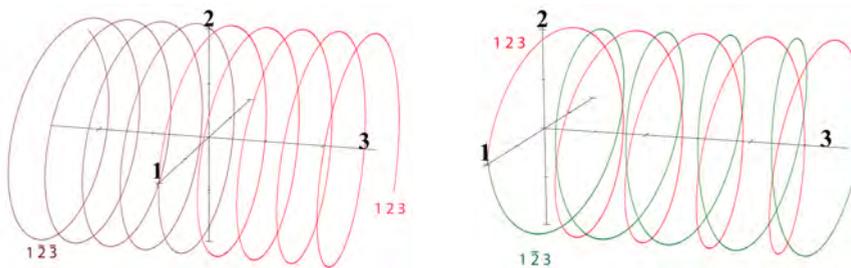


Figura 4: Caminos con diferentes generaciones.

Esto puede verse en el camino de la izquierda en la figura 4: $(1 \bar{2}) \bar{3}$ va hacia la izquierda del dibujo, pero es la misma que $(1 2) 3$ que va hacia la derecha. En cambio, en los caminos de la derecha en la figura 4, puede verse que $(1 \bar{2}) \bar{3}$, que empieza yendo hacia abajo y $(1 2) 3$ que va hacia arriba, son incompatibles.

Después de una larga digresión sobre la orientación de las hélices, con apelaciones al mundo vegetal y animal (piénsese que cuernos y caracoles son askoides, que en las plantas hay infinidad de espirales, las escaleras de caracol son helicoides, etc.), y tras una análisis crítico de las denominaciones de Linné para lo que es giro a derechas o **dexiotrópico** y giro a izquierdas o **laetrotópico**, pasa Listing a considerar helicoides y hélices múltiples, formadas estas cuando la espiral sirve de conductriz a otra espiral, y así ininterrumpidamente cuantas veces se quiera, definiendo conductrices helicoidales de primer orden, segundo y así sucesivamente. El ejemplo más inmediato son las cuerdas compuestas de hilos en espiral, que a su vez se componen de fibras torcidas en espiral, etc. (figura 5).



Figura 5: Cuerdas compuestas de hilos en espiral.

También hay notaciones para estos casos, por ejemplo (figura 6), para dos hilos:

Dos hilos, si se quiere de igual longitud, se colocan paralelos (homódromos) y estirados uno al lado del otro. Los puntos extremos de uno de los hilos los designamos con 1 y $\bar{1}$, los del otro con 2 y $\bar{2}$, de manera que

⁴N.T.: Listing dice *Helikoïde oder Wendellinie*, pero, al tratarse de una línea, traduzco por hélice.

tanto $1, 2$ por un lado, como $\bar{1}, \bar{2}$ por el otro están juntos. Si ahora se retuercen los dos hilos, de manera que la línea $1\ 2$ permanece inmóvil, y la línea $\bar{1}\ \bar{2}$ se rota arbitrariamente en torno a un eje paralelo a la dirección longitudinal inicial, entonces, según el sentido de esta torsión, los dos hilos formarán una línea espiral doble, dextrotópica o laetrotópica, cuya conductriz sigue la dirección del eje de torsión mencionado. Al doble hilo así originado, uniendo arbitrariamente dos a dos sus dos extremos $1, \bar{1}, 2, \bar{2}$ se le puede dar la forma de una espiral doble cerrada sobre sí. Con respecto a las uniones de los extremos, el cierre, en nuestro ejemplo solo son posibles dos casos, a saber,

$$\begin{aligned} \text{primer cierre:} & \begin{pmatrix} 1\ \bar{1} \\ 2\ \bar{2} \end{pmatrix} \\ \text{segundo cierre:} & \begin{pmatrix} 1\ \bar{2} \\ 2\ \bar{1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En el primer caso, cada uno de los dos hilos está cerrado sobre sí en forma anular; en el segundo, los dos unidos forman una línea cerrada única.

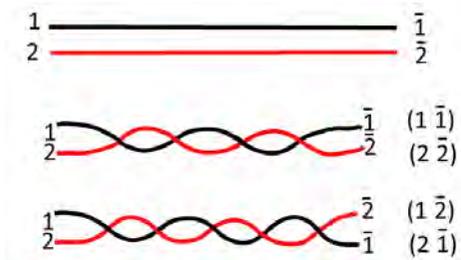


Figura 6: Configuraciones con dos hilos.

