

# A vueltas con la envolvente: una aventura de curvas con algunos personajes

por

Óscar Ciaurri Ramírez, Universidad de La Rioja

## 1. Una historia personal a modo de introducción

Permítame, apreciado lector, que para enfocar la cuestión de manera adecuada comience estas páginas recordando el origen de mi pequeña *obsesión* por las envolventes. En la ciudad en donde vivo, cada otoño, se organiza una feria de libros antiguos y de segunda mano en un paseo principal. La estampa puede recordar a cualquier ciudad de provincias adentrándose en los primeros fríos. Cada año es obligada la visita a la feria: tarde de domingo, los niños comprando libros de cuentos y cómics, mi mujer ojeando libros de cocina y novelas negras y yo preguntando en todas las casetas por libros de matemáticas. En cada visita anual tengo por costumbre adquirir dos o tres cosas relacionadas de algún modo con las matemáticas. La mayoría de los libros que he podido encontrar en este tipo de sitios son viejos manuales para la enseñanza de las matemáticas, en diversos niveles académicos, sin mayor interés pero que, sin embargo, por alguna extraña razón (un problema nuevo e interesante, unas ilustraciones de cierta calidad, etc.) han llamado mi atención. Aunque en algunas ocasiones aparecen pequeñas joyas que uno no puede resistirse a comprar, a precios desorbitados en la mayor parte de los casos, con la excusa más nimia. En cualquier caso, los libros suelen acabar olvidados en alguna estantería de mi despacho.

En una de mis visitas, durante el otoño de 2001, adquirí tres pequeños volúmenes de la colección *Lecciones populares de matemáticas*, de la Edito-

rial Mir, formada por traducciones de textos rusos y que durante los años setenta del siglo pasado gozó de cierta popularidad entre los matemáticos, como después descubrí en conversaciones con algunos colegas de más edad que vivieron ese momento. Los libritos, como las adquisiciones de cada año, pasaron a coger polvo en mi biblioteca.

El momento de recuperar una *lección popular de matemáticas* llegó durante las Navidades de 2004. Justo en el último momento antes de salir para la estación a coger un tren, decidí que debía llevarme algo de lectura para el trayecto. La prisa y su aspecto asequible hicieron que optase por una de las *lecciones* titulada, como no, *La envolvente*, de un matemático ruso llamado Boltianski [3], del que no tengo ni he localizado ninguna otra referencia. El libro no me defraudó, cumplió a la perfección el objetivo para el que había sido seleccionado: entretener un largo y aburrido viaje en tren. El contenido del trabajo era una introducción a las curvas envolventes partiendo de ejemplos sumamente sencillos, pero que cubría perfectamente las cuestiones fundamentales relacionadas con este concepto. Sin embargo, lo que realmente me fascinó del libro era la visualización que hacía de las curvas que iban surgiendo a lo largo de la *lección*. Yo había estudiado las envolventes en un curso de ecuaciones diferenciales desde una perspectiva puramente analítica, y este planteamiento no permite capturar toda la belleza que se esconde tras la geometría de las familias de curvas y sus envolventes.

La lectura de aquella *lección* no fue más que el comienzo de una intensa relación, de más de cinco años, con un tipo de curvas que me ha cautivado. Desde aquel momento en mi trabajo matemático cotidiano comenzaron a surgir envolventes por todas partes: un problema de la *American Mathematical Monthly* [10], otro en la revista canadiense *Cruce Mathematicorum* [11], sitios de internet con cientos de imágenes y animaciones ilustrando la idea de envolvente, nuevas propiedades de curvas clásicas [1] que pueden interpretarse en términos de envolventes, varios artículos relacionados con envolventes en revistas de divulgación de matemáticas [9, 8, 2], etc. De repente, por todas partes a mi alrededor surgían las envolventes. Como profesor de ecuaciones diferenciales, en donde, como ya he comentado, aparecen las envolventes, he cambiado por completo la forma de presentar este tipo de curvas, que aunque no juegan un papel central dentro de la teoría de dicha asignatura, motivan extraordinariamente a los estudiantes por su gran plasticidad. Parte de estas cuestiones que acabo de mencionar formarán el contenido de estas páginas.

El objetivo de este trabajo es, simplemente, intentar transmitir al lector la belleza que se puede esconder tras un concepto tan básico como la envolvente y que habitualmente nos pasa desapercibido. Por fuerza, nuestra exposición dejará fuera ciertas cuestiones de interés indudable. Por ejemplo, no comentaremos nada sobre las aplicaciones de las envolventes, pero eso no

quiere decir que no las tengan. Las envolventes aparecen frecuentemente en física, teoría de juegos, economía o ingeniería. Por el contrario, aprovecharemos nuestro paseo geométrico para recordar algunos detalles interesantes de esas curvas con nombre propio que tantas veces aparecen en las matemáticas y a las que, en general, prestamos tan poca atención. Asimismo, repasaremos algunos de los nombres de los personajes que han estado vinculados a ellas. Ahora, querido lector, pasemos a dar unas vueltas por el fascinante mundo de las envolventes y permitamos que nos envuelva.

## 2. El concepto

Hace ya unas líneas que comencé a hablar de la envolvente y todavía no he tenido el detalle de proceder a su presentación formal. Como ocurre con muchos conceptos en matemáticas, una buena visualización inicial (cuando es posible hacerla) puede resultar fundamental para captar toda su esencia. Es por ello que, antes de dar la definición exacta de envolvente, veremos un ejemplo elemental pero muy clarificador.

Supongamos que tenemos una circunferencia de radio  $R$  y tomamos cada uno de sus puntos como el centro de una circunferencia de radio  $R/2$ , por poner un caso. En la figura 1 aparece en rojo la circunferencia de radio  $R$  y en amarillo la familia de circunferencias de radio  $R/2$  centradas en ella. Hemos trazado en verde la frontera de la región limitada por la familia de circunferencias; esta frontera es una corona circular acotada por dos circunferencias concéntricas con la dada de radio  $R$  y de radios  $R/2$  y  $3R/2$ , respectivamente. Estas dos últimas circunferencias forman la envolvente de la familia de circunferencias de radio  $R/2$  centradas en los puntos de una circunferencia de radio  $R$ .

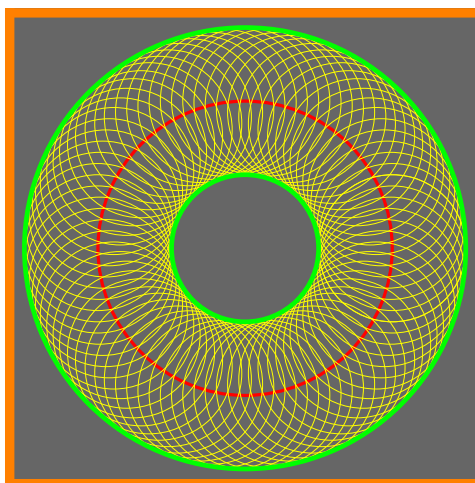


Figura 1.

En nuestro ejemplo podemos observar que cada punto de la envolvente pertenece también a alguna de las circunferencias de la familia dada y que, además, cada una de ellas toca en algún punto a la envolvente. Con ciertas comprobaciones elementales podemos verificar, que en los puntos de contacto entre cada circunferencia y la envolvente, la recta tangente a ambas curvas es la misma.

Entendiendo que dos curvas son tangentes, en un cierto punto de contacto

entre ellas, cuando comparten la recta tangente en dicho punto, la envolvente de una familia de curvas es, esencialmente, una curva que en cada uno de sus puntos es tangente a alguna de las curvas de la familia de partida. De un modo más exacto:

**La definición.** Sea  $\phi(x, y, \alpha) = 0$  una familia de curvas planas dependientes de un cierto parámetro  $\alpha \in A$ . La envolvente de la familia de curvas, si existe, es una nueva curva  $\Phi$  tal que en cada uno de sus puntos es tangente a una de las curvas de la familia dada y de manera que cada curva de la familia sea tangente al menos en un punto a la envolvente.

