

# En busca de la cuarta dimensión<sup>1</sup>

**Raúl Ibáñez Torres, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea**

No es frecuente que las teorías matemáticas trasciendan del ámbito puramente científico y se adentren en las otras manifestaciones culturales del hombre. Sin embargo, a finales del siglo XIX y principios del siglo XX la sociedad quedó fascinada por la posibilidad de existencia de dimensiones superiores a nuestra propia dimensión tres. Esta charla trata de introducir al público en la cuarta dimensión según la entendieron en aquella época, es decir, desde una perspectiva espacial anterior al espacio-tiempo de la teoría de la relatividad. En la primera parte, hablaremos de una novela que contribuyó enormemente a la divulgación de este tópico, *Flatland* (Planilandia, Una novela de muchas dimensiones). A continuación, veremos cómo la sociedad se vio influenciada por estas ideas: ciencia, filosofía, religión, literatura, música, diseño,... Abordaremos la visualización de objetos cuatro-dimensionales, para adentrarnos finalmente en la influencia que ejerció la cuarta dimensión (en un sentido espacial) en el arte del siglo XX (desde el cubismo al surrealismo).

## 1. Flatland

*Flatland, A Romance of Many Dimensions* (Planilandia, una novela de muchas dimensiones), publicado por vez primera en 1884, es la historia de un cuadrado que vive en un mundo de dos dimensiones y realiza un viaje a una dimensión inferior y otro a una dimensión superior.

Este es un libro de ciencia ficción, no científico, que desde su publicación ha cautivado fuertemente a científicos y no científicos, arrastrando a sus lectores hacia el tema de la cuarta dimensión (o de las dimensiones superiores). La idea de este brillante libro es animar a sus lectores a romper con las cadenas de su limitada y confortable percepción de la realidad del mundo que les rodea y a abrir sus mentes a nuevas formas de “percepción”, ideas, pensamientos,... Pero, es *más* que un libro de dimensiones, es también una sátira social, que al igual que “*los viajes de Gulliver*” o “*Alicia en el País de las Maravillas*” satiriza las actitudes de la Inglaterra victoriana en la que vivía su autor, aunque desde el punto de vista del conejo y no de Alicia.

**¿Por qué este libro ha impactado tanto y ha llegado a tanta gente?** En primer lugar, hemos de destacar la sencillez de las ideas que se utilizan en la historia, así como la sencillez del lenguaje utilizado para escribirla. No podemos olvidar que su autor, Edwin Abbott Abbott, como comentaremos en el siguiente apartado, era predicador de la iglesia anglicana (los sermones deben ser sencillos para que el pueblo pueda entenderlos) y era director de un colegio en Inglaterra, pero sobre todo era un estudioso de la Educación (era uno de los líderes del movimiento por las oportunidades educacionales para jóvenes

---

<sup>1</sup> Este artículo aparecerá publicado en “Sociedad, Ciencia, Tecnología y Matemáticas 2005”, Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna.

hombres y mujeres de todas las clases sociales), y ambas cosas reflejan su interés por que la historia y las ideas del libro sean comprendidas por todos. Por otra parte, ya entonces, y sobre todo entonces, el tema de la cuarta dimensión atrajo la atención de mucha gente, no solo por las implicaciones científicas del mismo, sino que también por lo que tiene de misterioso y por su conexión con la filosofía, la teología, el espiritualismo, el arte,...

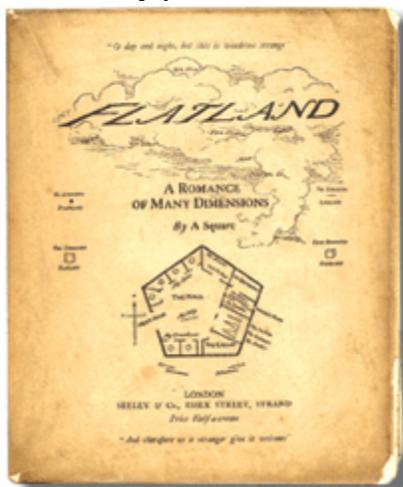
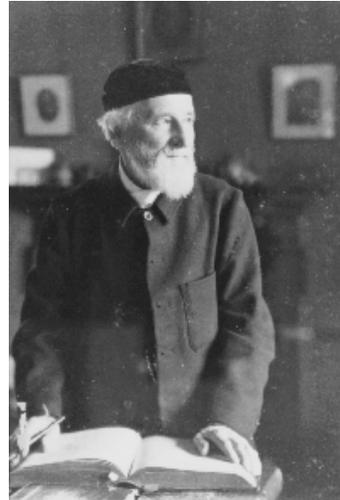


Figura 1: Portada de Flatland



Figura 2: Edwin Abbott Abbott



## 1.1 El autor: Edwin Abbott Abbott

Flatland fue firmado por “A square”, es decir, “un cuadrado”, pseudónimo de Edwin Abbott Abbott, haciendo quizás un juego de palabras entre “un cuadrado” (“A square”), que es el protagonista de la novela, y “A al cuadrado” (“A squared”) en alusión a las iniciales de sus apellidos.

Edwin Abbott Abbott nació en Londres, el 20 de diciembre de 1838, hijo del director de la Facultad de Filología de Marylebone. Su familia jugó un papel muy importante en la formación de sus ideas religiosas. Abbott asistió a la escuela en la ciudad de Londres, luego fue a Cambridge, donde recibió una formación clásica, siendo sus estudios dirigidos fundamentalmente hacia la Literatura, la Gramática y la Teología, aunque también estudió algunas nociones de Matemáticas. Se ordenó ministro de la iglesia anglicana, a pesar de sus profundas dudas, se casó y a la edad de 26 años regresó a la Escuela de la Ciudad de Londres como director, tras una breve etapa como maestro en otras dos escuelas inglesas. En estos primeros años, trabajó con su padre sobre la bibliografía utilizada en los trabajos del Papa y en su obra “*Una Gramática Shakespeariana*”. Además, publicó dos series de sermones en Oxford y Cambridge, para posteriormente abandonar su carrera como predicador, aunque siguió en contacto con el movimiento por una iglesia abierta e interesado en los Evangelios (publicó un controvertido artículo sobre los mismos en la Enciclopedia Británica). Como líder del movimiento por las oportunidades educacionales para jóvenes hombres y mujeres de todas las clases sociales, introdujo nuevas ideas en la Escuela de la Ciudad de Londres y en las reuniones de los directores de las escuelas inglesas. Nunca abandonó los temas teológicos en sus estudios y escritos, entre ellos encontramos tres novelas religiosas didácticas o un extenso estudio sobre las Escrituras.

Flatland fue su único libro con cierto contenido matemático.

**¿Cómo una persona como Abbott, sin formación matemática especial, pudo ser el autor de uno de los libros que más ha impactado a la sociedad sobre el tema de la cuarta dimensión?** Tras el trabajo matemático de Lobachevsky, Gauss y Riemann, entre otros, sobre geometrías no Euclídeas y geometría multidimensional (geometría diferencial), se produjo cierto interés dentro de la sociedad en estos temas y, en particular, la cuarta dimensión pasó a ser uno de los temas tratados en las tertulias de finales del siglo XIX. Abbott era asiduo de ciertas tertulias y allí debió coincidir con Ch. H. Hinton, filósofo de la cuarta dimensión, o algún colega de este. Abbott vio claramente como esta idea, además de su propio atractivo, le podía servir para hablar metafóricamente sobre cuestiones teológicas (Dios, Fe, Escrituras,...) y sobre el mundo jerárquico de la Inglaterra victoriana.

## 1.2 Objetivos de la obra

Como ya hemos destacado, Flatland no es sólo un cuento sobre dimensiones. Podemos mencionar tres aspectos diferentes en esta obra: i) **Crítica Social.** Esta obra es una sátira sobre la sociedad victoriana inglesa en la que Abbott vivía, que era extremadamente formal y cruel (dureza contra las clases más necesitadas - “los irregulares” en Flatland son conducidos a la muerte-; las mujeres no tienen ningún derecho; cuando el protagonista trata de enseñar sobre la tercera dimensión, es decir, nuevas ideas, es enviado a prisión,...); ii) **Científico.** Pensando en las dificultades que el protagonista, el cuadrado, tiene para entender la tercera dimensión, nosotros podemos comprender mejor nuestras dificultades al pensar en la cuarta dimensión. Además, Abbott nos muestra que la técnica de la analogía dimensional puede ser una herramienta útil en la comprensión de la cuarta dimensión; iii) **Espiritual o Teológica.** Podemos ver Flatland como el camino utilizado por Abbott para hablar de ciertas experiencias espirituales intensas. Por ejemplo, el viaje del cuadrado a través de dimensiones superiores puede ser visto como una metáfora de las experiencias místicas “a realidades superiores”. También Abbott intenta enseñarnos que no deberíamos depender de los milagros como base de nuestras creencias (ya sea dentro de las religiones convencionales o no). Además, contrariamente a otras personas que intentan llegar a Dios o demostrar su existencia a través de la cuarta dimensión, Abbott intenta mostrar que los científicos nos pueden llevar muy lejos (progreso, descubrimientos, Universo,...) con su ciencia, pero nunca acercarnos a Dios. También podemos observar un cierto paralelismo del cuadrado, su intento de explicar la tercera dimensión y su tratado sobre los misterios de las tres dimensiones, con los apóstoles, su labor de evangelización y la Biblia.

## 1.3 Flatland, la novela

Flatland está dividido en dos partes, la primera titulada Este Mundo, está dedicada precisamente a la descripción del mundo de dimensión dos y de la sociedad en que vive el protagonista, el cuadrado. Es en esta parte donde se encierra fundamentalmente la crítica social. En primer lugar, el cuadrado/Abbott describe la naturaleza de Flatland, un mundo plano habitado por líneas rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos, y otras figuras poligonales. Las casas donde habitan las figuras son normalmente, a excepción de fortificaciones, cuarteles y edificios oficiales, pentagonales con el tejado mirando al norte,

debido a que existe una atracción constante hacia el sur, lo cual hace que por ejemplo la lluvia sea siempre de norte a sur. Además, las casas, como se ve en la figura 3, poseen dos puertas, una para hombres y otra para mujeres.

A continuación, Abbott describe a los habitantes de este curioso mundo. Las mujeres son líneas rectas, los soldados y las clases más bajas de trabajadores son triángulos isósceles, la clase media está formada por triángulos equiláteros, los profesionales y caballeros son cuadrados y pentágonos, inmediatamente por encima de estos tenemos a la nobleza que son hexágonos y a partir de ahí va aumentando el número de lados, junto con la posición social dentro de la propia nobleza, finalmente cuando el número de lados es tan grande que la figura no se distingue de un círculo, tenemos a los sacerdotes. El ángulo de las figuras (para los triángulos isósceles el menor de ellos), que está obviamente relacionado con el número de lados, denota además de la posición social, la inteligencia de la figura. Además, el hijo varón tiene siempre un lado más que su padre, aunque no siempre entre comerciantes y menos entre soldados y las clases más bajas de trabajadores. Cuando ocurre el milagro de que el hijo de un triángulo isósceles es equilátero, entonces se le separa de sus padres y lo adopta un equilátero sin hijos. Las mujeres son líneas rectas, sin ángulos, luego sin inteligencia y no tienen derechos en la sociedad descrita. Veamos uno de los párrafos del libro en el cual el cuadrado habla de las mujeres: *“No hay que pensar sin embargo, ni por un momento que las mujeres están desprovistas de afecto. Pero predomina, desgraciadamente, la pasión del momento en el sexo débil por encima de cualquier otra consideración. Se trata, claro, de una necesidad que surge de su desdichada conformación. Pues, como no tienen pretensión alguna de ángulo, siendo inferiores a este respecto a los más bajos isósceles, se hallan totalmente desprovistas de capacidad cerebral, y no tienen ni reflexión, ni juicio, ni previsión y apenas si disponen de memoria. Por ello, en sus ataques de furia, no recuerdan ningún derecho ni aprecian ninguna diferenciación”*.

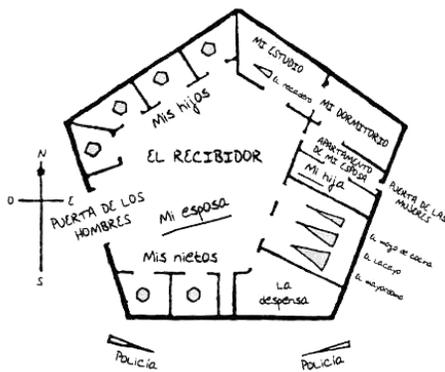


Figura 3: Casas de Planilandia

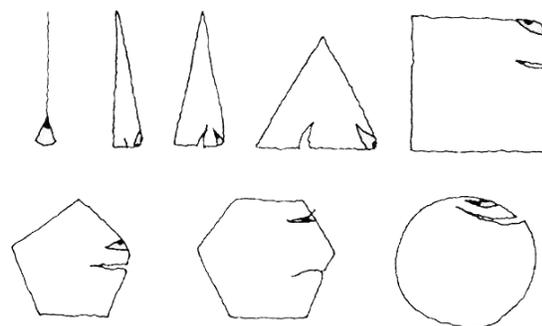


Figura 4: Habitantes de Planilandia

Existen tres formas en las que los habitantes de Flatland se reconocen unos a otros. Las clases más bajas lo hacen mediante el tacto, los equiláteros, cuadrados y pentágonos se reconocen mediante el sentido del oído, identificando la voz de sus visitantes. Entre las clases más altas utilizan la identificación visual: cuando ven a un habitante de Flatland ven un segmento de recta, pero la constante niebla que existe en este mundo les permite distinguir profundidad y, por lo tanto, ángulos.

En Flatland, toda figura es regular, la irregularidad de una figura significa, más o menos, lo que para nosotros pudiera ser una combinación de perversidad y delincuencia. Podemos leer en la descripción del cuadrado: “*El irregular dicen, es desde que nace objeto de burla por parte de sus padres, sus hermanos y hermanas le ridiculizan, los criados no le hacen caso, la sociedad se mofa de él y le mira con desconfianza y le excluye de todos los puestos de responsabilidad confianza y actividad útil. Todos sus movimientos son atentamente vigilados por la policía hasta que llega a la mayoría de edad y se le presenta a inspección, donde o se le destruye, si se descubre que excede el margen de desviación establecido, o bien se le empareda en una oficina del estado como empleado se séptima clase; no se le permite casarse*”. En el lado opuesto de la sociedad tenemos a los sacerdotes que “*son administradores de todos los negocios, las artes y las ciencias; tienen a su cargo la industria, el comercio, el generalato, la arquitectura, la ingeniería, la educación, el arte de gobierno, la legislación, la moralidad, la teología; ellos, sin hacer nada personalmente, son la causa impulsora de todo lo que merece la pena hacer que hacen otros*”. Su doctrina es que hay que atender **a la configuración, los actos de cada figura son consecuencia de esta.**

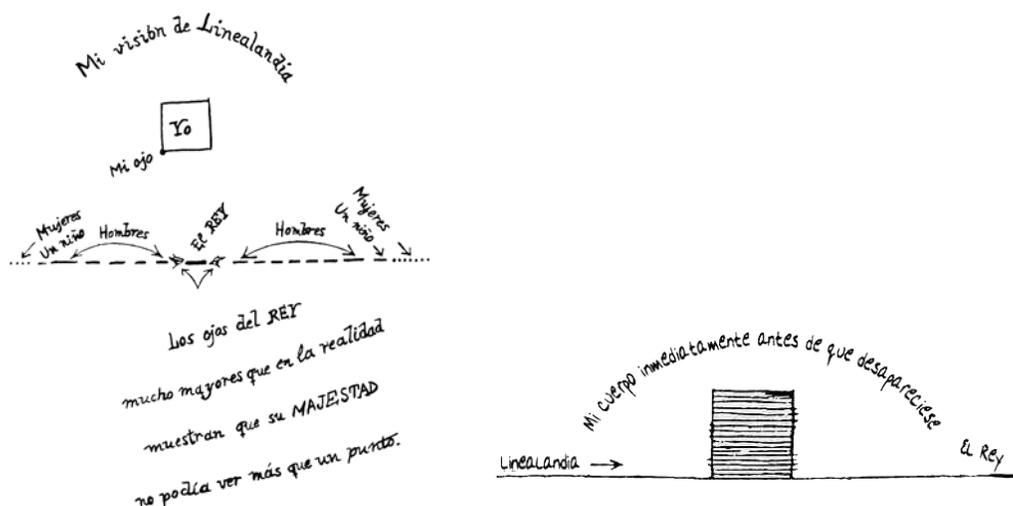


Figura 5: Linealania

La segunda parte, titulada Otros mundos, se centra más en el problema de la analogía dimensional y en los aspectos teológicos, aunque mantiene la crítica social hasta el final de la obra. En primer lugar, el cuadrado visita Linealania en un extraño sueño, un mundo unidimensional habitado por segmentos (hombres) y puntos (mujeres). Allí, desde fuera de Linealania, habla con el rey de ese mundo y este no se explica quién o qué le está hablando, entonces el cuadrado trata de explicarle que él habita un mundo de dimensión dos y su propia existencia es bidimensional, pero el rey no entiende y el cuadrado no sabe como explicárselo. Primero trata de explicarle que si un punto se mueve en la única dirección de Linealania se obtiene un segmento, lo cual sí entiende el rey, pero si movemos el segmento “hacia arriba” se obtiene un cuadrado. Como el rey no comprende el significado de esa expresión “hacia arriba”, el cuadrado entonces atraviesa Linealania para mostrarle que tiene dos dimensiones, aunque el rey no interpreta que está viendo las diferentes secciones de un cuadrado, sino que el cuadrado es un segmento de Linealania que es capaz, de forma incomprensible para él, de aparecer y desaparecer.