Piénsese que si se incluyera la superficie comprendida entre los dos hilos, con una torsión $\{(1\ \bar{2}), (2\ \bar{1})\}$, tendríamos una banda de Möbius.

Listing traslada lo anterior al caso de tres hilos, con los extremos denotados $1, \bar{1}, 2, \bar{2}, 3, \bar{3}$, y que dan lugar a los seis cierres siguientes, uno por columna:

$$\begin{pmatrix} 1\ \bar{1} & 1\ \bar{1} & 1\ \bar{3} & 1\ \bar{2} & 1\ \bar{2} & 1\ \bar{3} \\ 2\ \bar{2} & 2\ \bar{3} & 2\ \bar{2} & 2\ \bar{1} & 2\ \bar{3} & 2\ \bar{1} \\ 3\ \bar{3} & 3\ \bar{2} & 3\ \bar{1} & 3\ \bar{3} & 3\ \bar{1} & 3\ \bar{2} \end{pmatrix}$$

Primero: con el primer cierre se originan tres anillos separados o encadenados. Segundo: con el segundo, tercero y cuarto cierres se originan dos anillos (uno se compone de un hilo, los otros de los dos hilos restantes), que pueden ser separados o encadenados, simples o anudados.

Tercero: por medio del quinto y sexto cierres se origina un único cierre, simple o anudado.

Estos ejemplos, efectivamente, contienen apreciables puntos de partida para las investigaciones en la parte de la topología que tratará de las complejiones lineales en el espacio, y en particular del anudado, encadenado y trenzado. La profundización y generalización de los ejemplos dados debe reservarse enteramente a estos estudios mencionados.

Y, con esto, entra directamente en el estudio de los nudos.

5. NUDOS

Listing comienza por la representación de la proyección sobre una superficie de un cruce de líneas, y la codificación de los espacios en que la superficie es dividida por estas. Al punto de intersección de las dos proyecciones lo llama **nudo** o **punto nodal**. Si nos situamos como tendidos sobre la línea más próxima a la vista, mirando hacia abajo, el espacio encima de la línea más lejana que está a la derecha será un espacio δ , el de la izquierda será λ , los opuestos por el vértice son iguales (figura 7).

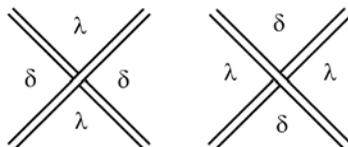


Figura 7: Puntos nodales.

A partir de aquí, ya se ocupa de los diagramas o **complejiones lineales**, como él los llama. Los tres ejemplos de la figura 8,⁵ si se hace abstracción de los cruces y se los considera como cortes, son topológicamente iguales. Los tres representan:

*... una línea cerrada sobre sí con tres cruces, tres regiones de dos ángulos o **asas** y una de tres ángulos o **mall**a. La diferencia reside solo en la naturaleza de los cruces.*

*El diagrama de la Fig. 6 puede reducirse a un anillo simple sin anudar, en el que los tres nudos desaparecen. En las Fig. 7 y 8 no se puede reducir el número de cruces, aunque, como en todos los casos, puede aumentarse. La Fig. 6 es una forma **reducible**, las Fig. 7 y 8 son figuras **reducidas**. En estricta conexión con ello está el que en los dos últimos casos todas las regiones son **monotipo**, en el primero solo una (el asa inferior) es monotipo, las restantes son **anfitipo**. El espacio exterior, que en estas consideraciones deberá ser visto como una región independiente (**Amplexum**) es, en la Fig. 6 anfitipo [λ, δ], en las 7 y 8 monotipo [la 7 es λ , la 8, δ], y en los tres diagramas triangular.*

⁵Todas las figuras con la etiqueta «Fig.» son de Listing, y se incluyen sin modificar.