Resulta un sencillo ejercicio de derivación y de aplicación del teorema de la función implícita probar que la envolvente, en caso de existir, es solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \phi(x, y, \alpha) = 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \alpha}(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

En nuestro ejemplo inicial, la familia de circunferencias de radio  $R/2$  centradas en la circunferencia de radio  $R$  puede escribirse, tomando un sistema de referencia con el origen en el centro de la circunferencia, como  $\phi(x, y, \alpha) = 0$ , tomando

$$\phi(x, y, \alpha) = (x - R \cos \alpha)^2 + (y - R \sin \alpha)^2 - \frac{R^2}{4},$$

para  $\alpha \in [0, 2\pi)$ . Este caso la solución del sistema (2.1) son las circunferencias  $x^2 + y^2 = R^2/4$  y  $x^2 + y^2 = 9R^2/4$ .

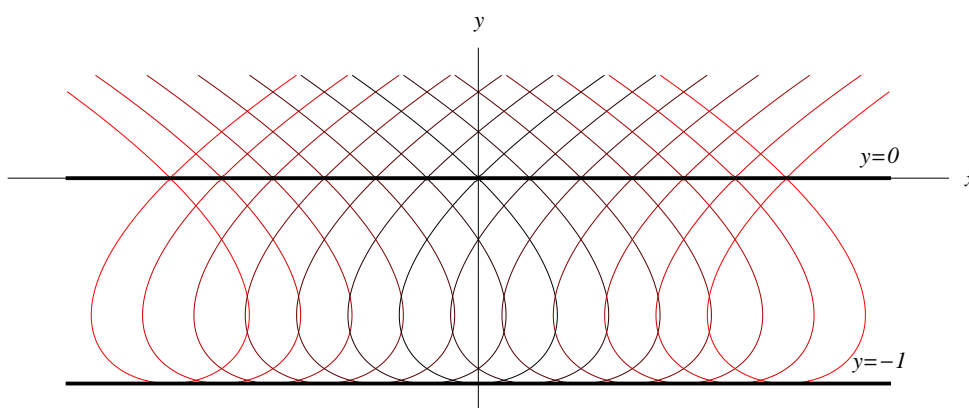


Figura 2.

Sin embargo, el siguiente ejemplo pone de manifiesto que las soluciones de este sistema no tienen que ser necesariamente la envolvente de la familia

de curvas. Para las denominadas cúbicas de Tschirnhaus  $y^2(y+1) = (x-\alpha)^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , las soluciones de (2.1) son las rectas  $y = 0$  e  $y = -1$ . Cada uno de los lazos que aparece en la figura 2 es una cúbica de Tschirnhaus. Se observa fácilmente que la recta  $y = -1$  sí es la envolvente de la familia de curvas, pero no así la recta  $y = 0$ , que corresponde al conjunto de puntos dobles de las cúbicas.

Puede comprobarse que el lugar geométrico de los puntos singulares (aquellos para los que se cumple que  $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ) de la familia de curvas también será solución del sistema (2.1). Es por esto que, de manera general, la curva solución del sistema (2.1) se denomina *línea discriminante*. Aunque para simplificar la exposición omitiremos este tipo de detalles, en cada ocasión deberíamos comprobar qué es lo que representa la línea discriminante.

### 3. Algunos ejemplos clásicos y otros no tan clásicos

#### 3.1. Familias de segmentos apoyados sobre rectas

Algunos de los ejemplos más sencillos de envolventes que podemos calcular<sup>1</sup> de un modo elemental son los generados por familias de segmentos apoyados sobre rectas.

Supongamos que consideramos un sistema de coordenadas rectangular y tomamos como rectas para apoyar nuestros segmentos los ejes de dicho sistema. Esta elección la realizamos por comodidad, cualquier otro par de rectas daría lugar a resultados muy similares. Nótese que dadas dos rectas cualesquiera  $r$  y  $s$  no paralelas, siempre existe una transformación afín que nos transforma las rectas  $r$  y  $s$  en los ejes de nuestro sistema rectangular. Consideremos, pues, familias de segmentos apoyadas sobre los ejes coordenados cumpliendo

- a) que la suma de las longitudes de los segmentos que determina cada uno de los elementos de la familia sobre los ejes sea constantemente igual a  $k$ ;

---

<sup>1</sup>¿Calcular?, ¿qué debemos entender por calcular? En la determinación de la envolvente de una familia de curvas, el problema técnico de cálculo que requiere de intervención humana (es decir, que en general no puede ser mecanizado) es la obtención de la ecuación que define la familia de curvas. La resolución del sistema de ecuaciones (2.1) es una labor que puede dejarse a los potentes programas de cálculo simbólico de los que disponemos en la actualidad. Con un poco de habilidad en su manejo, estos programas nos evitan tener que realizar tediosas manipulaciones algebraicas. En mi caso, por costumbre, he realizado la *parte mecánica* usando *Mathematica*, pero cualquier otro manipular algebraico de la misma o parecida potencia nos dará similar resultado. *Mathematica* ha servido, y creo que de una manera bastante aceptable, para generar toda la parte gráfica propia de este trabajo.

- b) que el área del triángulo limitado por los ejes y cada de los segmentos de la familia sea constantemente igual a  $A$ ; y
- c) que cada uno de ellos sea de longitud constante  $L$ .

Asumiendo que  $k$ ,  $A$  y  $L$  son fijos, las tres familias de segmentos dadas pertenecen, respectivamente, a las familias de rectas

$$\pm \frac{x}{k-a} \pm \frac{y}{a} = 1, \quad 0 \leq a \leq k; \quad \pm \frac{x}{e^s} \pm \frac{y}{e^{-s}} = \sqrt{2A}, \quad s \in \mathbb{R};$$

y

$$\frac{x}{L \cos \theta} + \frac{y}{L \sin \theta} = 1, \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

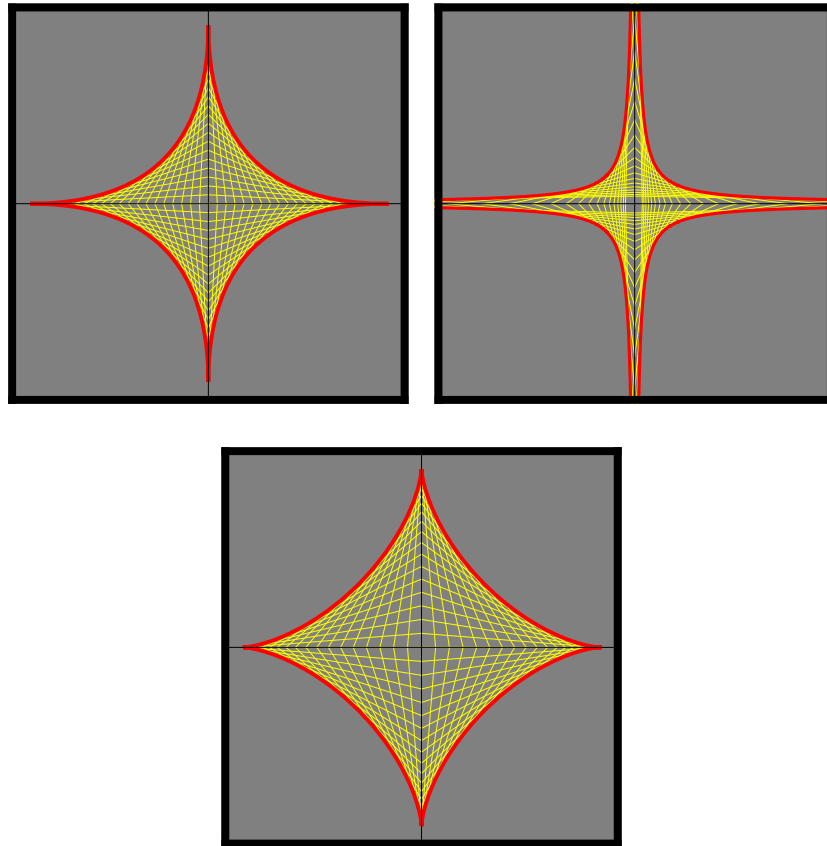


Figura 3.