Al despertarse al día siguiente, el cuadrado es misteriosamente visitado por una esfera, habitante de Espaciolandia, universo tridimensional en el que se encuentra Planilandia. Al principio, como le ocurría al rey de Linealandia, nuestro protagonista no entiende de donde viene la voz que le habla. Ahora, es la esfera quien intenta explicarle su naturaleza tridimensional al cuadrado, explicandole que si un cuadrado se mueve en una nueva dirección hacia arriba se obtiene un cubo que tiene dimensión tres. Ante el fracaso del cuadrado por entender la explicación de la esfera, esta decide atravesar Planilandia, aunque el cuadrado piensa que es un sacerdote que se le aparece de forma mágica, crece como si pasara el tiempo rápidamente y misteriosamente decrece y desaparece. La esfera, impotente ante la incomprensión del cuadrado, toma una medida drástica y decide sacar al cuadrado de Flatland y este al ver su mundo desde fuera acaba comprendiendo el significado de la tercera dimensión a la que aludía la esfera. Finalmente, el cuadrado entiende la estructura tridimensional de Espaciolandia y tras reflexionar sobre lo ocurrido le comenta a la esfera que si utilizamos la analogía dimensional entonces quizás exista un espacio de cuatro dimensiones sobre el que descansa el universo de la Esfera, aunque la esfera es entonces la que se queda confusa.

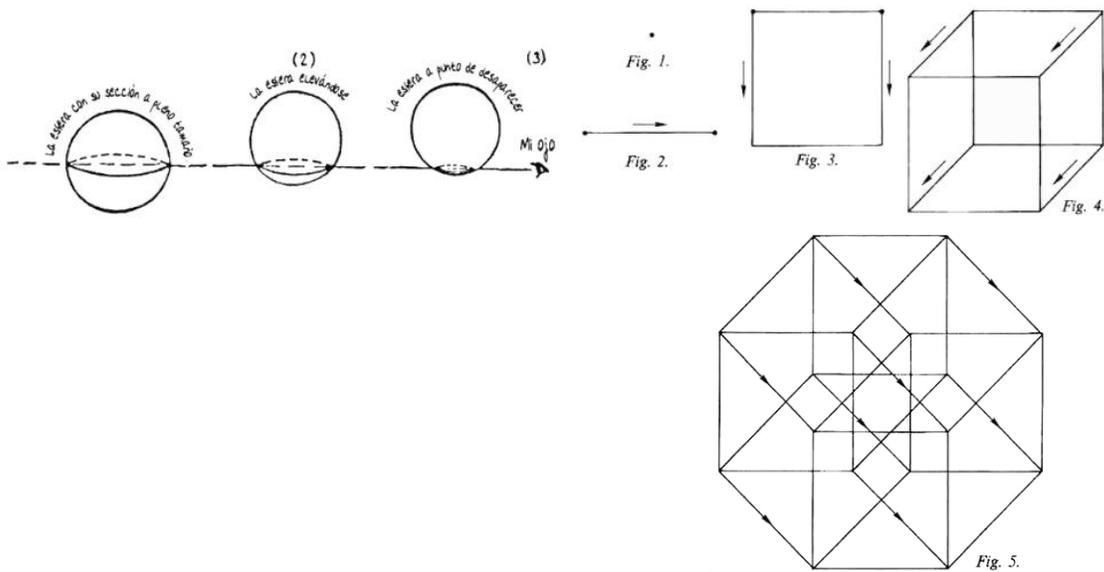


Figura 6: La Esfera atravesando Flatland

Figura 7: Analogía dimensional

La novela acaba con el cuadrado en la cárcel por intentar explicar a los habitantes de Flatland la existencia del espacio tridimensional y por escribir un tratado sobre el misterio de la tercera dimensión. Aquí se observa, por ejemplo, una analogía con las Escrituras y la persecución de los Apóstoles; también se mantiene la crítica social al mostrar una sociedad que castiga a quienes intentan introducir nuevas ideas en la misma.

Me gustaría terminar este apartado mencionando otros textos de ciencia ficción que describen mundos fantásticos de dimensión dos y en los cuales hay una discusión sobre el tema dimensional. La primera persona en desarrollar la analogía dimensional en el siglo XIX fué el psicólogo y fisiólogo Gustave Fechner de Leipzig, en el relato corto “*Space has four dimensions*” (1846). El hombre-sombra era proyectado a una pantalla vertical por un proyector opaco. Ch. H. Hinton, de forma independiente y paralela a Abbott, escribió un

relato corto titulado “*An episode of Flatland*” (1904). Con posterioridad, la inclusión de una nueva concepción del Universo dio lugar a una secuela de Flatland titulada “*Sphereland, A fantasy about curved spaces and expanding universe*” (1964), en la cual, su autor Dionys Burguer, con la misma filosofía de sencillez que Flatland y planteando la historia como una continuación de esta obra (el protagonista es A Hexagon, el nieto de A Square), hace una introducción a conceptos como la curvatura y la expansión del espacio. La inclusión de la informática en la idea de Flatland, dio lugar a “*Tite Planiverse, Computer contad with a two-dimensional world*” (A. K. Dewdney, 1984). En ella se hace un viaje a una posible civilización bidimensional: física, química, biología, cultura,... son exploradas en detalle. Además, en algunas de las obras de Rudy Rucker podemos encontrar fragmentos de lo que su autor llama “*The further adventures of A Square*”, en la cual el propio Rucker habla de cuestiones como la simetría, la curvatura del espacio, el tiempo,... No podía faltar otra secuela de Flatland por parte de uno de los divulgadores *más* afamados Jan Stewart, con su libro “*Flatterland, Like Flatland only more so*” (2000). Con la ayuda de Victoria Lane, una descendiente de A Square, se hace un recorrido a través de conceptos como la dimensión fractal, las dimensiones espaciales ocultas, la geometría hiperbólica, la mecánica cuántica, la teoría de la relatividad, singularidades, el viaje en el tiempo,... Y finalmente “*Spaceland*” (2002) de Rudy Rucker, donde se plantea una historia en nuestro mundo real y su interacción con seres de la cuarta dimensión. *Más* de lo mismo, pero en un tono más realista y actual.

## 2. La cuarta dimensión entra en la Sociedad

### 2.1 Platón

Una de las primeras alusiones a la importancia del estudio de los espacios en una progresión dimensional y a la idea de la analogía dimensional, idea clave en Flatland, la encontramos en la obra “*La República*” (libro VII) de Platón.

i) Sócrates conversa con Glaucón sobre la **educación de los guardianes de un estado ideal** y le dice que primero se empezaría con la aritmética y el estudio de la línea de los números, después se pasaría a la geometría plana, un conocimiento esencial para cualquiera encargado de la defensa militar o de la configuración de las ciudades. Cuando Sócrates pregunta qué debería ser lo siguiente, Glaucón sugiere que la Astronomía. Sócrates le regaña entonces por olvidar un paso esencial, que es la geometría sólida, una asignatura que él considera que estaba, en su tiempo, siendo descuidada en las escuelas<sup>2</sup>. Solamente después de conducirse de la primera a la segunda dimensión, y después a la tercera, estaría un estudiante preparado para considerar los movimientos del cielo.

ii) **El mito de la caverna**. Platón nos pide que imaginemos una raza de hombres que permanecen encadenados desde su nacimiento en una oscura caverna subterránea, encadenados de tal forma (cuerpo, piernas, manos, cuello) que lo único que ellos pueden ver es la pared de la caverna que se encuentra frente a ellos. Detrás de los hombres hay un

---

<sup>2</sup> Es curioso lo actual que puede ser este pensamiento de Sócrates-Platón.

pequeño muro y detrás un fuego. Entre el fuego y el muro hay objetos que se mueven de un lado a otro transportados por hombres que caminan con distintas figuras sobre la cabeza, hombres que en ocasiones hablan entre ellos, y el fuego proyecta las sombras de estos objetos sobre la pared de la caverna y también llegan sus voces hasta los prisioneros. Estos piensan que estas sombras son la única realidad y no comprenden que su propia existencia y la de esos objetos es en cuerpos tridimensionales. Es interesante resaltar el final del mito, en el que alguien del exterior les visita e intenta explicarles la verdadera realidad, pero ellos le toman por loco.

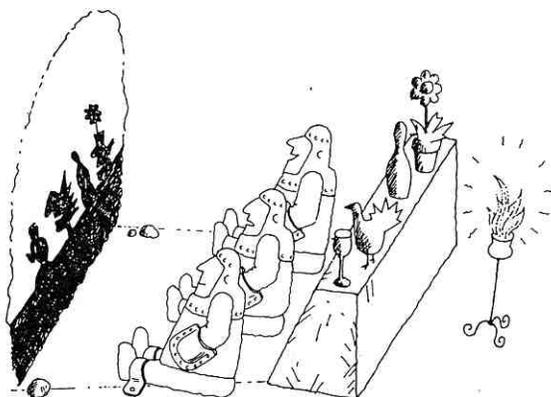


Figura 8: El mito de la caverna

Una de las cuestiones interesantes respecto a la relación del mito de la caverna con la cuarta dimensión (aparte de la analogía dimensional) es el hecho de que los prisioneros realmente creen que son seres bidimensionales, no siendo conscientes de su tridimensionalidad, como podríamos pensar nosotros mismos respecto de la cuarta dimensión, es decir, la posibilidad de ser proyecciones/secciones tridimensionales de un ser cuatridimensional.

## 2.2 La Revolución Geométrica: Gauss, Riemann,...

En el siglo XIX se produjo una revolución dentro de la geometría, como consecuencia de la aparición de las geometrías no Euclídeas y de una nueva perspectiva en el estudio de las superficies y de los espacios geométricos multidimensionales. Tras dos milenios de discusiones e intentos de solución fallidos por parte de matemáticos de todo el mundo sobre el problema del quinto postulado de Euclides o postulado de las paralelas, se pone fin al mismo probándose la existencia de las geometrías no Euclídeas (Gauss, Lobachevsky, Bolyai)<sup>3</sup>. Por otra parte, fue Karl Friedrich Gauss (1777-1855) el primero en abordar sistemáticamente el estudio de las superficies del espacio Euclídeo. Gauss, motivado por algunos problemas planteados por la Astronomía, la Geodesia y la Cartografía, se preocupó por el estudio de las superficies. En particular, fue consejero científico de los gobiernos de Hannover y Dinamarca de cara a un estudio geodésico completo de sus territorios. La realización de este trabajo le planteó problemas como la realización de mapas de los

---

<sup>3</sup> Véase el escrito “Bosquejo histórico de las geometrías no euclídeas: antecedentes, descubrimiento, difusión, consistencia, modelos, aplicaciones físicas,...” que apareció en la publicación de el seminario “Un Paseo por la Geometría” del curso 1997/98, o la reciente publicación de la biografía de Lobachevsky por S. Fernández en Nivola (2004). Así mismo en estos trabajos se puede encontrar una amplia bibliografía sobre el tema.

territorios implicados. En 1827, en su obra “*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas*”, Gauss estableció un nuevo método de estudio de las superficies que consistía en considerarlas como espacios geométricos en sí mismas (Gauss fue quien puso de manifiesto la conveniencia de pensar en las superficies como objetos que se pueden dotar localmente de coordenadas, germen del concepto de variedad diferenciable, y no como puntos del espacio euclideo tridimensional cuyas coordenadas satisfacen una cierta propiedad o como frontera de objetos sólidos) y dejó ver las distinciones entre los aspectos local y global e intrínseco y extrínseco en el estudio de las superficies del espacio Euclídeo. Esta idea fue reformulada y generalizada a espacios de dimensión superior por Bernard Riemann (1826-1866) en su Tesis de Habilitación “*Sobre la hipótesis en que se basa la Geometría*” (1854, Gottingen). Gauss y Riemann con su trabajo pusieron las bases de la geometría diferencial y dieron el salto del concepto de superficie en el espacio euclideo tridimensional al de variedad de Riemann. La geometría diferencial, y también la geometría de Riemann dentro de ella, dieron además una nueva perspectiva a las otras ramas de las Matemáticas y de la Ciencia en general, como por ejemplo en la Física Matemática, Teoría de la Relatividad, Ecuaciones Diferenciales, Cartografía,...

Tras Lobachevsky, Gauss y Riemann, sus ideas empezaron a hacerse familiares para los matemáticos y científicos de la época, quienes además de desarrollar su estudio, las fueron divulgando hasta hacerlas populares dentro de la sociedad. La difusión empezó siendo solamente a nivel académico, pero poco a poco fue interesando a más gente, lo cual propició que la divulgación fuese haciéndose cada vez más asequible para todo el mundo, hasta convertirse en tema de tertulias en los cafés. Gracias al esfuerzo de personajes como el matemático Helmholtz, el filósofo y matemático Hinton, el pastor Abbott y un largo etcétera, estas se hicieron muy populares. Uno de nuestros objetivos a lo largo de este escrito será mostrar el interés que suscitó, en particular, la cuarta dimensión, en la sociedad y su influencia en diferentes campos no científicos de la cultura.

### **2.3 Los Filósofos de la cuarta dimensión: Ch. H. Hinton**

Como hemos comentado anteriormente la cuarta dimensión empezó a interesar a finales del siglo XIX a científicos, pensadores, escritores, artistas, músicos, diseñadores, espiritistas, teólogos,...