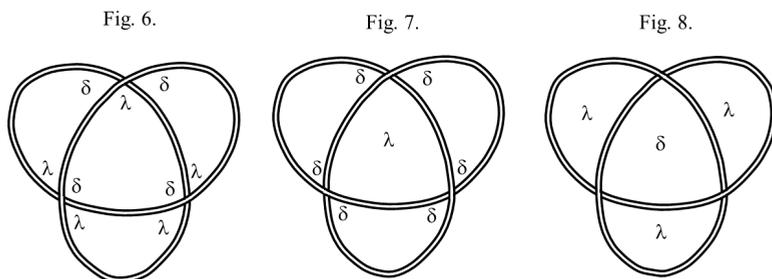


Figura 8: Las Fig. 6, 7 y 8 originales de Listing.

Denota estos diagramas de la siguiente manera, una vez conseguida la figura reducida. En la Fig. 7 tenemos 3 regiones con 2 vértices δ , lo que se denota $3\delta^2$, y una con 3 vértices λ , además del amplexum que también tiene tres vértices λ , o sea $2\lambda^3$, de manera que el símbolo para este diagrama será $\frac{3\delta^2}{2\lambda^3}$. Para la Fig. 8 es $\frac{3\lambda^2}{2\delta^3}$. Cuando las reducidas de dos figuras son iguales, son topológicamente equivalentes. Por ejemplo, dentro de la figura 9, la Fig. 9, dado que tiene regiones anfitipo, es reducible y con dos transformaciones podemos ver que es topológicamente equivalente a la Fig. 8.

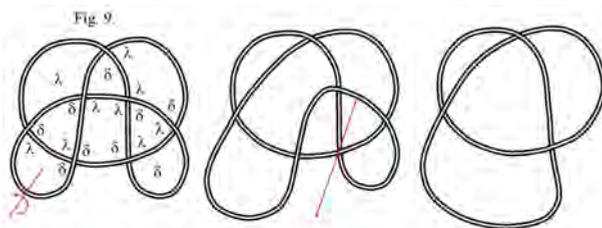


Figura 9: Reducción de la Fig. 9 a la Fig. 8.

El resultado de una reducción no es unívoco. De las Fig. 9, 10 y 11 (incluidas en la figura 10), que tienen igual número de regiones y vértices, las Fig. 9 y 10 son anfitipos, por tanto son reducibles; la 11 no, es reducida. Además, la 10 puede dar lugar por reducción a las cuatro siguientes, Fig. 12 a 15 (incluidas en la figura 10), que por tanto, aunque distintas y reducidas, son equivalentes.

Las cuatro tienen el mismo símbolo $\frac{2\delta^4 + \delta^2}{2\lambda^3 + 2\lambda^2}$, siendo sus amplexums, respectivamente, δ^4 , δ^2 , λ^3 , λ^2 . Pero puede ocurrir que diagramas con símbolos diferentes también sean equivalentes, por ejemplo, el símbolo de la Fig. 11 es el del primer miembro de la ecuación siguiente, pero:

A él le corresponden, aparte de la Fig. 11, en la que el amplexum se denota δ^5 , otras cinco formas más, de las cuales la Fig. 16 representa una con amplexum λ^4 .

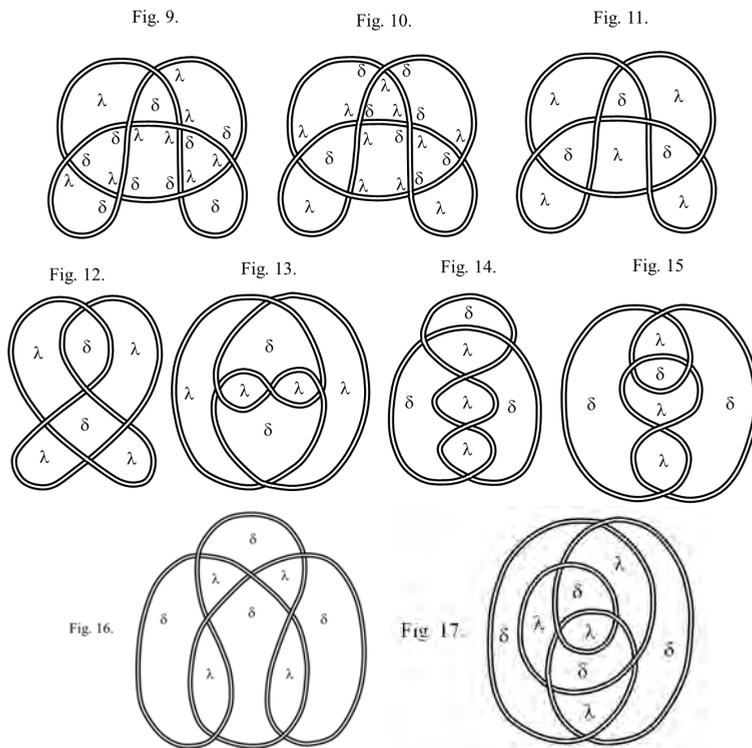


Figura 10: Las Fig. 9 a 17 originales de Listing.