En la figura 3 se muestra, de izquierda a derecha y de arriba a abajo, cada una de las familias de segmentos (en amarillo) con su correspondiente envolvente (en rojo). En el caso a) la envolvente es la curva  $\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = \sqrt{k}$ ,

que, aunque de expresión extraña, es la unión de cuatro segmentos parabólicos<sup>2</sup>; en b) se trata de la pareja de hipérbolas equiláteras  $xy = \pm A/2$ ; y en c) de la astroide de ecuación  $x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$ .

En el supuesto de que no hubiésemos considerado las familias de segmentos apoyadas sobre los ejes, sino en dos rectas cualesquiera, en los casos a) y b) hubiésemos obtenido igualmente segmentos parabólicos e hipérbolas (ya no equiláteras), respectivamente. Esto es una sencilla consecuencia de que las transformaciones afines transforman cónicas en cónicas. En el caso del apartado c) el resultado sería una *astroide* distorsionada.

Estos ejemplos iniciales son bien conocidos y es común encontrarlos en muchos libros de cálculo propuestos como problemas para trabajar el concepto de recta tangente a una curva. Como es obvio, las familias de segmentos que hemos considerado inicialmente se convierten en las rectas tangentes a la curva envolvente. La forma en la que suelen presentarse es la siguiente:

- a) Probar que las rectas tangentes a la curva  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{k}$ , considerando  $x, y > 0$ , cortan sobre los ejes coordenados segmentos cuyas longitudes tiene suma constante.
- b) Probar que las rectas tangentes a cualquier hipérbola equilátera forman con los ejes coordenados triángulos de área constante.
- c) Probar que los segmentos de las rectas tangentes a cualquier astroide limitados por los ejes coordenados tienen longitud constante.

Como se puede observar en la figura 3, el incluir en una misma imagen la familia de segmentos con la que estamos trabajando permite visualizar perfectamente la curva envolvente correspondiente. Durante mis años de educación básica, en la clase de manualidades, era habitual que la profesora nos propusiese clavar una serie de puntas sobre un tablero de madera, siguiendo una determinada pauta, para que después fuésemos uniéndolas con hilos de colores en un cierto orden. Recuerdo que el resultado, *extrañas* curvas que aparecían como por arte de magia al ir colocando los hilos, siempre nos dejaba fascinados pero, desgraciadamente, nuestra profesora nunca tenía una explicación convincente que darnos. La justificación de lo que entonces nos parecía algo casi sobrenatural es la envolvente. Esta actividad que tanto nos entretenía tiene en realidad el nombre de *String art*, que podríamos traducir como *arte cordal*, y en la actualidad podemos encontrar centenares de páginas de internet con instrucciones para elaborar sofisticadas imágenes usando esta técnica. En la figura 4 se muestran dos ejemplos de *String art*.

---

<sup>2</sup>Esta curva envolvente es, en realidad, un caso particular de *hipoelipse*. Este tipo de curvas tienen la ecuación  $|ax|^p + |by|^p = c^p$ , con  $0 < p < 2$ . En nuestro caso concreto se corresponde con la elección de parámetros  $p = 1/2$ ,  $a = b = 1$  y  $c = k$ .

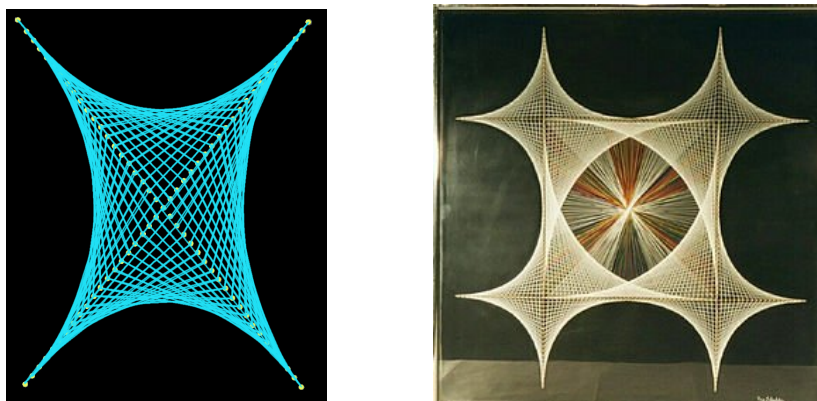


Figura 4.

En [8], tomando como punto de partida el *String art*, se analiza una situación que generaliza todos los casos vistos en los ejemplos anteriores. Concretamente analiza la envolvente de segmentos cuyos extremos se encuentran localizados sobre dos curvas cualesquiera. Si consideramos la familia de segmentos que une los puntos  $(x_1(\alpha), y_1(\alpha))$  de una cierta curva  $C_1$  con los puntos  $(x_2(\alpha), y_2(\alpha))$  de otra curva  $C_2$  (suponemos que todas las funciones son derivables), su envolvente viene dada por la curva de coordenadas paramétricas

$$x = \frac{(x_1x'_2 - x'_1x_2)(y_2 - y_1) - (x_1y'_2 - y'_1x_2)(x_2 - x_1)}{(x'_2 - x'_1)(y_2 - y_1) - (y'_2 - y'_1)(x_2 - x_1)},$$

$$y = \frac{(y_1x'_2 - x'_1y_2)(y_2 - y_1) - (y_1y'_2 - y'_1y_2)(x_2 - x_1)}{(x'_2 - x'_1)(y_2 - y_1) - (y'_2 - y'_1)(x_2 - x_1)}.$$

Estas expresiones permiten calcular rápidamente, por ejemplo, la envolvente de familias de segmentos apoyados sobre una circunferencia. Supongamos que consideramos los segmentos de extremos  $(\cos(pt), \sin(pt))$  y  $(\cos(qt), \sin(qt))$ , para valores  $p$  y  $q$  enteros distintos no nulos y  $t$  en el intervalo  $[0, 2\pi/\text{mcd}\{p, q\})$ . En esta situación, las coordenadas paramétricas anteriores para la envolvente se reducen a

$$x = \frac{p \cos(qt) + q \cos(pt)}{p + q}, \quad y = \frac{p \sin(qt) + q \sin(pt)}{p + q}.$$

La figura 5 muestra, de izquierda a derecha, la familia de segmentos y la envolvente en los casos  $(p, q) = (2, 1)$ ,  $(8, 3)$  y  $(6, 2)$ . Cuando  $p$  y  $q$  son enteros positivos, supongamos  $p > q$ , la envolvente es una epicicloide que se genera por el deslizamiento de una circunferencia de radio  $q/(p + q)$  por el exterior de la circunferencia de radio  $(p - q)/(p + q)$ . La curva correspondiente al caso



(2, 1) se denomina *cardioide* y la del caso (6, 2) (que sería la misma del caso (3, 1), ya que la envolvente para  $(p, q)$  es igual que la del caso  $(p, q)/\text{mcd}\{p, q\}$ ) es conocida como *nefroide* y, ambas, son casos particulares de epicicloides. Cuando, por ejemplo,  $q < 0$  la envolvente ya no se forma en el interior de la circunferencia unidad como en el caso anterior, sino en el exterior. Además, la envolvente es una hipocicloide que puede trazarse mediante el deslizamiento de una circunferencia de radio  $|q|/(p + q)$  por el interior de otra de radio  $(p + |q|)/(p + q)$ .