**¿Por qué una cuestión como la cuarta dimensión atrajo tanto, además de a científicos, a no científicos de finales del siglo XIX y principios del XX?** Quizás la respuesta a esta pregunta la podamos encontrar en los siguientes puntos: i) el atractivo que para el hombre es lo desconocido, lo misterioso, en definitiva, aquello que no es capaz de encerrar en su mente; ii) la cuarta dimensión pudo servir a algunas personas como válvula de escape a los problemas de la época, de la sociedad en la que vivían (por ejemplo, recordemos lo comentado sobre la Inglaterra victoriana); iii) la cuarta dimensión es un nuevo “universo” que explorar, con todo tipo de connotaciones (científicas, filosóficas, religiosas, artísticas,...). Recogiendo las ideas de lo anterior vemos que la cuarta dimensión contribuyó a romper con las ideas establecidas y a crear nuevos sistemas de pensamiento, expresión artística,... En particular, a nivel artístico les permitió a los cubistas romper con la perspectiva renacentista e intentar pintar el objeto desde diferentes perspectivas; o

filosóficamente, tras la insatisfacción del materialismo y del positivismo, la cuarta dimensión contribuyó en el desarrollo de sistemas filosóficos idealistas e incluso místicos, como el descrito por el inglés Ch. H. Hinton.

El personaje más importante dentro de la filosofía de la cuarta dimensión fue el inglés Charles Howard Hinton (1853-1907). Este personaje se preocupó de desarrollar todo un sistema filosófico alrededor de la cuarta dimensión y divulgar tanto su pensamiento, como las diferentes cuestiones implicadas alrededor de la cuarta dimensión (de algunas pocas hablaremos en este apartado). Además, este personaje tuvo una vida atormentada o cuando menos peculiar, como veremos a continuación.

Hinton obtuvo una formación científica (matemáticas y físicas) en la Universidad de Oxford. Su primer artículo fue *“What is the fourth dimension?”*, publicado en la revista de la Universidad de Dublín en 1880 y entre otras cuestiones discutía sobre un mundo bidimensional. Este artículo fue publicado de nuevo en la revista del Colegio de Mujeres Cheltenham en 1883 y transformado en un panfleto, con el inadecuado y comercial título *“Ghosts Explained”* para Swann Sonnenschein & Co. en 1884, donde publicó otros nueve panfletos recogidos en la obra *“Scientific Romances”*. Los dos libros que recogen fundamentalmente su filosofía son *“A New Era of Thoughts”* (1888) y *“Tite Fourth Dimension”* (1904). Su última obra publicada fue *“An episode of Flatland”* (1904) en el que discute sobre un mundo de dimensión dos y que parece ser que escribió en 1884 (sin ninguna conexión con el Flatland de Abbott, aunque esto si nos sugiere que es bastante posible que ambos personajes coincidieran en alguna tertulia o con gente de sus entornos). A continuación, daremos algunas pinceladas sobre su vida. Nació en Londres en 1853. Su padre, James, paso de ser un medico del oído a un filosofo- religioso en defensa de una nueva moralidad sexual. Se rodeó en estos últimos años de un círculo de admiradoras, con las cuales mantenía relaciones sexuales. Solía decir: *“Cristo fue el salvador de los hombres, pero yo lo soy de las mujeres, y no le envidio a él en nada”*. Ch. H. Hinton se graduó en Oxford en 1877 y se casó con Mary Boole, la hija mayor de O. Boole (quien introdujo las álgebras de Boole), y en 1880 obtuvo un puesto como profesor de ciencias en la Escuela de Uppingham, aunque siguió trabajando para obtener la Licenciatura en matemáticas. A pesar de su educación, Hinton se sentía a la deriva, ya que pensaba que todos esos conocimientos no le llevaban a un conocimiento real y fue este sentimiento el que le embarcó en viajes como el de la visualización mediante sus famosos cubos.

Hinton podía haber disfrutado de una vida confortable similar a la que tuvo su padre: tuvo cierta fama en esa época, era respetado como escritor por los intelectuales de la época y además con mucho éxito entre las mujeres. El desastre llegó cuando en 1885 fue acusado de bigamia. Entonces, perdió su trabajo y sufrió una especie de exilio. Primero viajó a Yokohama (Japón), a una escuela de enseñanza media, luego se marchó a EEUU, al Departamento de Matemáticas de la Universidad de Princeton, después a la de Minnesota y finalmente acabó en Washington, donde trabajó en un observatorio naval y en la Oficina de Patentes<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Curiosamente, en 1905, mientras Hinton, cercano al final de su vida, estaba en la Oficina de Patentes de Washington, y acababa de publicar su obra *“La Cuarta Dimensión”* (1904), el joven Einstein, en el inicio de

Una de las preocupaciones de Hinton era la de la visualización, tengamos en cuenta que en aquella época no existían los programas gráficos que existen en la actualidad. En primer lugar, estaba preocupado por el problema de la visualización de objetos en tres dimensiones. Para resolver ese problema, él tuvo la idea de memorizar un cubo formado por  $36 \times 36 \times 36$  cubitos, asignándole un nombre en latín de dos palabras (por ejemplo, “Glans Frenum”) a cada uno de los 46.656 cubitos, y aprendió a utilizarlo como si fuera un tipo de papel sólido. Cuando él quería visualizar algún objeto tridimensional, lo hacía ajustando su medida para que entrara en su cubo y entonces podía describir su estructura recitando las celdas ocupadas. Aunque esto suena increíble, realmente no es imposible y además, Hinton ideó un sistema para reducir el número de datos a memorizar. Aunque parezca una idea loca, esta fue una fantástica fuente de inspiración para Hinton. Desde el punto de vista de la cuarta dimensión, él creó una especie de retina cuatridimensional, como veremos más adelante. Además, esto le inspiró para aprender a pensar cuatridimensionalmente manipulando 81 cubos de colores correspondientes a un  $3 \times 3 \times 3 \times 3$  hipercubo.

Aprovechemos que Hinton se preocupó por la divulgación de este tema, la cuarta dimensión, para hablar de una forma sencilla, intuitiva y somera de algunas curiosidades.

- **Mirando desde la cuarta dimensión.**

Imaginemos que nuestro universo tridimensional forma parte de un espacio de dimensión cuatro, entonces nuestro mundo dividirá a este hiperespacio en dos regiones (al igual que un plano divide al espacio de dimensión tres) y Hinton sugiere los nombres de *Ana* y de *Katta*, para ser utilizados, más o menos, como las palabras “arriba” y “abajo”. Por poner un ejemplo, que algunos cristianos interesados por la cuarta dimensión han utilizado, podríamos pensar como el cielo perteneciente a Ana, por encima de nuestro mundo, y del infierno como parte de Katta.



Figura 9: El cuadrado visto por la esfera

Ahora, nos podemos cuestionar cómo nos vería un ser de dimensión cuatro mirando desde Ana a nuestro mundo. Volvamos a Flatland y a sus habitantes (o si lo preferimos pensemos que estamos viendo una ameba por un microscopio, que es un ser bidimensional que habita entre los dos cristales). Tanto en el caso de la esfera que “visita” Flatland, como en el caso del biólogo, ¿cómo ven estos a los seres bidimensionales? La respuesta es que ven todo su perímetro exterior y también ven su interior, como queda de manifiesto en la figura 9. Al igual que vimos en la figura 3 que ocurre con las casas. Es interesante destacar que los habitantes de Flatland se ven unos a otros un lado de su perímetro, de hecho se ven casi como segmentos (salvo por la profundidad); mientras que la esfera les ve todo su perímetro y su interior.

Pensemos ahora en nosotros, seres tridimensionales, ¿cómo nos vemos entre nosotros? Nos vemos un lado de nuestra superficie exterior, casi como planos (salvo por la profundidad). Pero, ¿cómo nos vería un ser cuatridimensional? Nos vería toda nuestra superficie exterior, es decir, por todas partes, y también nos vería nuestro interior (nuestro corazón, pulmones, venas,...). Y nos vería todo esto de un sólo vistazo, sin necesidad de diferentes puntos de vista, al igual que ocurre con la visión que la esfera tiene de los habitantes de Planilandia. Un médico de la cuarta dimensión podría examinar nuestro interior si padeciésemos alguna dolencia, y operarnos si fuese necesario, sin necesidad de cortar nuestro cuerpo, nuestra piel, para llegar al lugar afectado. Imaginemos una grave afección que consiste en la obstrucción de alguna de nuestras venas, el médico podría limpiarla sin necesidad de ninguna complicada intervención, como ocurre en la actualidad.

- **Una visita desde la cuarta dimensión.** Otra cuestión interesante es la opuesta a la anterior, es decir, la de cómo veríamos nosotros, habitantes de este espacio tridimensional, a un ser de dimensión cuatro cayendo a través de nuestro espacio o visitándonos (siguiendo con la analogía cristiana, a un ángel pasando del cielo al infierno o viniendo a vernos a la tierra). Una creencia habitual, por ejemplo entre los que creen que los espíritus son seres

cuatridimensionales, es la de pensar que nosotros veríamos a un tal ser como una unidad y semejante a nosotros. Sin embargo, la realidad sería más bien otra. Volviendo a Flatland, en la figura 10 podemos observar que vería nuestro amigo el cuadrado si uno de nosotros atravesara su mundo. Serían secciones de nuestro cuerpo, compuestas por un cierto número de formas irregulares cuyo perímetro exterior estaría formado por nuestra piel, o parte de nuestros ojos, o ... Si pasásemos nuestra mano, con los dedos por delante, a través de Planilandia cualquiera de sus habitantes vería cinco círculos rodeados de piel y pelos.

Un “hiperser” atravesando nuestro universo produciría un efecto similar, pero teniendo en cuenta el significado de la dimensión extra (en la figura 11 se ve un dibujo jocoso” de esta situación). Siguiendo la analogía de nuestros dedos atravesando Flatland, podríamos ver unas cuantas bolas rodeadas de piel y pelos, o también otras formas extrañas producto de la intersección del hiperser (aunque aquí tenemos una incógnita sobre la que no vamos a entrar a discutir, que es la forma que tendría un hiperser en su espacio) con nuestro espacio tridimensional. Eso sí, no parece que tenga sentido que fuese una unidad y semejante a nosotros. ¿O sí?

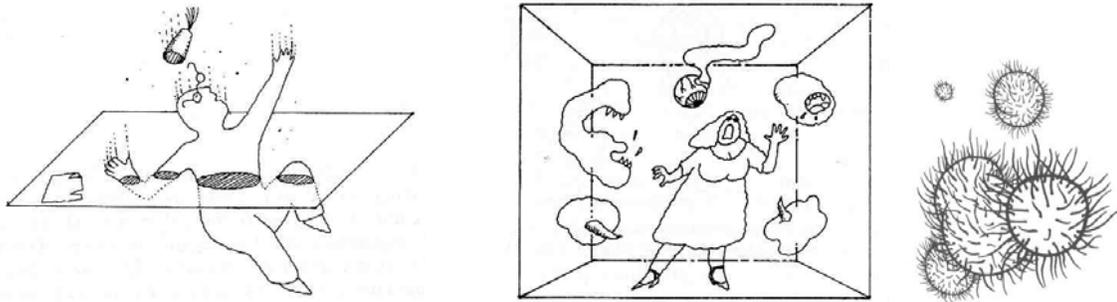


Figura 10: Hombre cayendo a través de Flatland    Figura 11: secciones de un habitante de la 4D y sus dedos

• **La magia de la cuarta dimensión.** La cuarta dimensión tiene algunos aspectos que para nosotros habitantes de Espaciolandia nos parecen mágicos, como el hecho de que podemos salir de una habitación completamente cenada o podemos robar dinero de una caja fuerte sin abrirla (e incluso, sin que nadie nos vea), leer el contenido de una carta cenada, bebemos una Coca Cola sin abrir la botella, separar dos anillos enlazados o deshacer un nudo sin romper la cuerda. Un médico cuatridimensional podría operarnos del apéndice o del corazón, sin necesidad de practicar un corte en nuestra piel. Todas estas cuestiones se basan en la misma idea, salir de nuestro mundo a Ana, o a Katta, para regresar después con la acción realizada. Imaginemos que nos encontramos en una cárcel, de la que obviamente no podríamos salir en nuestro mundo de dimensión tres, sin embargo, viajando a través de la cuarta dimensión podríamos salir de la cárcel, saliendo de nuestro mundo, y regresar de nuevo en el punto que sea de nuestro interés. Si volvemos a utilizar la analogía dimensional y pensamos en Flatland comprenderemos mejor estas ideas.

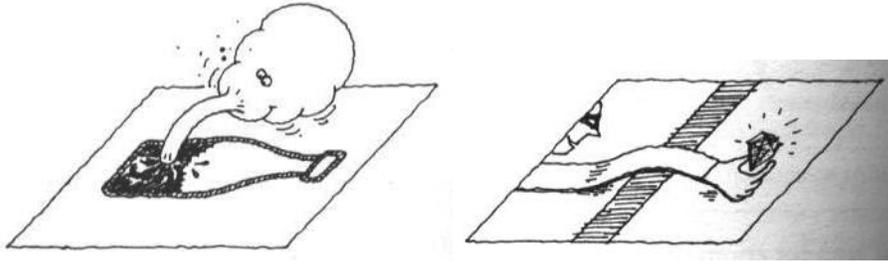


Figura 12: magia 4D

• **Simetría.** Otra interesante cuestión a discutir es la de la simetría, que podemos relacionar, para darle un poco más de interés al tema, con la pregunta ¿cómo podemos saber si una persona ha viajado a través de la cuarta dimensión? Siguiendo con la analogía dimensional volvamos de nuevo al mundo del cuadrado. Si rotamos a nuestro amigo el cuadrado alrededor de una de las líneas que lo cruzan (como se ve en la figura 13), obtendríamos su imagen “a través del espejo”. Esta situación también la obtenemos si sacamos al cuadrado de Flatland, lo rotamos en el espacio y lo devolvemos a su mundo. Supongamos que los habitantes de Flatland con su cabeza apuntando al norte, tienen su ojo en su parte noreste y su boca hacia el este. Si rotamos al cuadrado a través de un eje norte-sur obtendríamos su imagen a través del espejo, es decir, el ojo hacia el noroeste y su boca hacia el oeste. Como no existe ningún habitante en Flatland con esa configuración, si nuestro cuadrado se encontrase con alguien así podría afirmar que ha viajado a través de la cuarta dimensión (aunque sólo sea en el giro).

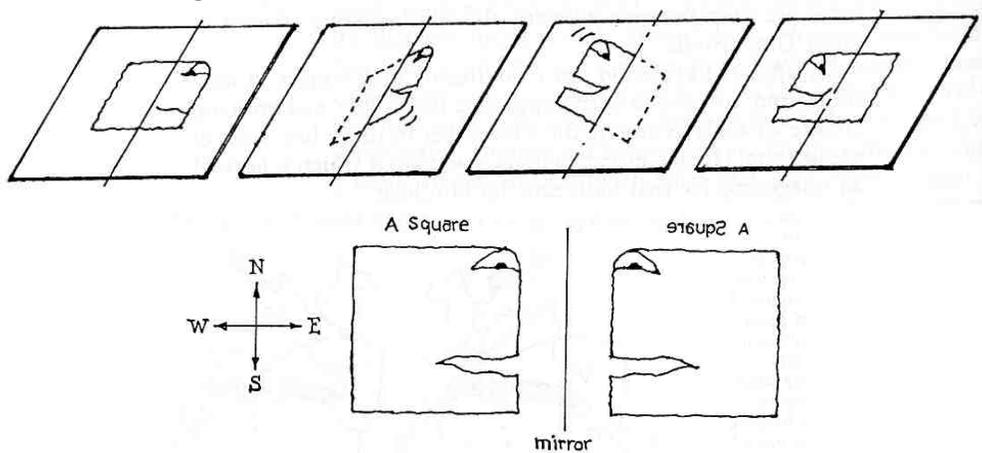


Figura 13: Cuadrado girado y su imagen a través del espejo

Pensemos ahora que a nosotros nos giran (obsérvese que ahora un giro en el espacio de dimensión cuatro es alrededor de un plano) en el espacio de dimensión cuatro alrededor de un plano que nos atraviesa de arriba a abajo (o que nos giran en el espacio de dimensión cuatro), entonces se obtendría como resultado a nosotros mismos pero “dados la vuelta”, es decir, lo que antes teníamos en la izquierda ahora esta en la derecha, como

por ejemplo el corazón, y al revés (véase el gracioso dibujo del pirata de la figura 14).