En ciertos casos un símbolo es equivalente a otro, de manera que las formas reducidas de una pueden convertirse en las de la otra por medio de una transformación, un ejemplo de una de tales equivalencias es

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta^5 + 3\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2\delta^4 + 2\delta^3 \\ \lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 \end{array} \right\}$$

Mientras al primero de estos dos símbolos equivalentes corresponden seis formas reducidas, al segundo corresponden otras cinco, así que todas las once formas reducidas (con siete cruces) son equivalentes entre sí. Una de las cinco formas pertenecientes al segundo símbolo, la representa la Fig. 17 con el amplexum λ^2 .

5.1. GRAFOS

Listing no menciona la palabra «grafo», pero sí se ocupa de redes de caminos y, en la estela del problema de los puentes de Königsberg, de cuál es el número mínimo de trayectorias que permiten recorrerlos sin repetir trayecto.

Para ello, comienza por establecer que si en un punto confluyen una cantidad par n de caminos, podemos considerar que son $\frac{n}{2}$ caminos que *pasan* por el punto, pero que si n es impar hay $\frac{n-1}{2}$ caminos que pasan por él, y uno que empieza o termina en él (figura 11).

De ello resulta que un diagrama completo puede ser considerado como el agregado de una determinada cantidad de trazos continuos, de los que cada uno posee dos puntos límite o extremos, que están en puntos de reunión de un número impar de líneas. De ahí se sigue que, en todo diagrama lineal debe existir una cantidad par de puntos impares de unión, mientras que la cantidad de puntos de unión pares, entre los que se puede contar cada punto interior de una línea, es infinitamente grande. Con ayuda de esta proposición es fácil determinar para cada diagrama, por complicado que sea, el menor número posible de trazos continuos con los que pueda ser descrita, de manera que ninguna parte se recorra más de una vez. Por tanto, para determinar este número mínimo de trazos, hay que contar los puntos en que se une una cantidad impar de líneas del diagrama. Sea p su número, que siempre debe ser par; entonces $\frac{p}{2}$ es el menor número de trazos, con los que podrá describirse la configuración. Sin embargo, no debe dejar de mencionarse que, caso de ser $p = 0$, la cantidad de trazos buscados no es 0 sino 1.

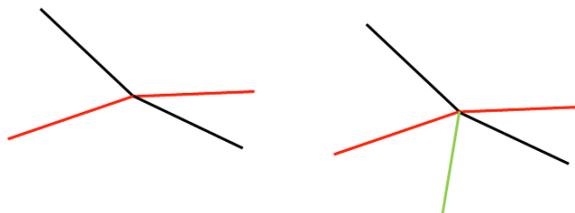


Figura 11: Caminos que confluyen en un punto.

Un rectángulo con dos diagonales tiene cuatro vértices impares, necesita dos trazos, pero si añadimos dos lados, como se ve en la figura 12, basta con un trazo.

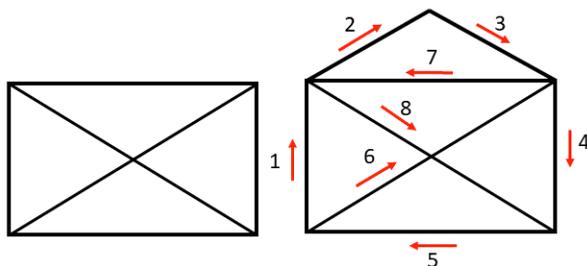


Figura 12: Dos grafos con rectángulo.

Listing da dos ejemplos más (figura 13):

En la Fig. 18 aparecen ocho puntos impares (cada uno con tres caminos), por tanto esta figura no se puede describir con menos de cuatro trazos continuos, sin pasar por una parte dos o más veces.