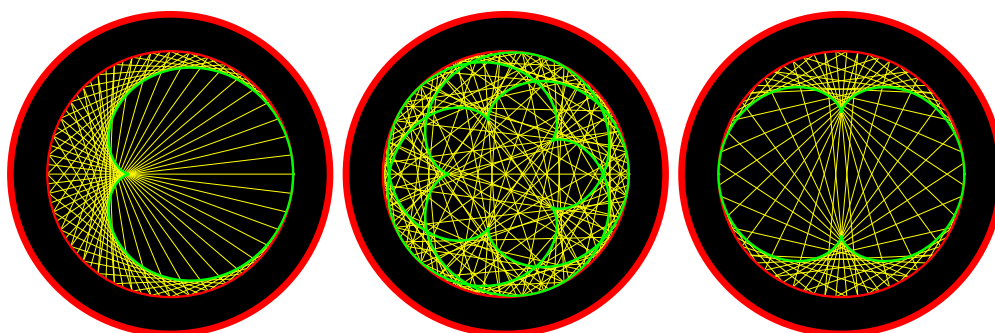


Figura 5.

En la figura 6 puede verse, otra vez de izquierda a derecha, los casos  $(p, q) = (2, -1)$  y  $(7, -3)$ . La curva correspondiente al caso  $(2, -1)$  también se conoce como *deltoide*. Algunas de las imágenes que se generan usando esta familia de segmentos recuerdan, al menos al que esto escribe, a los rosetones de las catedrales góticas.

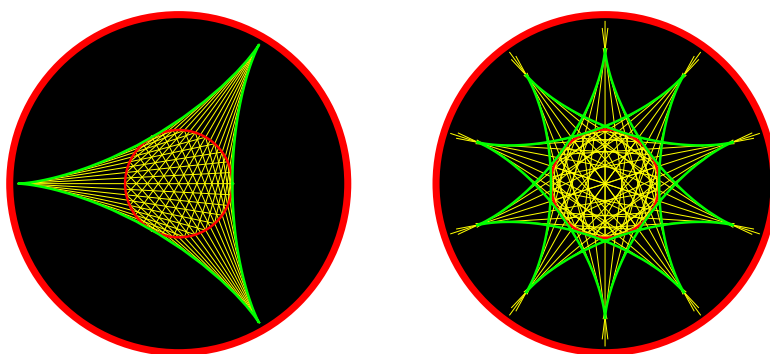


Figura 6.

### 3.2. Un comentario sobre la astroide

La astroide que nos ha aparecido como la envolvente de la familia de segmentos c) de la subsección anterior posee interesantes propiedades, y una

de las más curiosas permite ver la astroide como la envolvente de una familia de elipses.

Supongamos que cogemos un segmento de longitud  $L$ , podemos pensar en un pequeño listón, y que elegimos un punto sobre él a distancia  $\alpha$  de uno de los extremos. Si apoyamos sobre los ejes de un sistema de coordenadas el segmento en todas sus posibles posiciones y marcamos en cada caso el lugar que ocupa el punto, los puntos obtenidos forman una elipse de semiejes  $L - \alpha$  y  $\alpha$  completamente contenida en la astroide que generaría la familia de segmentos de longitud fija<sup>3</sup>  $L$ . Es posible construir un pequeño artefacto que nos permita visualizar esta construcción; este aparato suele denominarse *elipsógrafo*<sup>4</sup>. En la parte izquierda de la figura 7 mostramos un elipsógrafo realizado en madera y en la derecha una captura de pantalla de la página web <http://demonstrations.wolfram.com/EllipsographOrReciprocator/>, donde podemos ver una animación del funcionamiento del elipsógrafo realizada con *Mathematica* (el código está disponible y se puede utilizar desde la versión 6.0). Se ve claramente en las imágenes del elipsógrafo que el punto que seleccionemos puede estar también en la prolongación del segmento de longitud  $L$ ; en ese caso el punto también trazará elipses, pero exteriores a la astroide envolvente de la familia de segmentos de longitud  $L$ .

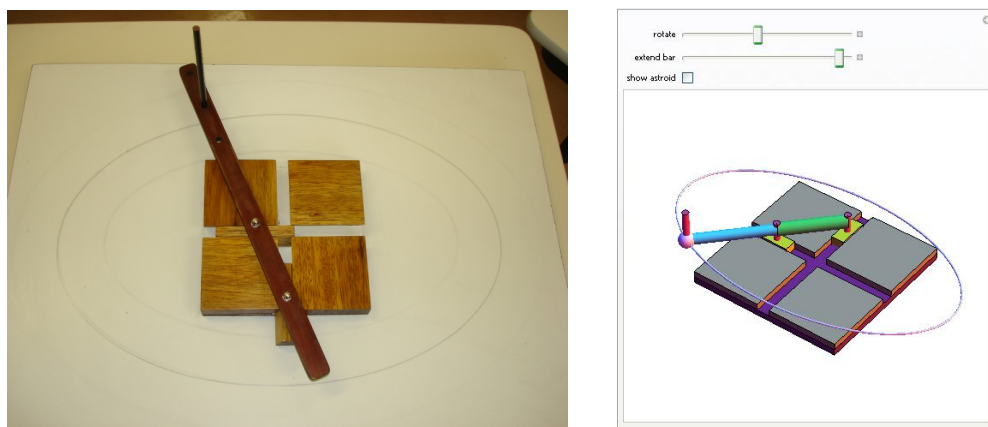


Figura 7.

Es evidente que, para cada elección de  $\alpha$  (es decir, para cada una de las posibles posiciones del punto), tendremos una elipse para la que la suma de

<sup>3</sup>Nótese que la suma de los semiejes de la elipse es constantemente igual a  $L$ .

<sup>4</sup>Este aparato aparece en algunas referencias como *trasmallo de Arquímedes* (esta expresión es la traducción de la expresión inglesa *Trammel of Archimedes*). En [2], T. Apostol comenta que este elipsógrafo ya era conocido en la antigua Grecia, pero que no existen evidencias históricas de quién lo inventó.

sus semiejes es constante; es decir, tendremos la familia de elipses

$$\frac{x^2}{(L - \alpha)^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \quad 0 \leq \alpha \leq L,$$

y, como no podía ser de otro modo, su envolvente es la astroide  $x^{2/3} + y^{2/3} = L^{2/3}$ . La figura 8 muestra tres momentos de una animación en la que se observa como la familia de elipses va generando la astroide.

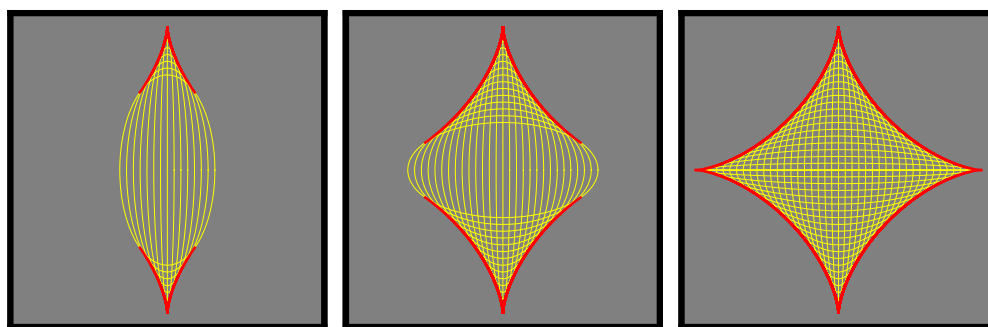


Figura 8.

### 3.3. Más segmentos y más áreas constantes

La idea de encerrar áreas constantes con segmentos apoyados sobre ciertas curvas parece una extensión natural del ejemplo b) de la subsección 3.1<sup>5</sup>. En un primer momento nos propusimos la determinación de la envolvente de estas familias de segmentos en una situación general. Enseguida nos dimos cuenta de que aquello no era tarea fácil: era necesario obtener una expresión *razonable* del área encerrada entre una curva y una recta, y esto no siempre es posible. Sin embargo, al analizar un caso particular nos llevamos una grata sorpresa.