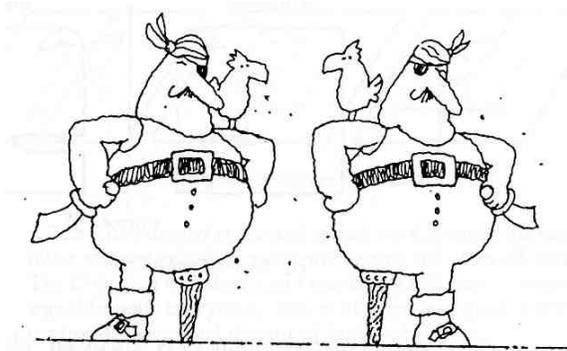


Figura 14: Pirata antes y después del viaje 4D

Observemos que cuando nos miramos en el espejo es precisamente la imagen que vemos, nuestro “hermano simétrico”, a quien tendríamos en nuestro mundo si nos girásemos en la cuarta dimensión. Nuestro “hermano simétrico” no puede ser nunca un habitante de nuestro mundo tridimensional, ya que tiene una morfología imposible en nuestro universo (corazón a la derecha,...). Luego, todas las mañanas nuestro espejo nos muestra una imagen “imposible”, mientras nosotros levantamos nuestra mano izquierda, nuestra imagen levanta “su” mano derecha, si cerramos el ojo derecho nuestra imagen cierra su ojo izquierdo... Pero, ¿como debería ser un espejo que nos devolviese exactamente nuestra “propia imagen”? Pensemos en dos espejos que se cruzan por la mitad, al mirarnos el doble reflejo de nuestra imagen hace que lo que vemos sea nuestra imagen que sí es de este mundo, la imagen que se obtiene es la misma que si nos giramos alrededor del eje de intersección de los espejos...

## 2.4 Dioses y Fantasmas: Espiritismo, Religión, Misticismo

Muchos pensadores de finales del siglo XIX y principios del XX dedicaron sus esfuerzos al entendimiento de la cuarta dimensión y al desarrollo de sistemas de pensamiento ligados a la misma, pero desde diferentes perspectivas y muchas de ellas se mezclaban entre sí. En este apartado vamos a tratar muy brevemente de mostrar algunas de estas corrientes de pensamiento, pero desde la óptica de las creencias.

- **Espiritismo.** El espiritismo, es decir, la creencia de que los espíritus de los muertos están cercanos y deseosos de contactar con nosotros, nunca ha sido tan popular como a finales del siglo XIX. En esa época, una infinidad de médiums organizaban, a lo largo de EEUU y de Europa, innumerables sesiones para contactar con los espíritus. Los médiums estaban siempre bajo sospecha de fraude, ya que este mundo estaba lleno de anécdotas coloristas y parafernalia, pero nada de investigación científica. Los pocos científicos que creían en el espiritismo, trataron de encontrar algún tipo de sólida teoría en la cual apoyar la creencia en fantasmas y espíritus. En este sentido, existieron dos tendencias: i) la primera, *más* popular entre los primeros espiritistas, era que los espíritus son seres tridimensionales inmateriales, que están formados por “ectoplasma” o por “energía vibracional”. Aunque si son inmateriales, ¿cómo podían mover los objetos en las sesiones de los médiums?; ii) mientras que la tendencia *más* apoyada a finales del siglo XIX, era que los espíritus son seres materiales, luego si no se les ve habitualmente es porque están fuera de nuestro espacio (por ejemplo, espíritus que viven en la cuarta dimensión) y nos visitan a su antojo.

La persona que hizo *más* popular la noción espiritista de los fantasmas o espíritus como seres de la cuarta dimensión, fue Johann Carl Friedrich Zöllner (1834-1882). Zöllner era profesor de Astronomía en la Universidad de Leipzig. En un viaje a Inglaterra entró en contacto con Henri Slade, un médium norteamericano que acababa de salir de la cárcel por fraude. En el libro *“Trascendental Physics”* (1878) Zöllner explica los experimentos que realizó junto a Slade para demostrar la existencia de espíritus cuatridimensionales. Algunos de los experimentos fueron: i) dados dos anillos de madera, uno de los experimentos consistía en que los espíritus los debían enlazar sin romperlos, a través de la cuarta dimensión; ii) el experimento de la cuerda de Zöllner consistía en hacer un nudo a una cuerda que estaba sellada en sus extremos, por supuesto con el sello del propio Zöllner (véase la figura 14); iii) los productos de la naturaleza suelen tener disposiciones según las cuales una de sus partes tiene una cierta dirección, como por ejemplo las caracolas de mar o las conchas, y una simetría cambiaría dicha dirección al obtener su imagen a través del espejo.

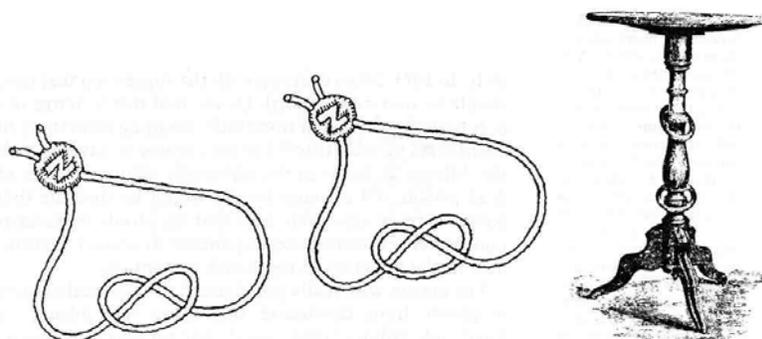


Figura 15: La cuerda de Zöllner y los anillos alrededor de una pata de mesa

Pero, ¿tuvieron éxito los experimentos de Zöllner y Slade? La respuesta, por desgracia para ellos, es que no. Los espíritus no hicieron lo que Zöllner esperaba sino que pusieron los anillos alrededor de la pata de una mesa, movieron la caracola de encima de la mesa al suelo,... Muy pocos científicos quedaron satisfechos con las explicaciones de Zöllner y más bien se pensó que había sido engañado por Slade. El efecto que tuvo el trabajo de Zöllner fue convertir en aquellos años (1878) a la cuarta dimensión en algo con muy mala reputación y alejado completamente de cualquier pensamiento científico. Sin embargo, la idea de que los espíritus son seres de la cuarta dimensión fue recogida a finales de ese siglo por los pastores protestantes ingleses, como por ejemplo Edwin Abbott entre otros.

• **Religión.** Hablando de forma sencilla sobre este tema, podemos ver dos orientaciones entre las personas que utilizaron la cuarta dimensión dentro de sus preocupaciones teológicas. Por un lado tenemos la postura ya comentada de Abbott, *“no podemos llegar a Dios a través de la cuarta dimensión, a través de la ciencia”*. Sin embargo, hubo muchos otros (cristianos, protestantes,...) que adoptaron de forma entusiasta la creencia de que el cielo, el infierno, nuestras almas, los ángeles y Dios mismo podrían estar “confortablemente alojados” en la cuarta dimensión (o en una dimensión superior). Las ideas de este espiritualismo pueden encontrarse en el libro de A. T. Schofield *“Another World”* (1888).

*“Debemos llegar a la conclusión, por tanto, de que un mundo superior al nuestro no sólo*

*es posible, sino probable; segundo, que tal mundo puede considerarse un mundo cuatridimensional, y tercero, que el mundo espiritual está de acuerdo en sus leyes misteriosas, en su lenguaje, que a nosotros nos parece tontería, en sus apariciones e interposiciones milagrosas, en su excelsa exigencia de omnisciencia, omnividencia, etc..., y en otros particulares, con lo que por analogía, serían leyes, el lenguaje y exigencias de la cuarta dimensión...*

*Aunque el glorioso universo material se extienda más allá de los límites externos de nuestra visión, aun cuando la ayudemos artificialmente con los telescopios más poderosos, esto no impide que el mundo espiritual y sus seres, y el cielo, y el infierno están a nuestro lado mismo..."*

Dos pequeñas pegas a la visión de Schofield. Contrariamente a la creencia usual y a la idea de Schofield, si un ángel o un espíritu -como seres cuatridimensionales- atravesase nuestro mundo, él no sería a priori un solo ente y de aspecto similar a los hombres, como ya hemos puesto de manifiesto en el apartado dedicado a Hinton.

Por otra parte, ¿Porqué Dios en su perfección tendría que elegir la cuarta dimensión o cualquier otra dimensión superior para "existir/vivir"? Quizás habría que pensar en un espacio de dimensión infinita para su existencia. Este tipo de reflexión ya lo realizaron los filósofos de la cuarta dimensión del siglo XIX. El propio Hinton escribía que es como si imaginamos que la tierra descansa sobre el caparazón de una tortuga, entonces esta podría a su vez descansar sobre el caparazón de una tortuga, y así hasta el infinito<sup>5</sup>. El teólogo Arthur Willink compartía este punto de vista, como lo manifiesta en su trabajo "*The World of the Unseen*" (1893) en el que afirma que Dios habita el espacio infinito dimensional.

*"Es necesario avanzar más y reconocer una extensión muy amplia de la idea de Espacio Superior que no queda en modo alguno agotada cuando se alcanza la concepción de un Espacio de Cuatro Dimensiones... Cuando hemos reconocido la existencia de un Espacio de Cuatro Dimensiones, no hay grandes impedimentos para el reconocimiento de un Espacio de Cinco Dimensiones, y así hasta el Espacio de un número infinito de Dimensiones..."*

*Y aunque es imposible siquiera comenzar a imaginar qué apariencia tendría un objeto material de nuestro Espacio para un observador de un Espacio Superior resulta evidente que tendría una visión infinitamente más perfecta de sus constituyentes que un observador de cualquier región de un Espacio Inferior mientras que a un ojo del Espacio Más Superior de todos, se le revelarían los secretos más ocultos de las cosas.*

*Esto recalca con fuerza lo que se ha dicho sobre la Omnisciencia de Dios. Ya que Él, que mora en el Espacio Superior no sólo tiene una visión perfecta de todo lo que constituye*

---

<sup>5</sup> Hinton hace aquí referencia a las antiguas creencias. Los chinos sostenían que el mundo descansaba sobre las espaldas de una tortuga. Para los hindúes, la tierra estaba sostenida por los lomos de cuatro elefantes que a su vez descansaban sobre el caparazón de una tortuga gigantesca que flotaba sobre las aguas del universo. Existen creencias parecidas en distintas culturas, para los griegos la tierra descansaba en las espaldas de Atlas, para los Mayas sobre la espalda de un cocodrilo,...

*nuestro ser sino que también está infinitamente más cerca de cada punto y cada partícula de nuestra constitución. De modo que, en el sentido más estrictamente físico, es cierto que en Él vivimos y nos movemos y que posee nuestro ser”*

Es de mencionar que en ese mismo tiempo los matemáticos Richard Dedekind y sobre todo Georg Cantor realizaron sus estudios matemáticos (quizás por primera vez en la historia con un cierto rigor) del infinito. Posteriormente, a principios de siglo XX el matemático David Hilbert introducía los espacios de dimensión infinita en los que podemos medir distancias (los espacios de Hilbert).

• **Misticismo.** P. D. Ouspensky comenta en su ensayo “*The Fourth Dimension*” (1908) que quizás no seamos seres de tres dimensiones como creemos. Para él si la cuarta dimensión existe, entonces una de las dos cuestiones siguientes es posible, o nosotros somos seres cuatridimensionales o sólo poseemos tres dimensiones y entonces no tenemos existencia. Si existiendo la cuarta dimensión, nosotros somos seres tridimensionales, esto significaría que no tendríamos existencia real, que sólo existiríamos en la mente de algún ser “supremo” y todos nuestros pensamientos, sentimientos, actos,... no son más que producto de la mente de ese ser, donde se desarrolla nuestra artificial existencia. Si no creemos ser seres pertenecientes a un mundo que depende de un ser superior, de sus caprichos, entonces debemos de ser seres con cuatro dimensiones. Es decir, nosotros, y no sólo espíritus o fantasmas, somos seres de cuatro dimensiones, pero sólo una parte de nosotros vive en nuestro universo y somos conscientes sólo de esta parte de nuestro cuerpo, de nuestro ser. Es decir, somos seres que vivimos un tipo de condición, de existencia (la cuarta dimensión), pero sólo somos conscientes de parte, o nos imaginamos a nosotros ser otra cosa, seres tridimensionales. Recordemos a este respecto el mito de la caverna de Platón. Para Hinton y Ouspensky la cuarta dimensión no es sólo un concepto espacial, sino un tipo de conocimiento, una toma de conciencia de una realidad. Para ellos el estudio matemático de la cuarta dimensión lleva de forma natural a una de las creencias del misticismo, que de forma sencilla podemos resumir como

### **Todo es Uno, y el Uno es incognoscible<sup>6</sup>.**

El “Uno” místico es el medio en que podemos alcanzar la unidad universal, es el hiperespacio que lo engloba todo (lo lejano y lo cercano, lo pasado y lo futuro, lo real y lo imaginario,...) junto en una gran unidad (la llamada unidad del misticismo), que mientras que para ellos es el hiperespacio, para otros es Dios, el Absoluto, el Todo o lo que el lector quiera, pero no lo podemos representar con símbolos humanos, lo que nos lleva a la segunda afirmación “el Uno es incognoscible”. Pero, ¿qué nos quiere decir este pensamiento? Desde el punto de vista místico, nosotros podemos entender y saber qué es el Uno, en el sentido de que podemos sentir el espacio a nuestro alrededor o podemos abrir nuestros corazones para sentir vida, belleza, amor. Sin embargo, es sólo para la mente racional que es incognoscible. Utilizaremos una sencilla analogía para entender esto, los números naturales  $N=\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ . Dada la idea de número, podemos entender qué es

---

<sup>6</sup> Véase también el ensayo de Hinton, “*Many Dimensions*” (1885).

N, pero si insistimos en el conocimiento completo, es decir, la lista de todos los números naturales, entonces N nos es inalcanzable, incognoscible.

## 2.5 La Cuarta Dimensión en la Literatura

En la creación literaria de finales del siglo XIX y del siglo XX, se encuentran un número considerable de obras influenciadas, que hacen referencia o uso en sus argumentos de la cuarta dimensión. De entre ellas citaremos una muestra, fundamentalmente del siglo XIX, que aunque escueta sí muy interesante.

**Charles L. Dodgson (Lewis Carroll).** “*Dinámica de una partícula*” (1865), en él se describe un romance entre un par de criaturas lineales sobre una superficie plana, haciéndose referencia al quinto postulado de Euclides; “*A Través del Espejo*” (1872), en esta continuación de “*Alicia en el País de las Maravillas*”, Lewis Carroll hace ciertas alusiones a la cuarta dimensión como las imágenes a través del espejo y la simetría en la cuarta dimensión.

**Fiodor Dostoievsky.** “*Los hermanos Karamazov*” (1880), Iván Karamazov se refiere a las dimensiones superiores y a las geometrías no Euclídeas en el curso de su especulación sobre la existencia de Dios.

**Enrique Gaspar.** “*El Anacronópete*” (1887), esta historia del dramaturgo español trata de un científico que construye una máquina del tiempo, el anacronópete (del griego, “ana” -atrás; “cronos” -tiempo; “petes” -el que vuela), y viaja junto a otros pasajeros a tiempos pasados, entre otros, a la comuna de París, la China del siglo III d. C., el último día de Pompeya o la creación del Universo. Esta obra de Gaspar se anticipa a la obra de H. G. Wells. Como anécdota hemos de decir que originalmente era una zarzuela, cuyo manuscrito original data de 1881 y que se conserva en la Biblioteca Nacional.