La Fig. 19 puede describirse con un único trazo, pues en ella solo aparecen dos puntos impares, los dos quinarios, en los extremos del diámetro horizontal.

Fig. 18.

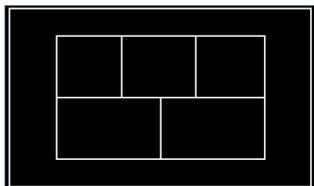


Fig. 19.

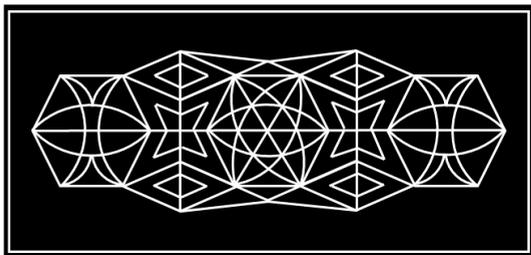


Fig. 20.

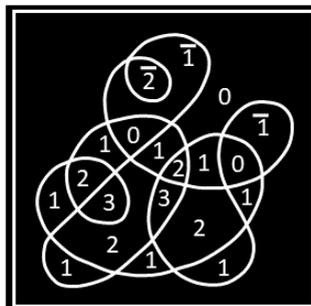


Figura 13: Las Fig. 18, 19 y 20 originales de Listing.

Finalmente, aborda la cuestión de cómo denotar diagramas que carecen de puntos impares, dada una línea cerrada y decidido cuál es el interior y el exterior (en una superficie esférica, por ejemplo, no es obvio), se les asigna el 0 y el 1 y, a partir de ahí, por ejemplo en una línea en forma de 8, si 0 es el espacio fuera de los lazos y 1 el interior de un lazo, el otro sería $\bar{1}$, pero:

Si se intercambian 0 y 1 entonces aparece 2 en lugar de $\bar{1}$, y así sucesivamente. Si se ponen las cuatro cifras ordinales a, b, c, d en los espacios angulares de cada cruce, de las cuales a y b, b y c, c y d, d y a, están en ángulos adyacentes, de manera que entonces a y c, b y d corresponden a ángulos opuestos por el vértice, se obtiene la regla:

O bien

$$a - c = \pm 2, \quad b - d = 0, \quad a + c - b - d = 0$$

o

$$a - c = 0, \quad b - d = \pm 2, \quad a + c - b - d = 0$$

según lo cual todas las regiones de un diagrama dado pueden cifrarse fácilmente [ver Fig. 20].

6. EPÍLOGO

Uno de los primeros especialistas en nudos, Peter G. Tait, que tuvo contacto con Listing, dijo de este: *está claro que publicó solo una pequeña parte de sus investigaciones*. Por su parte, Felix Klein [3], como menciona Tait [7], descubrió que en un espacio de cuatro dimensiones no puede haber nudos.

Una derivada curiosa de la teoría de nudos es su uso en psicoanálisis. De hecho, según nos cuentan Grun y Vappereau [6, p. 17], Lacan, aunque excusándose, decide llamar al nudo de la Fig. 12 de Listing «nudo de Lacan».

Sobre las relaciones de Listing con Gauss pueden encontrarse detalles en [1, 2].

REFERENCIAS

- [1] E. BREITENBERGER, Johann Benedict Listing, *Neue Deutsche Biographie* **14** (1952), 700–701.
- [2] E. BREITENBERGER, Gauss und Listing: Topologie und Freundschaft, *Gauss-Ges. Göttingen Mitt.* **30** (1993), 3–56.
- [3] F. KLEIN, Ueber der Zusammenhang der Fläche, *Mathematische Annalen* **9** (1876), 476–582.
- [4] J. B. LISTING, *Vorstudium zur Topologie*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1848.
- [5] J. B. LISTING, *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern*, Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1848.
- [6] J. B. LISTING, *Introduction à la topologie*, préface de M. Grun-Réhomme et J. M. Vappereau, Navarin, 1989.
- [7] P. G. TAIT, Johann Benedict Listing, *Nature* **27** (1882–83), 316.

CARLOS GÓMEZ BERMÚDEZ, UNIVERSIDAD DE CORUÑA
 Correo electrónico: carlos.gbermudez@udc.gal