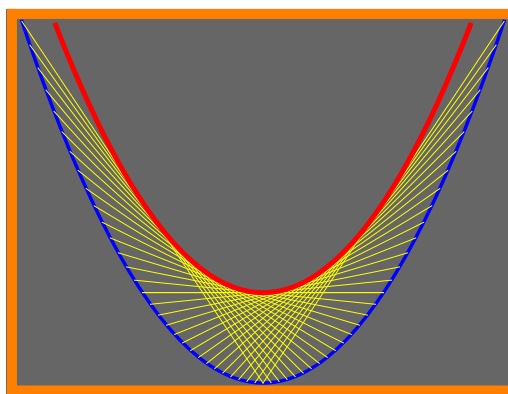


Figura 9.

La envolvente de la familia de segmentos que encierran áreas de región constante con una parábola es otra parábola. La parábola envolvente es una

<sup>5</sup>Es posible pensar en extensiones de este tipo para los ejemplos en a) y c). Desafortunadamente todo nuestro esfuerzo en esta dirección ha resultado infructuoso, no hemos conseguido encontrar ningún ejemplo que consideremos que merezca la pena.

traslación a lo largo del eje de simetría de la parábola inicial. En efecto, si uno considera un sistema de coordenadas de tal forma que la parábola inicial tenga la ecuación  $y = p^2x^2$ , la familia de segmentos que limita con ella regiones de área constante e igual a  $\frac{4k^3}{3p}$ , para cierto valor fijo de  $k$  que tiene el mismo signo que  $p$ ,<sup>6</sup> se encuentra sobre las rectas de ecuación

$$y = mx + k^2 - \frac{m^2}{4p^2}, \quad m \in \mathbb{R}.$$

La solución del sistema (2.1) para esta familia de rectas es la parábola

$$y = p^2x^2 + k^2$$

y, como ya habíamos anunciado, es una traslación de longitud  $k^2$  a lo largo del eje vertical de la parábola inicial. La imagen de la figura 9 muestra la familia de segmentos, la parábola inicial (en azul) y la envolvente (en rojo).

El ejemplo que acabamos de mostrar puede plantearse también como un ejercicio de cálculo: Probar que las tangentes a la parábola  $y = p^2x^2 + k^2$  limitan con la parábola  $y = p^2x^2$  regiones de área constante cuyo valor es  $\frac{4k^3}{3p}$  ( $k$  y  $p$  del mismo signo). Resulta interesante observar que este resultado puede probarse sin usar integración, basta tener en cuenta el resultado de Arquímedes sobre la cuadratura de la parábola (véase [4]).

### 3.4. Dos ejemplos con circunferencias

Las cónicas, como ya hemos visto, se presentan en muchos casos como envolventes de ciertas familias de curvas. Sin embargo, en nuestro siguiente ejemplo vamos a construir una familia de curvas basada en un cónica para obtener otra curva bien conocida.

Consideremos una familia de circunferencias cuyos centros se encuentran sobre una hipérbola equilátera y pasando todas ellas por el centro de la hipérbola. Si tomamos un sistema de referencia de tal forma que la hipérbola tenga por ecuación  $x^2 - y^2 = k^2$ , el centro será el punto  $(0, 0)$  y la familia de circunferencias estará dada por la expresión

$$(x \pm k \cosh s)^2 + (y - k \sinh s)^2 = k^2 \cosh(2s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

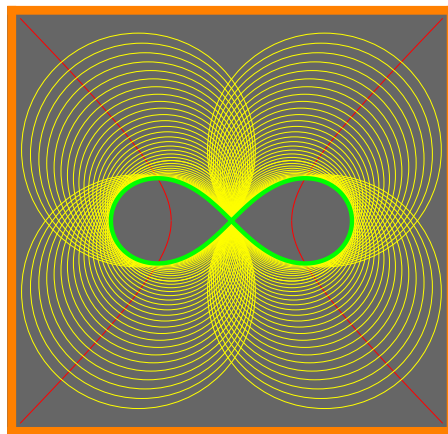


Figura 10.

<sup>6</sup>La elección del valor del área puede resultar un tanto exótica, pero tiene su razón de ser: simplifica de manera sustancial la forma de las ecuaciones a manipular.

Usando el sistema (2.1) deducimos rápidamente que la envolvente es la curva descrita por la cuártica

$$4k^2(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)^2;$$

es decir, se trata de una *lemniscata de Bernoulli*<sup>7</sup>. En la figura 10 podemos ver en amarillo las circunferencias centradas sobre la hipérbola, que aparece en rojo de fondo, y en verde la lemniscata.

Este ejemplo puede dar un poco más de juego. Supongamos que obligamos a que todas las circunferencias de la familia pasen por un punto fijo cualquiera  $(a, b)$ , no necesariamente el centro de la hipérbola. En este caso la familia de circunferencias sigue teniendo una expresión fácilmente manipulable, y la envolvente es la cuártica

$$4k^2((x - a)^2 - (y - b)^2) = (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2.$$

En la figura 11 hemos trazado en verde la (psicodélica) envolvente de la familia de circunferencias para tres elecciones distintas del punto  $(a, b)$ , que siempre queda como punto doble de la cuártica correspondiente.

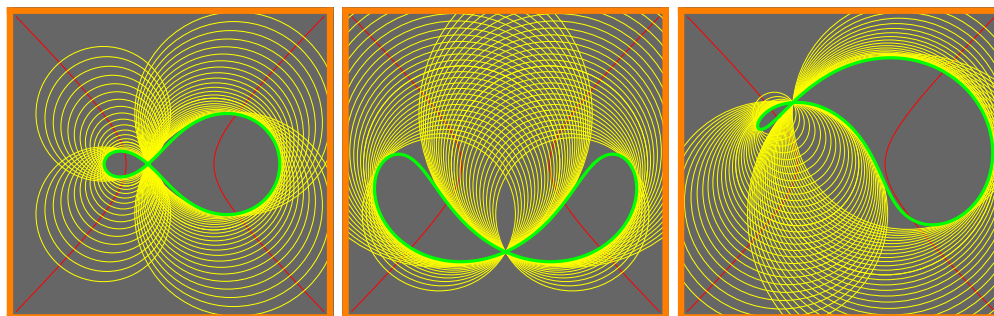


Figura 11.

Vamos ahora otro ejemplo relacionado con una familia de circunferencias que da como envolvente una cónica. En el número de diciembre de 2006 de la revista *Mathematics Magazine* fue publicada [1] la siguiente propiedad de una familia de hipérbolas con la misma pareja de vértices: para cada hipérbola de la familia, las circunferencias tangentes a ambas ramas intersectan a cada una de las asíntotas de la hipérbola en segmentos de longitud constante e igual a la distancia entre los vértices, independientemente de la posición de la circunferencia y del ángulo entre las asíntotas.

<sup>7</sup>Johan Bernoulli la incluyó en uno de sus trabajos en *Acta Eruditorum* aparecido en 1694. Allí la denominaba *lemniscus*, término latino usado para denominar la cinta que adornaba la corona de los vencedores de ciertas competiciones de la antigüedad.

Veamos que la propiedad anterior puede interpretarse en términos de envolventes. Consideramos dos rectas secantes  $y_1$  e  $y_2$ . Construimos la familia de circunferencias centradas en puntos interiores del ángulo menor de los formados por las rectas (tomando los centros en el ángulo mayor la situación sería similar) y de tal forma que cada una de ellas corte segmentos de longitud constante  $d$  sobre las rectas dadas. Nótese que, si deseamos que las circunferencias corten segmentos de igual longitud sobre las rectas, estas deberán estar centradas en la bisectriz del ángulo menor de los formados por las rectas. Si tomamos un sistema de referencia de forma que la bisectriz sobre la que están centradas las circunferencias corresponda con el eje horizontal, las rectas tomarán la forma  $y = \pm mx$ , para algún  $m \in \mathbb{R}$  fijo, y la familia de circunferencias tendrá la ecuación

$$(x - c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{1 + m^2} + \frac{d^2}{4}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Entonces, para cada  $m$  y  $d$ , la envolvente, como no podía ser de otra forma, es la hipérbola

$$y^2 - \frac{x^2}{m^2} = \frac{d^2}{4},$$

cuya distancia entre los vértices es  $d$ . En la figura 12 hemos trazado en azul las rectas iniciales, en amarillo la familia de circunferencias y en rojo la hipérbola envolvente.