**Oscar Wilde.** “*El fantasma de Canterville*” (1891), Oscar Wilde escribe en cierto momento de este relato: “*no había tiempo que perder luego adoptando rápidamente la cuarta dimensión del espacio como un medio para escapan el fantasma desapareció como a través de la pared y la casa quedó en calma*”.

**Rudyard Kipling.** “*Un error en la cuarta dimensión*” (1894), relato corto publicado en la revista “*The Cosmopolitan*” (New York).

**H. G. Wells.** “*La máquina del tiempo*” (1895), como todo el mundo conoce en esta obra Wells considera el tiempo como la cuarta dimensión y abre la posibilidad de realizar viajes en el tiempo (en este caso el protagonista viaja al futuro); “*El remarcable caso de los ojos de Davidson*” (1895), Wells utiliza la idea de un pliegue de nuestro espacio dentro de la cuarta dimensión para hacer que Davidson pueda observar eventos de una isla de los mares del sur mientras está cómodamente en Londres; “*La visita maravillosa*” (1895), este relato está basado en la idea de mundos de tres dimensiones adyacentes dentro de la cuarta dimensión. Un ángel cae de su mundo celestial en un pueblo de Inglaterra. El ángel es consciente de la realidad cuatridimensional de la naturaleza de las cosas, y hace el papel de

la esfera de Flatland, donde los habitantes del pueblo inglés son “el cuadrado” de la historia; “*La historia de Plattner*” (1896-97), en este relato se habla del problema de la simetría. G. Plattner es un desafortunado profesor de ciencias en un instituto, que por una explosión química pasa a la cuarta dimensión y al regresar cuenta lo que allí vio. Además, la certeza de que estuvo en la cuarta dimensión la tienen al observar que tiene el corazón a la derecha; “*El hombre invisible*” (1897), en este libro podemos leer que el personaje principal adquiere su estatus de hombre invisible por una “*fórmula que es una expresión geométrica que implica la cuarta dimensión*”; “*El cuerpo robado*” (1906), de nuevo el personaje protagonista realiza un viaje a la cuarta dimensión y se explica lo que allí puede ver.

**George Macdonald.** “*Lilith*” (1895), en el cual también se habla de viajes a otros mundos, en relación a la cuarta dimensión.

**Joseph Conrad y Ford Madox Ford.** “*Los herederos*” (1901), los herederos son una raza “superhumana”, pero crueles y sin sentimientos, que vienen de la cuarta dimensión, y que se están apoderando de nuestro mundo.

**Gastón de Pawlowski.** “*Viaje al País de la cuarta dimensión*” (1912), Pawlowski es considerado, por su temática, el sucesor Francés de H. G. Wells en la ciencia ficción.

Finalmente me gustaría terminar con una lista de consagrados escritores del siglo XX que aludieron a la cuarta dimensión en sus escritos. **P. G. Wodehouse** (“*El pasmoso misterio del sombrero*”, 1922), **Marcel Proust** (“*En busca del tiempo perdido*”, 1919-1927), **William Faulkner** (“*Mientras agonizo*”, 1930), **Kurt Vonnegut** (“*Matadero Cinco, 1969*”), **Viadimir Nabokov** (“*Look at the Arlequines*”, 1970), **Lars Gustafsson** (“*Muerte de un Apicultor*”, 1978), **J. L. Borges**... Y sobre todo encontramos la cuarta dimensión en la Ciencia Ficción, como por ejemplo en algunas obras de **I. Asimov**, **N. Bond**, **A. C. Clarke**, **A. Deutsch**, **G. Gamov**, **F. Lenz**, **Lovecraft**, **L. Padgett**, **C. Simak**, **M. Smith**,... (véase un comentario más extenso en el libro de Cl. A. Pickover). Y acabamos con dos obras profundamente ligadas a la 4D, que son el relato corto “*And he built a crooked house*” (1940) de **Robert A. Heinlein**, en el cual un arquitecto construye una casa que es el despliegue en dimensión 3 del hiper cubo, y que una vez construida se pliega en la cuarta dimensión dejándole al arquitecto en su interior; y la novela de Madeleine L’Engle, “*A Wrinkle in time*” (1962), en la cual describe el hiper cubo.

### 3. Visualizando la Cuarta Dimensión

Una de las preocupaciones de finales del siglo XIX y principios del XX fue el problema de la visualización de la cuarta dimensión<sup>7</sup>. Para simplificar esta exposición nos vamos a limitar al problema de la visualización del objeto más sencillo, pero a la vez más representativo, de la cuarta dimensión, como es el hiper cubo. Ya hemos visto un primer ejemplo de intento de visualización del hiper cubo con el cubo de colores de Ch. H. Hinton. En esencia las técnicas para visualizar los objetos de la cuarta dimensión consisten en bajar

---

<sup>7</sup> Preocupación que sigue siendo actual en las disciplinas en las que se investigan o utilizan espacios de dimensión superior.

a una dimensión menos, a la tercera dimensión, mediante diferentes tipos de proyecciones, la realización de secciones,... Las técnicas que aquí vamos a mostrar, así como las imágenes que se generan, ya eran conocidas y manejadas popularmente en la época que estamos considerando. La descripción que aquí mostramos de las diferentes técnicas de visualización es más bien intuitiva, y con la analogía dimensional como herramienta para su comprensión.

Jules-Henri Poincaré, uno de los matemáticos y pensadores más importantes de su tiempo, en su libro *“Ciencia e Hipótesis”* (1902) discute ampliamente sobre el tema de la visualización de la cuarta dimensión. Podemos encontrar escrito en esta obra *“...de la misma forma que nosotros podemos pintar la perspectiva de una figura tridimensional sobre un plano, podemos también pintar una figura cuatridimensional sobre un lienzo de tres (o dos) dimensiones... [y estudiando el “grupo” de estas perspectivas] podemos decir que es posible para nosotros representar la cuarta dimensión”*, pensamiento que menciona el artista Marcel Duchamp en las reflexiones sobre su obra *“El Gran Cristal”* (1915- 1923). Para Poincaré era teóricamente posible “ver” la cuarta dimensión, pero solo para alguien *“que dedique su vida a ello”*.

### 3.1 La proyección ortogonal

Hay muchas formas de proyectar desde un espacio de dimensión  $n$  (en nuestro caso  $n = 4$ , la cuarta dimensión, aunque fijaremos primero nuestra atención en  $n = 3$ ) a un subespacio suyo de una dimensión menos. Las dos proyecciones en las que nos vamos a fijar en esta sección (las proyecciones ortogonal y central) son proyecciones geométricas, es decir, la imagen del objeto de estudio es la “sombra” sobre el subespacio (para  $n = 3$ , una superficie plana, como un muro o el suelo) que producen los rayos de luz que emanan desde un foco de luz lejano (tan lejano que para nosotros sea el infinito, lo que significa que los rayos de luz son paralelos; proyección ortogonal) o cercano (los rayos de luz salen de un punto; proyección central). Se pueden considerar otro tipo de proyecciones matemáticas que aunque interesantes no son tan intuitivas como las que aquí presentamos.

Todos estamos acostumbrados a pintar el dibujo de la figura 16 cuando nos piden que pintemos un cubo, pero ¿qué representa esta imagen? Esta imagen es la proyección ortogonal del cubo en un plano del espacio.

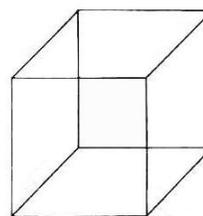


Figura 16: dibujo plano de un cubo

La proyección ortogonal es una aplicación del espacio  $n$ -dimensional en un subespacio suyo de dimensión  $n-1$  (por ejemplo, del espacio tridimensional en un plano o del espacio de dimensión 4 en un subespacio tridimensional suyo) que consiste en proyectar según una cierta dirección. Es decir, todos los puntos que estén en una de las rectas con la dirección dada se proyectan sobre el punto del subespacio que es intersección de este con la recta mencionada. Como comentábamos, podemos decir que la imagen de un objeto mediante la proyección ortogonal es la “sombra” que produce una fuente de rayos paralelos (en la dirección de la proyección) sobre el objeto al encontrar el subespacio pared.

En el caso del cubo proyectado sobre un plano obtenemos diferentes imágenes, como las que aparecen en la figura 17 (al proyectar según direcciones distintas).

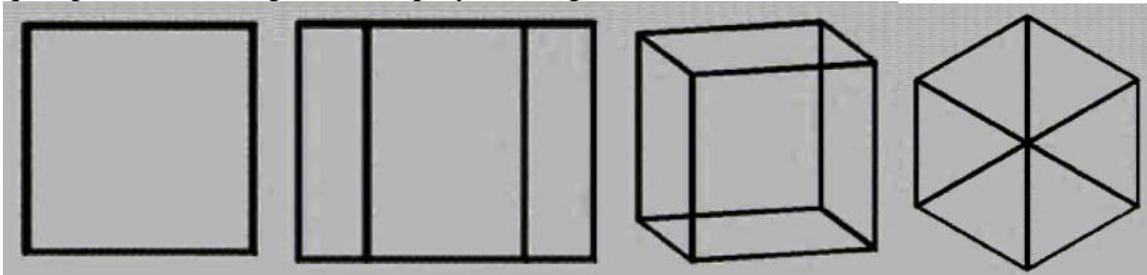


Figura 17: proyección ortogonal del cubo en el plano según distintas direcciones

La proyección ortogonal envía las rectas en rectas o puntos y preserva el paralelismo. Además, los segmentos paralelos de la misma longitud tienen imágenes de la misma longitud (segmentos de la misma longitud o puntos). Por lo tanto, si conocemos las imágenes de los tres lados que parten de un vértice del cubo, podemos completar (teniendo en cuenta las anteriores propiedades) la imagen proyectada del cubo sobre el plano, como muestra la figura 18.

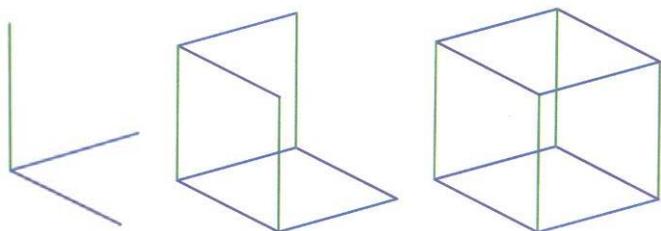


Figura 18: dibujando la proyección ortogonal

Una proyección ortogonal del hipercubo en el espacio tridimensional es la que aparece en la imagen de la figura 19, aunque si volvemos a proyectar sobre un plano (para poder tener un dibujo de esta proyección) se obtiene la clásica imagen de la figura 20 (que podemos pensar en ella como imagen 3D).

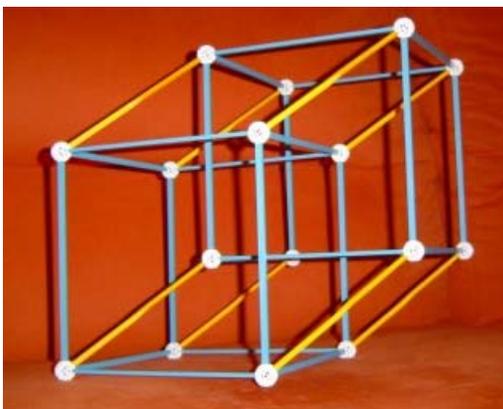


Figura 19: proyección ortogonal del hipercubo

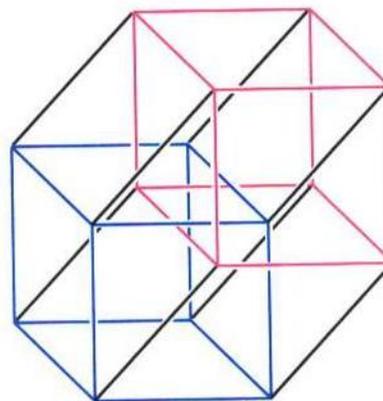


Figura 20: proyección ortogonal del hipercubo en el plano

De nuevo, a partir de la imagen de los cuatro lados que surgen de un vértice podemos completar la imagen del hipercubo (tanto en el espacio tridimensional, como en una hoja de papel).

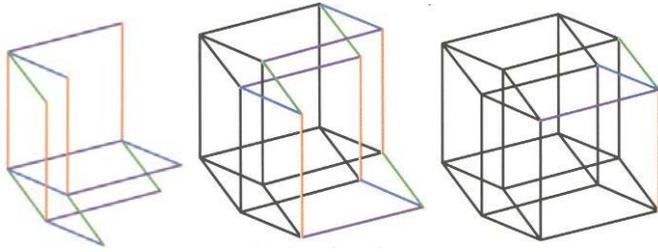


Figura 21: dibujando la proyección ortogonal

Aprovechemos este primer método de visualizar el hipercubo para introducir una técnica que ha sido muy importante en la visualización del hipercubo y de hecho, ha sido muy importante en el intento de comprender, de intuir, de imaginar..., la cuarta dimensión: el movimiento.

Podemos pensar en la imagen del cubo proyectado ortogonalmente como la imagen de un cuadrado que se desplaza en una cierta dirección. O la del hipercubo como el cubo moviéndose (véase la figura 22). Y así seguir en dimensiones superiores...

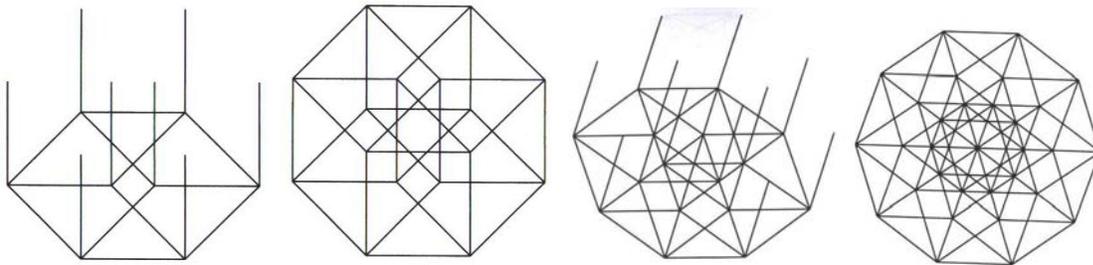


Figura 22: el movimiento de un cubo genera un 4-cubo o hipercubo, y el de este un 5-cubo

Para tener una buena imagen mental del espacio cuatridimensional generado por el movimiento o de lo que podemos llamar espacio-tiempo estático, volvamos a Flatland y a la analogía dimensional. Entonces, el espacio-tiempo sería un espacio tridimensional, donde la parte espacial estaría dada por el espacio bidimensional, Flatland, y pensaríamos en el tiempo como una dirección perpendicular al espacio. Como ejemplo pensemos en la escena siguiente. Nuestro cuadrado, protagonista del libro de Abbott, se encuentra parado delante de su casa, cuando se le acerca un triángulo a preguntarle algo y luego se marcha. En el espacio-tiempo tendríamos un “raíl” cuadrado y recto que se correspondería al cuadrado que ha permanecido quieto y un “raíl” triangular que se acerca y se aleja del otro y que se corresponde con el movimiento del triángulo, como muestra la figura 23.

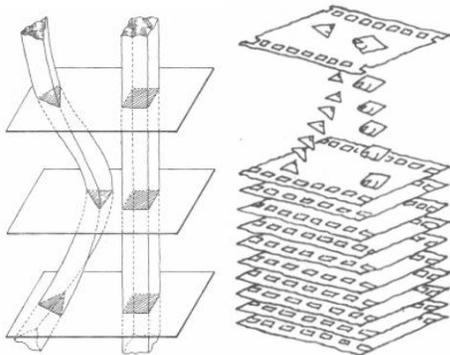


Figura 23: Representación estática del espacio-tiempo de Flatland

Por lo tanto, el espacio-tiempo es un espacio de dimensión tres tal que cada instante de tiempo es una sección bidimensional. Hablamos de una concepción estática del espacio-tiempo, ya que cohabitan en él, pasado, presente y futuro. El estudio del espacio-tiempo estático nos lleva a la discusión del libre albedrío, la percepción del paso del tiempo, la mecánica cuántica y el universo ramificado,... interesantes temas que serán abordados en otro momento. Dos ejemplos del espacio-tiempo estático en la literatura nos los encontramos en “*Matadero Cinco*” de K. Vonnegut o en el comic “*Los vigilantes*” (superhéroes venidos a menos y el problema moral).