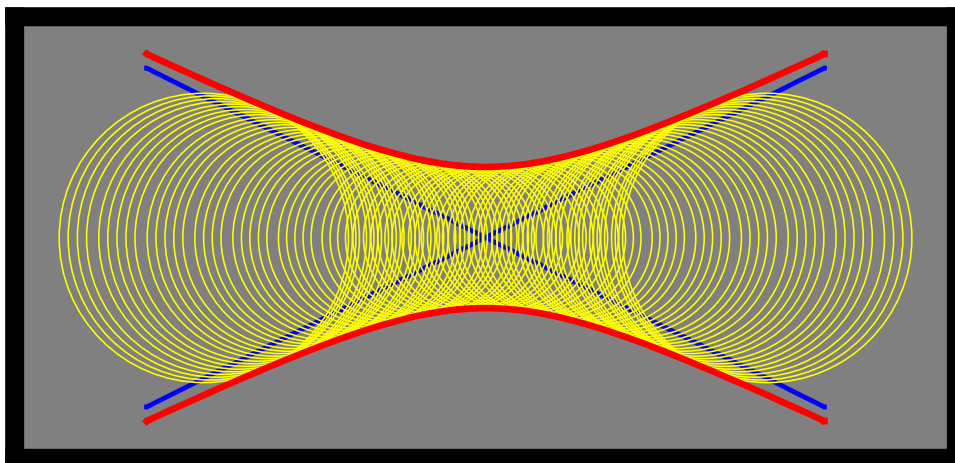


Figura 12.

### 3.5. Una imagen, todas las cónicas

Analícemos, a continuación, otro caso de una familia de segmentos que, como veremos, limita una cónica. Comprobaremos, además, que si suponemos

la familia de segmentos dependiente de un parámetro aparece una familia de cónicas cuya envolvente será la única cónica no contenida en la familia. El tratamiento manual de la primera parte de este ejemplo está tomado de la página web <http://bradley.bradley.edu/~delgado/potw/p253.html> que, aunque ha interrumpido recientemente su actividad, estaba dedicada al planteamiento y resolución de problemas.

*Tomemos un trozo de papel, dibujemos una circunferencia de radio uno en él y fijemos un punto  $P$  de su interior. Dado  $Q$  un punto cualquiera sobre la circunferencia, supongamos que doblamos el papel hasta que  $Q$  se encuentra con  $P$  (véase la figura 13). A continuación, trazamos una línea sobre la marca dejada en el papel por el doblamiento. Si hacemos esto para cada uno de los puntos de la circunferencia aparecerá una región limitada por la familia de rectas; ¿cuál es la forma de dicha región?*

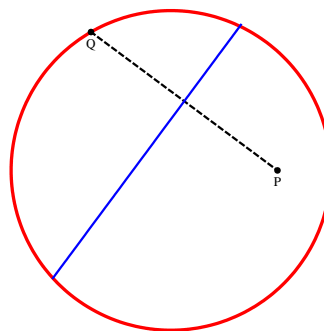


Figura 13.

Para cada  $Q$  la recta trazada es, en realidad, la perpendicular al segmento  $PQ$  pasando por su punto medio. Entonces la región buscada es la envolvente de la familia de rectas formada considerando todos los posibles puntos  $Q$  de la circunferencia. Tomemos un sistema de referencia rectangular con su origen en el centro de la circunferencia y de tal forma que  $P = (a, 0)$ , para cierto  $-1 < a < 1$ . De esta forma cualquier punto  $Q$  podrá expresarse como  $(\cos t, \sin t)$ , para algún  $t \in [0, 2\pi)$ , y las rectas que limitan la región buscada pueden escribirse como

$$x(a - \cos t) - y \sin t + \frac{1 - a^2}{2} = 0.$$

Como en las ocasiones anteriores, la envolvente de esta familia está dada por la solución del sistema (1.1).

En este caso las coordenadas paramétricas de la envolvente son

$$x_a(t) = \frac{1 - a^2}{2(1 - a \cos t)} \cos t, \quad y_a(t) = \frac{1 - a^2}{2(1 - a \cos t)} \sin t,$$

para  $t \in [0, 2\pi)$ . Esta parametrización describe la elipse de ecuación

$$4 \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{4y^2}{1 - a^2} = 1$$

y es la curva delimitando la región que forma la familia de rectas.

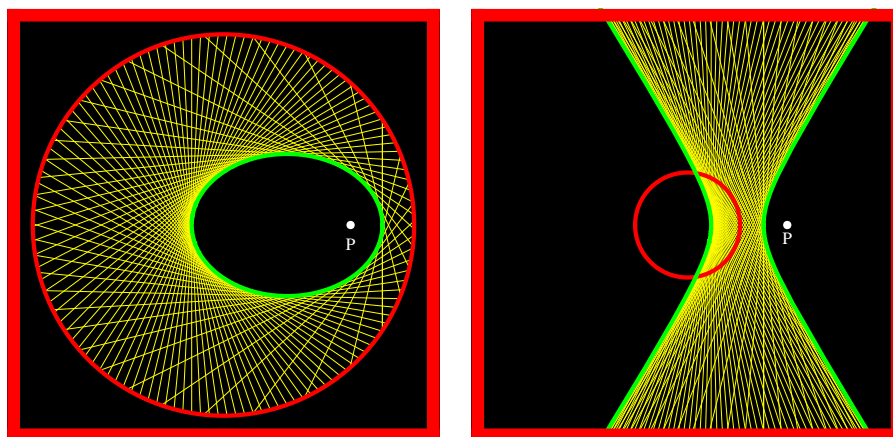


Figura 14.

Si consideramos el punto  $P$  exterior a la circunferencia de partida, en lugar de en el interior como hemos hecho antes, el proceso puede reproducirse pero teniendo en cuenta que  $|a| > 1$ . En este caso la envolvente tendrá la misma ecuación pero se corresponderá con una hipérbola. La familia de segmentos de este ejemplo y su envolvente se muestran en la figura 14; el dibujo de la izquierda corresponde a un caso en el que  $|a| < 1$  y el de la derecha a uno en el que  $|a| > 1$ .

La familia de cónicas

$$\mathcal{C} = \left\{ 4 \left( x - \frac{a}{2} \right)^2 + \frac{4y^2}{1 - a^2} = 1 : a \in \mathbb{R} \right\}$$

(entendiendo que para  $|a| = 1$  degeneran en la recta  $y = 0$ ), formada por elipses e hipérbolas, esconde una última sorpresa. Su envolvente es la curva

$$(-1 + x^2 - 2y)(-1 + x^2 + 2y) = 0;$$

es decir, la pareja de parábolas

$$y = \pm \frac{1 - x^2}{2}.$$

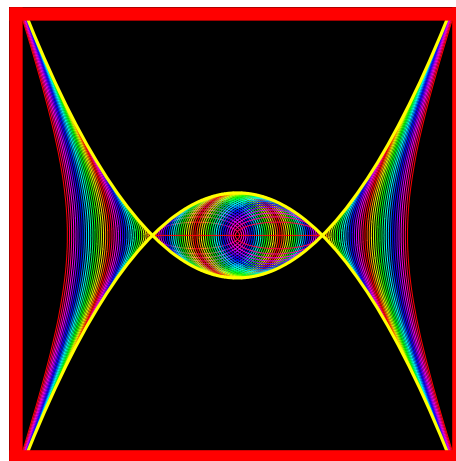


Figura 15.

La familia de cónicas  $\mathcal{C}$  y su envolvente

(en amarillo) se muestran en la figura 15: una imagen, todas las cónicas<sup>8</sup>.