### 3.2 La proyección central o estereográfica

En la sección anterior, las imágenes que hemos obtenido del cubo y del hipercubo han sido “sombras” o proyecciones realizadas por “rayos de luz” paralelos (proyección ortogonal). Sin embargo, la “sombra” que genera un haz de luz que emana de un punto es distinta, o la imagen que obtiene nuestro ojo o una cámara. Si proyectamos un cubo en un plano mediante la proyección central a partir de tres puntos exteriores al cubo obtenemos las siguientes imágenes.

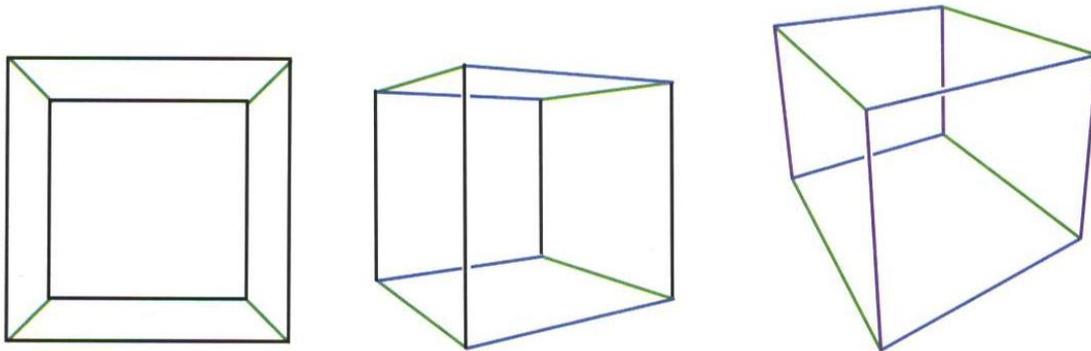


Figura 24: Proyecciones centrales (desde distintos focos) del cubo

Como vemos en estas imágenes, ahora no se preserva el paralelismo. Lo que sucede es que ahora las líneas paralelas tendrán como imagen líneas paralelas o líneas convergentes a un punto del “infinito” (llamado punto de desaparición o punto de fuga). Como vemos en la figura anterior, para un cubo, que tiene tres conjuntos de líneas paralelas (los lados), su imagen mediante esta proyección puede tener 1, 2 o 3 puntos de fuga. Además, para esta proyección, la imagen de las partes más cercanas al punto de proyección aparece más grande que la imagen de las partes más alejadas, es decir, dados dos segmentos del cubo de la misma longitud, sus imágenes tendrán distinta longitud, mayor la del segmento cercano al centro de proyección. Para tener una mejor imagen del cubo podemos considerar una secuencia de imágenes obtenidas al rotar el centro de proyección alrededor del cubo o

equivalentemente si rotamos el cubo alrededor de un eje vertical (figura 25).

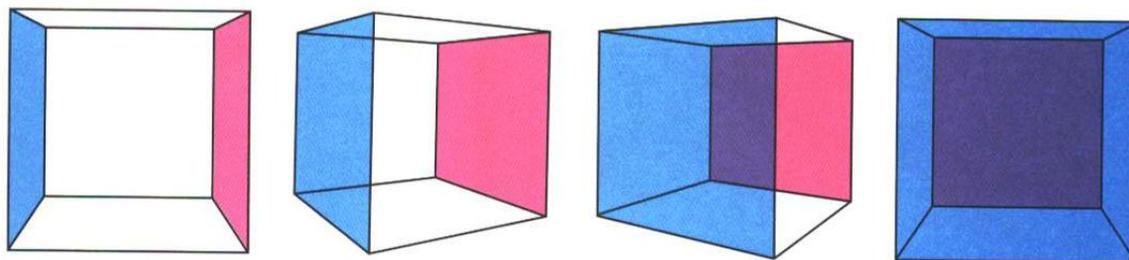


Figura 25: proyección central de una rotación de un cubo

De forma análoga a las imágenes en perspectiva del cubo (es decir, mediante la proyección central) podemos obtener las del hipercubo. También podemos fijarnos en su rotación. Uno de los documentos más interesantes a este respecto es la película “The Hypercube: Projections and Slicing” de Thomas Banchoff y Richard Strauss, que nos muestra las imágenes de las proyecciones del hipercubo y diferentes tipos de rotaciones.

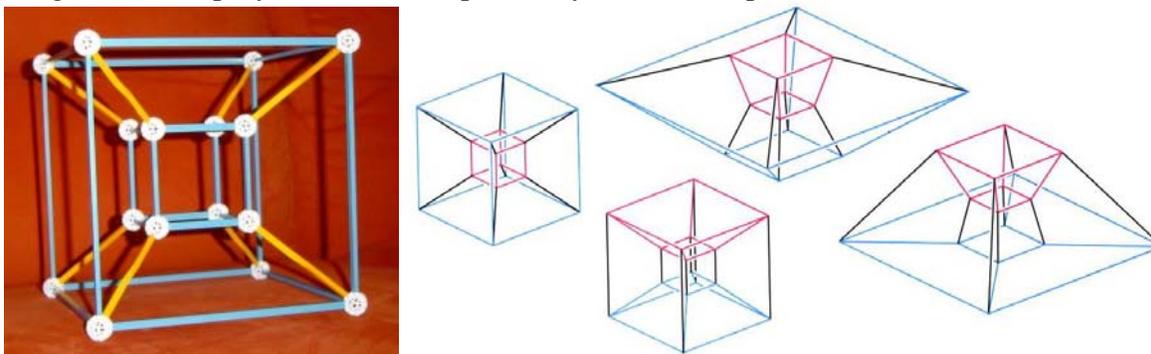


Figura 26: proyección central del hipercubo y de una de sus rotaciones

### 3.3 Secciones del hipercubo

Una forma de estudiar una flor por parte de los botánicos consistía en introducir la flor en un cubo y verter en él alguna sustancia que solidificase, para después cortar el cubo en finas rodajas. Examinando las diapositivas en secuencia se puede conocer la geometría interior de la flor. Gracias a los avances de la tecnología ya no tenemos que cortar el objeto centro de nuestro estudio en rodajas (pensemos en el estudio del cerebro humano, tanto vivo como muerto). Mediante el scanner o la resonancia magnética podemos obtener las secciones de la cabeza o el cuerpo de un paciente desde diferentes direcciones (y sin tener que cortarle la cabeza a nadie!).

Volviendo a Flatland, su autor hace uso de esta técnica para transferir información entre los diferentes universos dimensionales que aparecen. El cuadrado utiliza la “creación de rodajas” para describir Planilandia al rey de Linealandia (al atravesar este universo de dimensión uno) y la esfera al atravesar Planilandia, ante la perpleja mirada del cuadrado, intenta que este llegue a comprender la realidad de la existencia de la propia esfera y su universo. ¿Qué es lo que ve el cuadrado al atravesar la esfera Planilandia? De no haber nadie a su lado, pasa a ver un punto e inmediatamente después una circunferencia (a,un sacerdote de Planilandia?) que va aumentando y luego disminuyendo hasta pasar a un punto

y desaparecer. Lo mismo veríamos nosotros si nos visitase una hiperesfera, aunque en lugar de un círculo veríamos una esfera cambiando de tamaño. Nosotros, al igual que ocurre en los casos de dimensiones más bajas, no sabríamos si lo que estamos viendo es una hiperesfera que cruza nuestro espacio tridimensional o una esfera que va cambiando de tamaño a medida que pasa el tiempo.

En las siguientes imágenes podemos observar las rodajas que se producen en un cubo al cortar en direcciones que empiezan en una cara, un lado o un vértice. La secuencia más interesante y a la vez más difícil de visualizar es la secuencia que se produce cuando empezamos en un punto (estamos suponiendo que cortamos con planos perpendiculares a la diagonal que une ese punto y su opuesto). La secuencia empieza por el vértice para convertirse en un triángulo que va creciendo y termina por triángulos que van decreciendo hasta desaparecer en el vértice opuesto, pero ¿qué figura aparece en la mitad? Aunque pueda parecer sorprendente es un hexágono regular (es decir, sus seis lados iguales, con sus seis ángulos iguales). La respuesta es razonable. Veámoslo. Al principio tenemos triángulos hasta que sus vértices se encuentran con tres vértices del cubo, momento en que los triángulos se truncan formándose un polígono de seis lados (de distintas longitudes), que va modificándose hasta pasar de nuevo a un triángulo que va disminuyendo de tamaño, pero ahora estos triángulos tienen uno de sus vértices orientado en dirección contraria a uno de los vértices de los primeros triángulos, por lo tanto por simetría en el punto medio tenemos un hexágono regular.

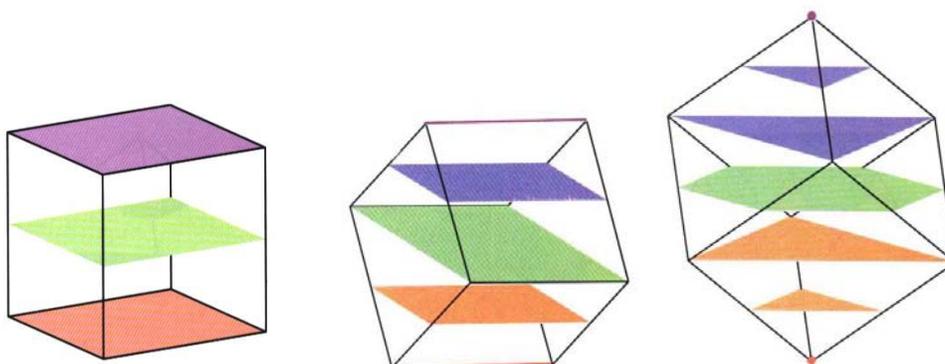


Figura 27: secciones del cubo

Si pasamos a la cuarta dimensión y al hipercubo, las secciones que obtendremos al cortar el hipercubo con un espacio tridimensional serán las que vemos a continuación, dependiendo de si nuestro cuchillo tridimensional empieza a cortar por una de las caras cúbicas de hipercubo, por un cuadrado, un segmento o un punto.

La secuencia más interesante se produce de nuevo cuando empezamos a cortar por un punto, ya que las figuras que van apareciendo son tetraedros, que se truncan hasta llegar a un poliedro cuyas caras son hexágonos y triángulos, hasta llegar al octaedro, y de nuevo hacia atrás. Como vemos nos aparecen dos de los cinco sólidos platónicos (=poliedros regulares convexos). Los otros tres son el cubo, el dodecaedro y el icosaedro.

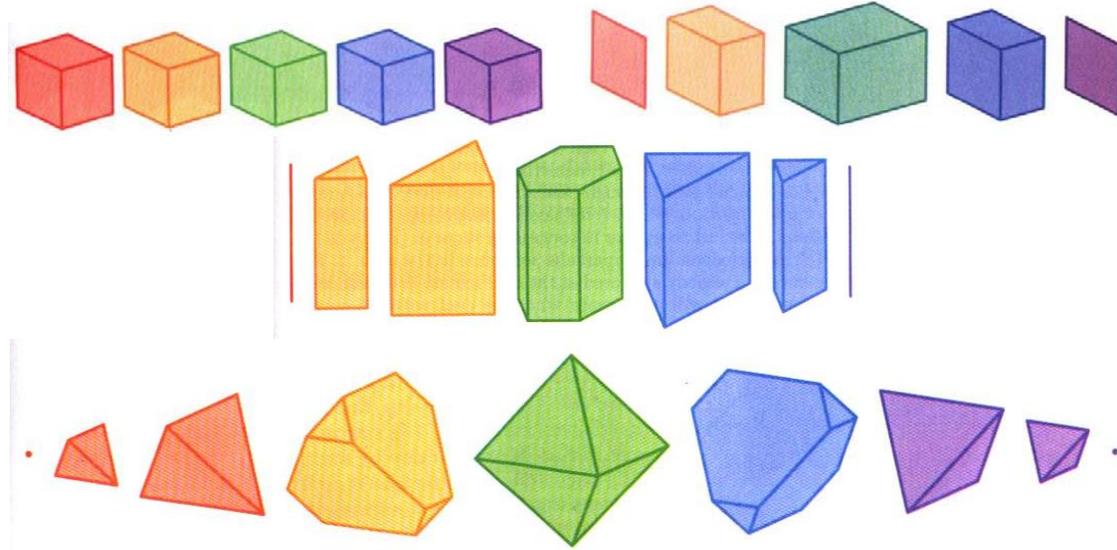


Figura 28: secciones del hipercubo

### 3.4 Desplegando el hipercubo

Otra técnica para la visualización del hipercubo es desplegarlo en el espacio tridimensional, es decir, desplegar las caras de la “hipercaja” que es el hipercubo (las caras de un hipercubo son los cubos exteriores que conforman la hipercaja o exterior del hipercubo, que son 8, mientras que el cubo tiene 6 caras, 6 cuadrados que forman su exterior, y el cuadrado tiene 4 caras, 4 segmentos).

Empecemos por el caso más sencillo. Imaginemos que el cuadrado protagonista de Flatland despliega una caja con forma cuadrada. Para ello rompe la caja cuadrada por uno de sus vértices y lo despliega sobre Linealandia. Lo que obtiene son cuatro segmentos iguales y unidos uno a continuación del otro (como muestra la figura 29).

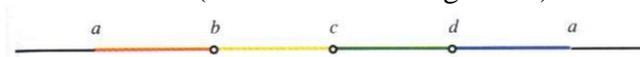


Figura 29: despliegue del cuadrado

Pasemos ahora al despliegue de una caja cúbica, es decir, a una caja de las que nosotros utilizamos habitualmente. Además, el pliegue y despliegue de una caja cúbica es algo a lo que estamos habituados. ¿Cómo se realiza el despliegue? Primero cortamos la tapa, es decir, cortamos tres lados de una de las caras del cubo, para a continuación cortar los cuatro lados de las caras laterales.

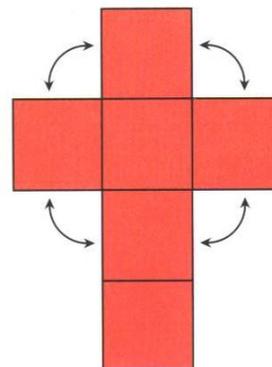


Figura 30: despliegue del cubo

Con esa operación nuestra caja cúbica se abrirá en la mesa en la que estemos trabajando (en el plano) formando uno de los despliegues del cubo (hay muchos más despliegues posibles), como muestra la siguiente imagen (figura 30). De pequeños seguro que todos hemos jugado a plegar y desplegar cajas o poliedros con formas cúbicas, de tetraedro, octaedro, icosaedro o dodecaedro.

Finalmente, tras introducirnos en el problema en las dimensiones 2 y 3, pasemos al despliegue de la hipercaja (haciendo uso de la analogía dimensional). El resultado que se obtiene es el que aparece en la figura 31.

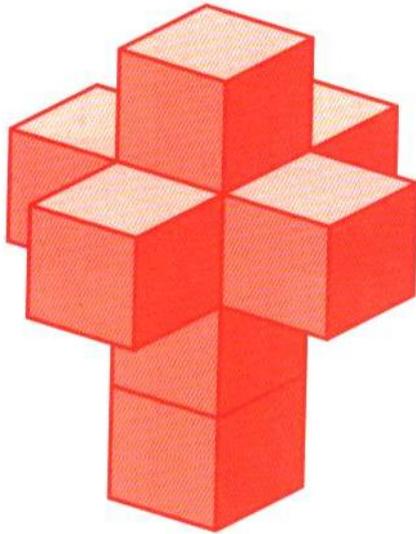


Figura 31: despliegue del hipercubo

Al igual que en los casos anteriores. Tomemos la “tapa superior” de nuestra hipercaja, es decir, una de las caras, que como sabemos es un cubo. Para abrir la hipercaja deberemos de soltar su tapa superior (que es cúbica), la cual está unida a otras 6 caras del hipercubo y para ellos cortamos por los cuadrados de contacto de 5 de estas caras cúbicas con nuestra cara-tapa superior. Ya está abierto el hipercubo. . . ahora nos faltan los cortes para desplegarlo. Se corta por los cuadrados que unen los 6 cubos que estaban en contacto con la tapa superior (nótese que se realizan 8 cortes). Por fin tenemos desplegado en nuestro espacio tridimensional la hipercaja...

#### 4. La Cuarta Dimensión en el Arte del siglo XX

La cuarta dimensión fue un símbolo de liberación y fuente de nuevas ideas para los artistas de la época, en particular, para el movimiento cubista. Estos querían romper con la perspectiva renacentista<sup>8</sup>, marcada por la visión-proyección de un ojo tridimensional, y la cuarta dimensión les dio la justificación para romper con ella.

En palabras de Albert Gleizes y Jean Metzinger, dos de los cubistas más teóricos, el pintor cubista no trata de pintar al objeto como él o el hombre en general lo ve, como correspondía a la perspectiva renacentista, sino que intentan pintar al objeto tal como es. Esto lo podemos apoyar con una graciosa anécdota de Pablo Picasso. Este iba viajando en un tren y un extraño le reconoció. Entonces, este personaje se le quejó a Picasso, ¿por qué no podía él pintar a la gente como realmente eran? ¿por qué tenía él que distorsionar el modo en que se veía a la gente? Entonces, Picasso le preguntó al hombre si tenía una foto de su familia. Después de observar la fotografía, Picasso le replicó, ¡Oh! ¿su mujer es realmente pequeña y plana?

---

<sup>8</sup> El impresionismo ya había realizado una ruptura con la perspectiva renacentista, pero de forma vaga y manteniendo el único plano de visión.

Con estos dos comentarios hemos expresado de forma sencilla el interés de los cubistas por romper con la perspectiva renacentista, es decir, pintar lo que el ojo ve dependiendo del punto de vista del pintor, y su interés por pintar al objeto tal como es, introduciendo diferentes puntos de vista en un mismo cuadro.

**¿Que relación tiene esto con la cuarta dimensión y por que fascino esta a los cubistas?**

La relación está en lo que ve un ojo cuatridimensional cuando mira objetos tridimensionales. Como ya hemos comentado anteriormente el ojo de un ser del espacio de dimensión cuatro ve toda la superficie exterior del objeto, es decir, lo ve desde todos los puntos de vista (pero además, también ve todo su interior) y esto es lo que cautivó a los cubistas en relación a la ruptura con la perspectiva renacentista.

Un ejemplo de pintura cubista utilizando múltiples puntos de vista lo tenemos en el “*Retrato de Marie-Thérèse Walter*” (Picasso, 1937).



Figura 32: Retrato de Marie- Thérèse Walter



Figura 33: Retrato de Vollard

Ya el sombrero de Marie-Thérèse nos indica dos puntos de vista diferentes del observador, uno por encima del sombrero y otro por debajo; la cara de este joven amor de Picasso (con un estilo cubista clásico) requiere un punto de vista para los ojos, otro para los labios y un tercero para la nariz; en el cuerpo podemos distinguir también más de un punto de vista; la silla necesita por lo menos dos puntos de vista, como muestran sus brazos; el suelo posiciona al observador por encima de esta mujer, mirando de arriba hacia abajo, mientras que el techo está pintado mirando de abajo hacia arriba.

En la práctica, el más frecuente tipo de deformación o distorsión en la pintura cubista fue el romper la figura en pequeños planos o caras, cada una de ellas marcando un punto de vista diferente, que en su conjunto conforman el cuadro con la intención de dar la sensación de ver al objeto pintado desde diferentes perspectivas (como muestra véase el cuadro “*Retrato de Vollard*”, Picasso, 1910).

En cuadros como “*Nude*” (1910)<sup>9</sup> de Metzinger los múltiples planos ayudan a destruir cualquier sensación de existencia tridimensional de la figura, sugiriendo la gran complejidad de un cuerpo en una dimensión superior. Otros dos ejemplo de obras de Metzinger son “*Tea Time*” (1911) y “*Dancer in a Café*” (1912).

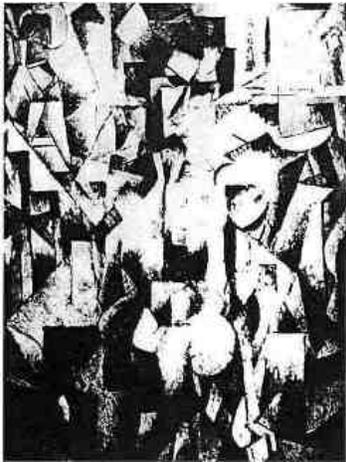


Figura 34: Nude



Figura 35: Tea Time

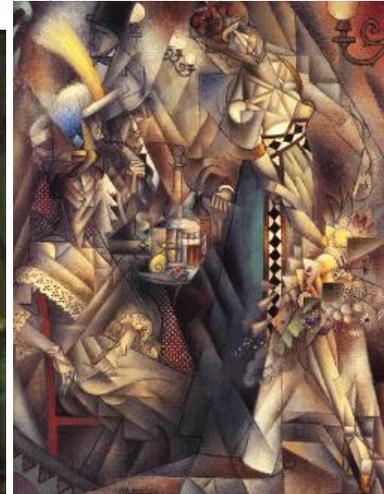


Figura 36: Dancer in a Café

Albert Gleizes y Jean Metzinger, fueron los cubistas (junto a los hermanos Duchamp Villon) que más se preocuparon en estudiar, discutir y trabajar sobre la cuarta dimensión. Le encargaron al matemático (que trabajaba en una agencia de seguros) M. Princet, habitual de las reuniones de los cubistas, que les enseñara geometría y, en particular, la relacionada con la cuarta dimensión. Fueron los promotores del **Grupo de Puteaux** (A. Gleizes, J. Metzinger, Juan Gris, Léger, Delauny, Villon, Duchamp-Villon, Duchamp, Picabia,...) dentro del cubismo y la cuarta dimensión fue un tema habitual en las reuniones de este grupo. Dentro del cubismo, P. Picasso y O. Braque siguieron otros caminos alejados de la cuarta dimensión y fue el “grupo de Puteaux” quien mantuvo su preocupación por el tema. Además de su interés por la matemáticas de la cuarta dimensión y la inclusión de Princet en el grupo, eran ávidos lectores de los geómetras E. Jouffret (“*Traite elementaire de geometrie á quatre dimensions*”, 1903; “*Melanges de geometrie á quatre dimensions*”, 1906) y E. Poincaré (“*Ciencia e Hipotesis*”, 1902).

Pero vayamos al que fue el punto de partida del cubismo: “*Les Femmes d’Alger (O. J. R.)*”, Pablo Picasso (1907). En este cuadro Picasso crea un nuevo lenguaje visual y marca el inicio del cubismo (en particular la ruptura con la perspectiva ya está presente) ¡y quizás del arte Moderno!. Esta obra fue presentada por Picasso a un grupo de personas cercanas y aún así fue muy mal recibido. Braque (uno de los cubistas más cercanos a Picasso) bromeó sobre el hecho de que Picasso había estado bebiendo, Leo Stein (mecenas del arte y en particular de Picasso durante mucho tiempo) dijo sarcásticamente “*Tu has estado tratando de pintar la cuarta dimensión,... ¡qué divertido!*”, Matisse consideró el cuadro una burla y juró hundir a Picasso, Schukin,... sólo el coleccionista Daniel-Henry Kahnweiler se interesó por el cuadro y se ofreció a comprarlo. Sin embargo, Picasso lo volvió a guardar y dijo que no estaba en venta. “*Les Femmes d’Alger (O. J. R.)*” no se expuso hasta 9 años más tarde.

<sup>9</sup> Esta obra se encuentra actualmente en paradero desconocido y no existen muchas imágenes del mismo.

Uno puede cuestionarse si realmente los cubistas estuvieron interesados por la cuarta dimensión. Vamos a considerar algunos escritos que ponen de manifiesto el interés por la cuarta dimensión por los artistas de principio del siglo XX y su relación con el cubismo, aunque aconsejamos a quien pueda estar interesado en tener más información acuda a la obra de E. D. Henderson.

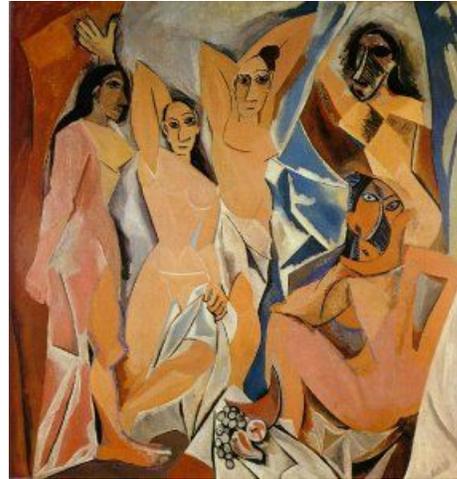


Figura 37: Les Demoiselles d'Avignon

En Julio de 1910 el pintor norteamericano Max Weber (que había estado en París entre 1905 y 1908, en contacto con Matisse y brevemente con Metzinger, Apollinaire y Picasso) publica en la revista "Camera Work" el artículo "*The Fourth Dimension from a Plastic Point of View*". El poeta Guillaume Apollinaire, con motivo de la Exposición de Arte Contemporáneo de 1911 imparte una conferencia sobre la cuarta dimensión. Unos días más tarde, Roger de la Fresnaye escribe a André Maré sobre lo interesante de la exhibición y de lo aplaudida que fue la conferencia de Apollinaire. En la revista "Les Soires de Paris" publica Apollinaire "*La nueva pintura*", que es una versión previa del capítulo III de su libro "*Los pintores cubistas*" (1913), aunque con mayor contenido sobre matemáticas y la cuarta dimensión que en el libro. Mucho del contenido de este artículo es similar al artículo de Weber.

Guilleme Apollinaire, "*Los Pintores Cubistas*":

Capítulo II: *Los jóvenes pintores de las escuelas extremadas tienen como fin secreto hacer pintura pura. Es un arte plástico enteramente nuevo. Sólo está en sus comienzos y todavía no es tan abstracto como quisiera. La mayoría de los pintores nuevos están haciendo matemáticas sin saberlo o sin saberlas pero no han abandonado todavía a la naturaleza, a la que interrogan para aprender de ella el camino de la vida.*

Capítulo III: *... Se ha reprochado enérgicamente a los pintores nuevos sus preocupaciones geométricas. Sin embargo, las figuras geométricas son lo esencial del dibujo. La geometría, ciencia que tiene por objeto la extensión, su medida y sus relaciones, ha sido siempre la regla misma de la pintura. Hasta ahora, las tres dimensiones de la geometría euclídeana bastaban a las inquietudes que nacían del sentimiento de infinito en el alma de los grandes artistas.*

*Los pintores nuevos no se han planteado ser geómetras, como tampoco lo hicieron sus ancestros. Pero puede decirse que la geometría es a las artes plásticas lo que la gramática es al arte del escritor Así pues, hoy, los sabios ya no se limitan a las tres dimensiones de la geometría euclídeana. Los pintores se han visto conducidos, natural y, por así decirlo, intuitivamente, a preocuparse por las nuevas medidas posibles de la extensión que en el*

*lenguaje de los mundillos modernos se designaban global y brevemente por el término de cuarta dimensión.*

*Tal y como se presenta en la mente, desde el punto de vista plástico, la cuarta dimensión estaría engendrada por las tres mediadas conocidas: configura la inmensidad del espacio eternizándose en todas las direcciones en un momento determinado. Es el espacio mismo, la dimensión del infinito; es la que dota a los objetos de plasticidad.”*

Albert Gleizes en una entrevista de 1912 dice: *“Pero, tras las tres dimensiones de Euclides nosotros hemos añadido una mas, la cuarta dimensión, que es, por así decir la configuración del espacio, la medida del infinito”*. Maurice Raynal en un artículo para *“Comoedia Illustré”* (1913) escribe *“Los Primitivos en lugar de pintar los objetos tal como ellos los veían, los pintaban tal como ellos los pensaban, y es precisamente esta ley la que los Cubistas han readoptado, amplificado y codificado bajo el nombre de cuarta dimensión”*. Y así podríamos añadir más referencias.

Además del cubismo, otros movimientos artísticos del siglo XX se han preocupado por la cuarta dimensión, entre los que citaremos Futurismo italiano y Ruso, Supremacismo, Constructivismo, Modernismo Americano, De Stijl, Surrealismo y el “movimiento Dada”, ... y también podemos citar algunos de los nombres propios de dichos movimientos, además de los cubistas nombrados, como Henri Laurens, Frantisek Kupka, Max Weber, Umberto Boccini, Gino Severini, Kasimir Malevich, Lissitzky, Piet Mondrian, Van Doesburg, André Bretón, Salvador Dalí, I. Rice Pereira, Oscar Domínguez,...

Fijemos por un momento nuestra atención en el arte del siglo XX, sus influencias y el proceso de abstracción que se produce en él<sup>10</sup>. En primer lugar, aclaremos que no estamos afirmando que el cubismo o parte del arte del siglo XX se fundamente únicamente en la cuarta dimensión, sino que se ha producido como consecuencia de muchos factores, algunos artísticos, otros históricos, otros filosóficos,... Algunas de las influencias que ha bebido el arte del siglo XX son las siguientes: i) Revoluciones científicas (revolución geométrica -geometrías no euclídeas y geometría multidimensional-; revolución física -teoría de la relatividad<sup>11</sup>, mecánica cuántica, el mundo subatómico-; la nueva lógica de Russell y Whitehead,...); ii) Freud y el psicoanálisis; iii) La fotografía (a finales del siglo XIX se desarrollan nuevas películas fotográficas que dan lugar a los carretes fotográficos permitiendo a cualquier amateur realizar fotografías sin ninguna complicación y rápidamente se desarrolla la fotografía comercial; además en esa época E. Muybridge, el fotógrafo angloamericano se hace famoso por sus fotografías de animales y personas en movimiento); iv) La sociedad de aquella época era una sociedad industrial con todas sus

---

<sup>10</sup> Aunque quien quiera un estudio detallado y exhaustivo sobre el arte del siglo XX y sus influencias deberá buscar un buen texto para este fin, ya que aquí expondremos solamente unas ideas parciales y subjetivas sobre el tema.

<sup>11</sup> Toda la influencia que ha recibido el cubismo y otros movimientos artísticos de la cuarta dimensión, influencia de la que hemos hablado en este artículo, ha sido en relación a la cuarta dimensión espacial, geométrica, ya que el espacio-tiempo de la teoría de la relatividad no entra a formar parte de la cultura popular -en alguna medida- hasta la década de los años 20.

consecuencias (movimientos obreros, trabajos mecanizados,...); y) Revolución tecnológica (rayos X, cine, coche, avión,...); vi) La Historia (guerras mundiales, comunismo,...); etc.