<sup>8</sup>Las elipses de la familia de cónicas  $\mathcal{C}$  se han pintado enteras (están todas contenidas en la región limitada por las dos parábolas); sin embargo, de las hipérbolas sólo hemos trazado la parte comprendida entre los puntos de tangencia con la envolvente.



## 4. Dos familias de curvas definidas mediante envolventes

### 4.1. Las cáusticas

La luz y las matemáticas han mantenido, y mantienen, una larga e intensa relación. A lo largo de los siglos, importantes matemáticos han aparecido vinculados a los avances en cuestiones de óptica. Mostramos, a continuación, algunas pinceladas de esa relación centradas en la ley de reflexión de la luz y las envolventes, el objeto central de este artículo.

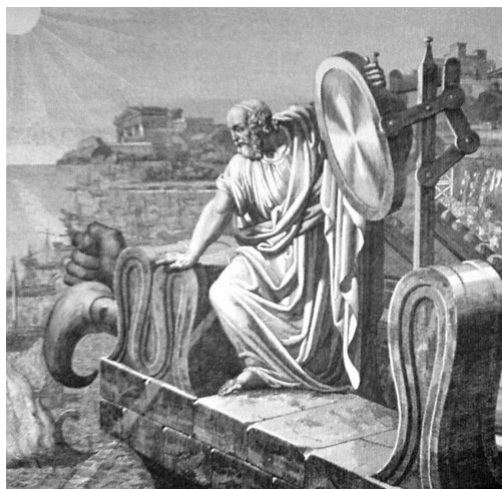


Figura 16: Una de las múltiples representaciones de Arquímedes durante la defensa de Siracusa.

La ley de reflexión de la luz establece que el ángulo de incidencia de un rayo de luz es igual a su ángulo de reflexión, y es conocida desde la antigüedad. Tradicionalmente (véase [5]) la obra titulada *Catóptrica*<sup>9</sup>, atribuida durante mucho tiempo a Euclides (aproximadamente, 325–265 a. de C.), ha sido considerada la referencia más antigua para la ley de reflexión. La *Catóptrica*, al igual que los comentarios clásicos a los *Elementos*, fue redactada por Teón de Alejandría (335–405 d. de C.)<sup>10</sup> y se ha confirmado que es, en realidad, un *curso* dictado por Teón recopilando los conocimientos sobre el tema hasta el momento. Así, la referencia más antigua para una prueba, basada en cierto comportamiento de los rayos de luz, de la ley de reflexión es otra *Catóptrica*,

<sup>9</sup>La catóptrica, según la RAE, es la rama de la óptica que trata de las propiedades de la luz reflejada.

<sup>10</sup>Teón de Alejandría fue el padre de Hypatia, la primer mujer matemática de la que se tiene conocimiento. La vida de Hypatia, asesinada por fundamentalistas cristianos por negarse a renunciar a sus creencias, ha servido de inspiración a A. Amenábar para realizar su última película *Ágora*.

en este caso de Herón de Alejandría (aproximadamente, 10–75 d. de C.) y datada en el siglo primero. De todas formas existen evidencias de que la ley de reflexión se conocía desde varios siglos antes. Por ejemplo, en la *Catóptrica* de Teón se habla de una demostración de ella dada por Arquímedes (287–212 a. de C.). De hecho, la tradición iconográfica, de la que damos una muestra en la figura 16, nos muestra a Arquímedes defendiendo Siracusa de las embestidas del general romano Marcelo usando la reflexión de los rayos solares sobre espejos para hacer arder las naves enemigas. Es conocido que puede hacerse arder objetos por este procedimiento, aunque de ahí a quemar un navío, más teniendo en cuenta los medios disponibles en aquel momento, va un gran trecho. Sin duda, la imagen de Arquímedes y los espejos es simplemente la representación de una leyenda.

La ley de reflexión es el argumento necesario para probar la denominada *propiedad focal de las parábolas*, debida a Diocles (240–180 a. de C.) y que se encuentra contenida en su trabajo *Sobre los espejos ustorios*<sup>11</sup>. Esta propiedad afirma que cada rayo de luz que se refleja sobre un espejo parabólico pasa por un punto fijo. Este punto fijo fue bautizado bastantes años más tarde como *foco de la parábola*.

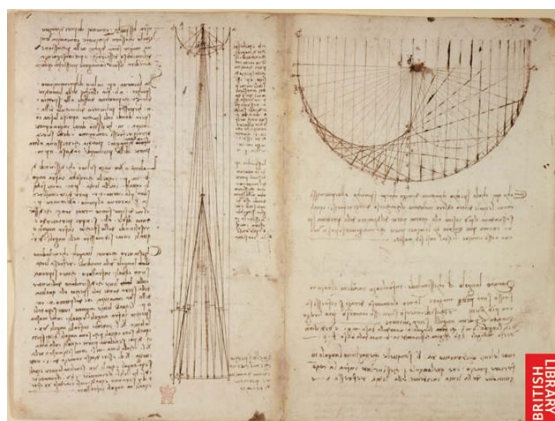


Figura 17.

Los fenómenos de reflexión continuaron fascinando a los investigadores de épocas posteriores. Por ejemplo, Leonardo da Vinci trabajó sobre la reflexión de los rayos solares sobre espejos circulares. Una muestra clara de su

<sup>11</sup>La palabra *ustorio* no deja de ser extraña para la mayoría de las personas. Una búsqueda en el diccionario de la RAE nos informa de que procede de un término latino que puede traducirse como *el que quema* y nos remite a la entrada *espejo ustorio* que define del siguiente modo: espejo cóncavo que, puesto de frente al sol, refleja sus rayos y los reúne en el punto llamado foco, produciendo un calor capaz de quemar, fundir y hasta volatilizar los cuerpos allí colocados.

trabajo en esta línea es el *Codex Arundel*, una colección de notas originales de Leonardo compiladas tras su muerte y perteneciente a la British Library, que puede visitarse virtualmente<sup>12</sup>, y de donde hemos tomado la imagen en la figura 17. En la parte derecha del manuscrito de Leonardo se observa su estudio sobre la reflexión de los rayos solares sobre un espejo circular. La curva que aparece formada por los rayos reflejados se denomina *cáustica de la circunferencia* y resulta sencillo comprobar que se trata de la envolvente de los rayos solares reflejados por el espejo.

La cáustica de la circunferencia puede observarse sobre el contenido de una taza o una copa circular, como se puede apreciar en la imagen izquierda de la figura 18. En la parte derecha de la figura 18 mostramos nuestra versión de los rayos solares reflejados por el espejo circular (en rojo) y su envolvente (en verde).

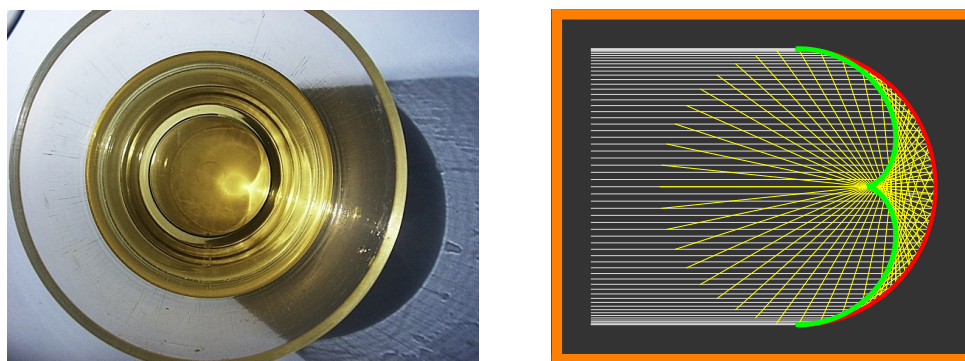


Figura 18.