En el arte del siglo XX se produce un proceso de abstracción. Los artistas ya no quieren hacer una copia de un objeto o de una escena real (¡eso lo puede hacer una fotografía!), quieren romper con la interpretación del arte como “pinturas realistas de libro de historia”. Por lo que los artistas abandonan la perspectiva renacentista, la representación y el realismo, encaminándose hacia la abstracción. Lo importante ya no es el objeto pintado, sino la pintura en sí misma. Los artistas querían ver el mundo desde diferentes puntos de vista, no pintar lo que se ve sino una realidad superior. Esa realidad puede ser también su propio mundo interior. Se cuestionan la verdad, la realidad de las cosas, del mundo, y quieren trabajar con grandes ideales, que sean universales y utópicos. Hay tres corrientes fundamentales en el arte del siglo XX: expresión (relacionada con los sentimientos); fantasía (los laberintos de la mente); abstracción geométrica (enfatisa el orden y la estructura formal). Todo movimientos artístico del siglo XX es una mezcla de estas corrientes.

La cuarta dimensión se convierte en un símbolo de liberación para los artistas, una fuente de nuevas ideas, un nuevo lenguaje y una nueva concepción del espacio. La creencia en la cuarta dimensión les da fuerza para alejarse de la realidad visual y romper completamente con la perspectiva del único punto- foco que representa el mundo tridimensional y euclídeo. Además, el interés por la cuarta dimensión representa un acercamiento alternativo a las visiones idealistas de una realidad superior que soportaron el nacimiento del arte abstracto. Como venimos afirmando existió una gran fascinación por la cuarta dimensión, aunque cada movimiento y cada artista lo relaciona con cuestiones distintas: la ruptura con la perspectiva, el movimiento, el color, el tiempo, el espacio infinito, la memoria, la gravedad, la antigravedad, misticismo,...

A lo largo del siglo XX la cuarta dimensión espacial no siempre ha estado presente.

**1900-1930:** etapa dorada de la cuarta dimensión espacial (especialmente hasta 1920).

**1920-1950:** entra en juego la teoría de la relatividad (en 1930 los artistas firman el manifiesto dimensionalista, aunque abierto al espacio, es fundamentalmente relativista). Sólo el Dadaísmo y el Surrealismo continúan preocupándose por la 4D espacial.

**1950-1970:** abandono del tema de la cuarta dimensión espacial, salvo S. Dalí y I. Rice Pereira.

**A partir de los 70** hasta la actualidad resurge el interés por la cuarta dimensión espacial.

A continuación, recuperemos a unos de los miembros del grupo de Putaux que más interesado estaba por las matemáticas y por la cuarta dimensión, Marcel Duchamp. Tal vez sea cierto que los dos pintores que más han influido sobre el arte del siglo XX hayan sido Pablo Picasso y Marcel Duchamp. El primero ha sido un pintor en el sentido más clásico de la palabra, sin dejar nunca de evolucionar y pintar, siempre pintando. Sin embargo, Duchamp ha sido el artista que reflexiona sobre el arte, que lo cuestiona e incluso lo niega,

ha sido fundamentalmente un filósofo del arte, pero desde dentro y sorprende además de su anti-arte, su inactividad artística (que contrasta con el gran número de creaciones de Picasso). Duchamp sustituye la pintura por la pintura-idea, abandona supuestamente el mundo del arte en 1912 y empieza a trabajar en una librería (que abandona rápidamente para irse a New York). Sin embargo, sigue trabajando durante 10 años más reflexionando y pintando hacia su gran obra “*La Novia desnudada por sus solteros, incluso- El Gran Cristal*” (1915-1923). Fruto de esta reflexión escribe “*La Caja Blanca*” y “*La Caja Verde*”, en los que reflexiona sobre las ideas de “*El Gran Cristal*”, en particular, podemos encontrar numerosas reflexiones sobre la cuarta dimensión. A partir de entonces se convierte en el anti-artista y no hace “obras artísticas”, sino más bien hace anti-arte y expresiones de ese anti-arte, pero sin embargo le convierten en el personaje más influyente del arte del siglo XX.

Vamos a fijar nuestra atención en tres obras que resumen el interés de Marcel Duchamp por la cuarta dimensión. La primera es “*Retrato de jugadores de ajedrez*” (1911). Por sus escritos sabemos que Duchamp era lector de los trabajos de Jouffret y Poincaré, así como de Gastón de Pawlowski “*Viaje al País de la cuarta dimensión*”. Jouffret utilizó el ajedrez como metáfora de la visualización de la cuarta dimensión, esta se asemeja al proceso mental de un jugador de ajedrez que desarrolla los posibles juegos que se pueden generar según la posición del tablero. Además, Duchamp, quien fue un gran jugador de ajedrez toda su vida, declaró en una entrevista que había colocado a sus jugadores en el espacio infinito (como hemos leído en Apollinaire, la cuarta dimensión es el espacio infinito).



Figura 38: Retrato de jugadores de ajedrez

Posteriormente, Duchamp inició su estudio de la “representación estática del movimiento” (como hemos comentado brevemente con anterioridad, el movimiento es una de las técnicas de visualización de la cuarta dimensión, es decir, la cuarta dimensión del espacio-tiempo pero en un sentido estático, no relativista). Duchamp habla de lo que denota como “*paralelismo elemental*”: “... la repetición de una línea equivalente a una línea elemental (en el sentido de similar en todo punto) de cara a generar una superficie. El mismo paralelismo que se da para pasar del plano al volumen. La multiplicación paralela de un espacio continuo  $n$ -dimensional da lugar a un espacio continuo  $(n+1)$ -dimensional.”. Una obra que refleja este paralelismo elemental es “*Desnudo bajando una escalera, No. 2*” (1912). En esta obra Duchamp mezcla las ideas y técnicas cubistas sobre las diferentes perspectivas, con el movimiento, con una clara referencia a la obra de Muybridge “*Desnudo bajando escaleras*” (1887), en el que una sucesión de fotografías nos muestra una mujer desnuda bajando unas escaleras. Esta obra crea una gran polémica entre sus amigos cubistas que no admiten el movimiento (además, destaquemos que esta obra es

anterior al futurismo, cuya primera exposición es ese mismo año), y piden a los hermanos de Duchamp que le pidan a este que retire su obra de la exposición que iban a celebrar los cubistas.



Figura 39: Desnudo bajando una escalera, No. 2

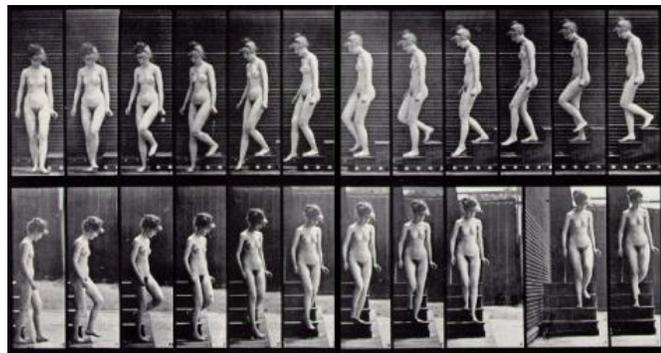


Figura 40: Desnudo bajando escaleras

Sin embargo, Duchamp le da otra vuelta de tuerca a su acercamiento a la cuarta dimensión. A finales de 1912 toma sus primeras notas en el desarrollo de su gran obra *“El Gran Cristal!”*. Como consecuencia de las mismas pinta *“La novia”* (1912). Duchamp llega a escribir respecto a esta obra, *“... los primeros destellos de la cuarta dimensión en mi obra...”*. Sigue trabajando durante esos años sobre los temas que le preocupan, la cuarta dimensión, los mecanismos, el anti-arte, la psicología, la alienación del hombre,... y en 1915 empieza su obra *“La Novia desnudada por sus solteros, incluso- El Gran Cristal”*. La idea central en este periodo respecto a la cuarta dimensión es la proyección, es decir, podemos visualizar la cuarta dimensión y sus objetos como proyecciones en el espacio tridimensional. En sus escritos sobre *“El Gran Cristal”*, *“La Caja Blanca”* y *“La Caja Verde”*, podemos encontrar reflexiones como las siguientes: *“... la sombra generada por una figura cuatridimensional sobre nuestro espacio es una sombra tridimensional...”* o *“...si una sombra es una proyección bidimensional de el mundo tridimensional, entonces el mundo tridimensional como nosotros lo conocemos es la proyección del universo cuatridimensional ...”*. Su obra *“La Novia desnudada por sus solteros, incluso- El Gran Cristal”*, es efectivamente un gran cristal transparente dividido en dos partes. En la parte superior se encuentra la proyección en el espacio tridimensional de la novia, que es un ser que habita un universo de dimensión cuatro, mientras que en la parte de abajo se encuentran los nueve solteros en su “mundo euclídeo tridimensional”. Esta obra es una compleja obra con múltiples significados (mecanismos, cuarta dimensión, sexo, anti-arte,...y un extenso etcétera), muchas son las obras dedicadas a su estudio. Un par de recomendaciones: las

obras de E. D. Henderson en las que se reflexiona sobre la geometría y la ciencia en general de esta y otras obras de Duchamp, y “*Apariencia Desnuda*” de Octavio Paz, que es una interesante reflexión, que aunque está presente el papel de la 4D, este se minimiza un poco y se engloba en la física (quizás debido a que está publicado en la década de los sesenta cuando está bastante abandonado el tema de la cuarta dimensión espacial).



Figura 40: La novia

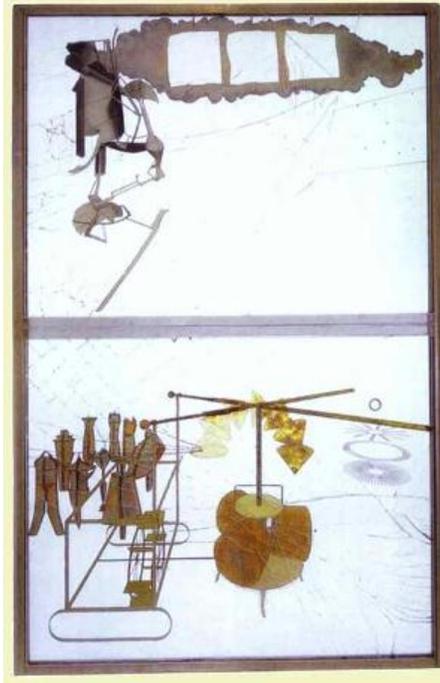


Figura 41: La Novia desnudada por sus solteros, incluso- El Gran Cristal

Ahora, para terminar vamos a poner algunos ejemplos de los movimientos artísticos, y algunos artistas, que se preocuparon de la cuarta dimensión.

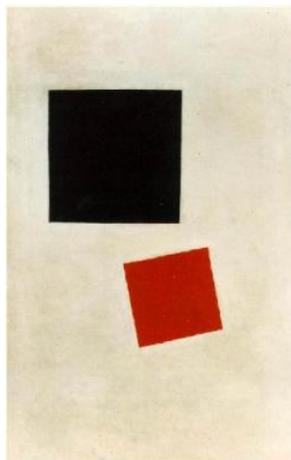
- **Modernismo Americano:** Max Weber, “*Interior de la Cuarta Dimensión*” (1913). Como ya hemos comentado, Weber estuvo en París entre 1905 y 1908, y sus ideas sobre la cuarta dimensión son análogas a las de los cubistas. Ya comentamos que Apollinaire se inspira en el artículo de Weber en *Camera Work* para sus escritos en los que relaciona a los cubistas con la cuarta dimensión.



- **Futurismo Italiano:** Umberto Boccioni “*Formas únicas de continuidad en el espacio*” (1913) y Gino Severini “*Bailarina Azul*” (1912). Para el movimiento futurista el concepto de movimiento es esencial, y es a través de este que ellos se relacionan con la cuarta dimensión. Mientras que los cubistas pintan al objeto estático desde diferentes puntos de vista, los futuristas pintan al objeto en movimiento creándose así la impresión de la cuarta dimensión y también los diferentes puntos de vista como se observa en esta obra de Severini.



- **Supremacismo:** Kazimir Malevich “*Red Square and Black Square: Painterly Realism of a Boy with a Knapsack. Color Masses in Four Dimensions*” (1915) y “*Suprematism: Painterly Realism of a Football Player (Color Masses in the Fourth Dimension)*” (1925). El Supremacismo busca el sentimiento puro, intenta golpear la complaciente percepción que la gente tiene del mundo para llevarlos a un tipo de “consciencia cósmica”, pura sensación. Esta es el resultado de las tensiones y movimientos entre el color, la forma y la base de la obra. Cuarta dimensión = antigravedad.



- **Surrealismo (I):** Oscar Domínguez “*Paisajes de Redes*” (1939), “*La estocada Litocrónica o la fiesta del toro*” (1939). Dentro del interés por la cuarta dimensión de los surrealistas parece ser que fueron los escritos de Oscar Domínguez los más científicos. Tenemos dos tipos de obras relacionadas con la cuarta dimensión. Por una parte, lo que el llama “pinturas cósmicas altamente espaciales” como por ejemplo la primera de las obras

que presentamos aquí o *“Nostalgia del Espacio”* (1939). En ellas podemos encontrar formas poliédricas. En su obra *“La petrificación de los tiempos”* (1942) introduce la idea de “superficies litrocónicas”, que viene a ser el “rail” que describe un objeto entre dos momentos de tiempo. Aunque en esta obra demuestra Domínguez un gran conocimiento de la Teoría de la Relatividad, podemos decir que el concepto de “superficie litrocónica” está más cercano al Futurismo y a la idea del espacio-tiempo estático que a la Teoría de la Relatividad.



- **Surrealismo (II):** Salvador Dalí *“Crucifixion (Corpus Hypercubus)”* (1954) y *“En busca de la cuarta dimensión”* (1979). En Dalí encontramos una profunda preocupación por la cuarta dimensión, en todas sus vertientes. En la obra *“Crucifixion (Corpus Hypercubus)”* encontramos el despliegue del hipercubo, que es una cruz tridimensional sobre la que está crucificado Jesucristo, acercándose a las connotaciones religiosas de la cuarta dimensión. En su obra más tardía *“En busca de la cuarta dimensión”* encontramos muchas de las significaciones que hemos discutido aquí (formas poliédricas, el mito de la caverna de Platón, la religión, las proyecciones,...) y también la Teoría de la Relatividad.



## Bibliografía

Las imágenes de este artículo pertenecen fundamentalmente a los libros que aparecen en la bibliografía. Las imágenes de Flatland se han tomado de [A], las del hiper cubo y otras figuras de [B,R1,R2,P] y las imágenes de los cuadros de [B,D,Co,H,H2,W]

[A] E.A. Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*, 1884 (*Planilandia, Una novela de muchas dimensiones*, José J. de Olañeta, 1999).

[B] T. Banchoff, *Beyond the Third Dimension*, Scientific American Library, 1990.

[Bo] W. Bohn, *The Rise of Surrealism: Cubism, Dada, and the Pursuit of the Marvelous*, State Univ. New York, 2001.

[C] Davide P. Cervone: [www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/welcome.html](http://www.math.union.edu/~dpvc/math/4D/welcome.html)

[Co] Philip Cooper, *Cubism*, Phaidon, 1995.

[D] *Oscar Domínguez (1906-1957), exposición Antológica 1926-1957*, Ed. Las Palmas de Gran Canaria : Centro Atlántico de Arte Moderno, D.L. 1995.

[H] L.D. Henderson, *The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art*, Princeton University Press, 1983.

[H2] L. D. Henderson, *Duchamp in Context: Science and Technology in the Large Glass and Related Works*, Princeton University Press, 1997.

[K] M. Kaku, *Hyperspace, A Scientific Odyssey through Parallel Universes*, Anchor, 1995.

[P] Cl. A. Pickover, *Surfing through Hyperspace, Understanding Higher Universes in six Lessons*, Oxford Univ. Press, 1999.

[R1] R. Rucker, *Geometry, Relativity and The Fourth Dimension*, Dover Pubi. Inc., 1977.

[R2] R. Rucker, *The Fourth Dimension, a guided tour of the higher universes*, Houghton Mifflin Co., 1984.

[W] <http://physics.wrn.edu/~larsen/monroe.html>, *Connections Between Modern Physics and Modern Art in the Works of Salvador Dali and Pablo Picasso*.