El primer documento escrito en el que se intenta la determinación de la ecuación de la cáustica de la circunferencia se debe a W. Tschirnhaus (1651–1708), y fue publicado en 1682 en *Acta Eruditorum* (véase [7]). El trabajo de Tschirnhaus, de carácter marcadamente geométrico, había surgido de sus observaciones y experimentos en la fábrica de espejos y porcelanas que su familia regentaba en Alemania. Sin embargo, en su razonamiento había un error: su resultado proporciona una curva de grado cuatro<sup>13</sup> y realmente la curva es de grado seis. Tanto P. La Hire como Johan Bernoulli se percatan de ello y, ambos, publican sus observaciones, criticando duramente la argumentación dada en el trabajo. En un segundo intento, en 1690 y en la misma publicación, Tschirnhaus consigue identificar la envolvente de la circunferencia como la nefroide, una curva, efectivamente, de grado seis. Sin embargo, la primacía sobre el descubrimiento no debe atribuírsele a él. El primero en

<sup>12</sup><http://www.bl.uk/onlinegallery/ttp/ttpbooks.html>

<sup>13</sup>Una curva de grado  $n$  es aquella que está formado por los puntos  $(x, y)$  tales que  $P_n(x, y) = 0$ , donde  $P_n$  es un polinomio en dos variables de grado  $n$ .

determinar la curva en cuestión fue C. Huygens, que en 1678 presentó en la Academia de Ciencias de París una memoria en la que determinaba la curva como un caso particular de epicicloide que se corresponde con la nefroide.



Figura 19: Algunos de los personajes involucrados en la determinación de la cáustica de la circunferencia (de izquierda a derecha): W. Tschirnhaus, P. La Hire, J. Bernoulli y C. Huygens.

La memoria, titulada *Traité de la lumière*, sin embargo, no vio la luz hasta 1690, el año del segundo intento de Tschirnhaus.

En la década de los noventa del siglo diecisiete, los trabajos de G. W. Leibniz (con su cálculo recién inventado bajo el brazo), C. Huygens y Johan Bernoulli desarrollarían la teoría de envolventes de una familia de curvas de un modo más sistemático. El término *envolvente* como tal no hace su aparición hasta el año 1795, cuando G. Monge lo introduce en su obra *Application de l'analyse à la géométrie*.

Podemos suponer que los rayos solares son rayos de luz provenientes de un punto (el sol) que está en el infinito. Pensando la cáustica como una envolvente y tomando un punto cualquiera como fuente de luz, podemos definir la cáustica de una curva, con punto radiante  $P$ , como la envolvente de los rayos provenientes de  $P$  y reflejados por la curva (supuesto que la curva fuese un espejo)<sup>14</sup>. Con esta definición, la nefroide sería la cáustica de la circunferencia con punto radiante en el infinito. Si admitimos que la envolvente pueda degenerar a un solo punto, el foco de una parábola es la cáustica de la parábola con punto radiante en el infinito. Cabe comentar que las únicas curvas para las que la cáustica degenera a un punto son las cónicas. Para la parábola, como ya hemos dicho, se corresponde con la propiedad focal. Si el punto radiante es finito, cualquier elipse o hipérbola que lo tenga como

<sup>14</sup>En algunos textos se refieren a la envolvente de los rayos reflejados como *catacáustica* o *cáustica por reflexión*. Esto suele hacerse para diferenciar claramente esta curva de la envolvente de los rayos refractados por una curva, que se denomina *dicáustica* o *cáustica por refracción*. El análisis de algunas dicáusticas puede hacerse de manera sencilla usando la ley de Snell para la refracción.

foco refleja todos los rayos de luz a través de un haz de rectas que pasa por el otro foco.

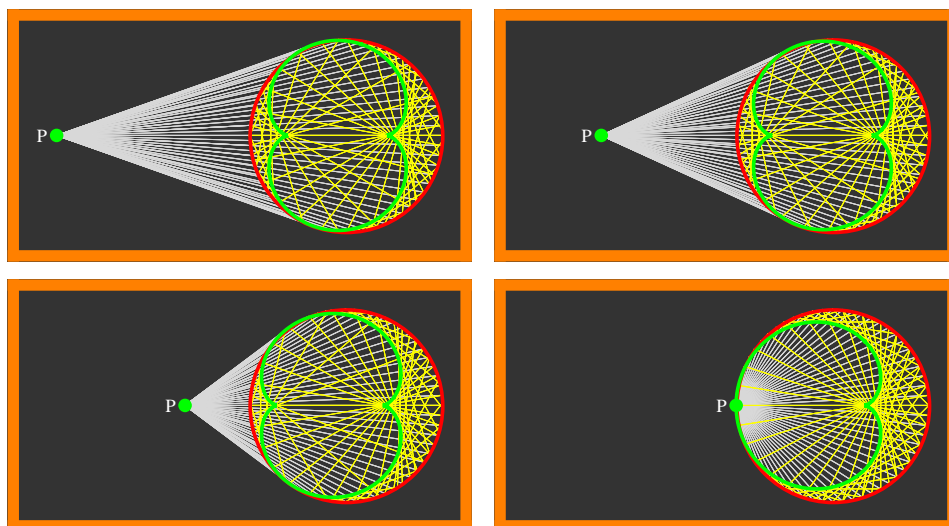


Figura 20.

En la figura 20 mostramos cuatro momentos de una animación de las cáusticas de la circunferencia (que aparecen en verde) cuando el punto radiante va aproximándose al borde de la misma desde el exterior. Resulta interesante observar que, en la primera imagen, la cáustica todavía se parece mucho a una nefroide (que corresponde al caso en que el punto radiante sea el infinito) y que, cuando el punto radiante está sobre la circunferencia, la cáustica ha tomado la forma de una cardioide.

Las cáusticas son fuente de sorprendentes relaciones, y existe abundante material sobre ellas en diversos sitios de internet. Para cerrar, al menos momentáneamente, este aspecto de las envolventes me gustaría comentar un último ejemplo en el que hace su aparición otra curva fascinante: la catenaria. De todos es bien conocido que los cables o cadenas<sup>15</sup> suspendidos de sus extremos, si sobre ellos sólo actúa la gravedad, adoptan la forma de una catenaria<sup>16</sup>. Algo menos conocido es que un arco con forma catenaria tiene

<sup>15</sup>La palabra latina *catena* significa cadena.

<sup>16</sup>La determinación de la expresión para la catenaria no fue elemental. Ya G. Galilei, a principios de siglo XVI, se preguntó por esta cuestión, y llegó a dar por sentado que era una parábola. La confusión es más que comprensible. Tómese una cadena y déjese colgar de sus extremos; ahora, constrúyase la parábola que pasa por los extremos de la cadena y por su punto más bajo. Al ponerse juntas ambas curvas veremos que la diferencia entre ellas es muy escasa. Pero hubo que esperar al año 1691 para que G. W. Leibniz, C. Huygens y Johan Bernoulli determinasen, de manera simultánea y en respuesta a un desafío lanzado por Jacob Bernoulli, la ecuación de la catenaria.

la propiedad de sujetarse a sí mismo. A pesar de su optimalidad, hasta tiempos recientes los arcos catenarios han sido poco usados en arquitectura. Uno de los primeros arquitectos que hace uso de la catenaria en su obra es A. Gaudí, que nos ofrece la siguiente reflexión sobre ella (extraída de [6]): “*la catenaria da elegancia y espiritualidad al arco, elegancia y espiritualidad para la construcción entera. La función autoestable de la catenaria evita contrafuertes, el edificio pesa menos, gana una gracia vaporosa y se aguanta sin raros accesorios ortopédicos*”. Gaudí uso arcos catenarios en el Colegio de las Teresianas, en la casa Batlló, en la casa Milá y, por supuesto, en la Sagrada Familia.

Otra de sus propiedades, la que nos permite colarla en esta parte de nuestro trabajo, es que la cáustica con punto radiante en el infinito de una función exponencial es, precisamente, una catenaria. La figura 21 muestra en rojo la función exponencial (en este caso de base menor que uno), en amarillo los rayos reflejados y en verde la catenaria que aparece como cáustica.

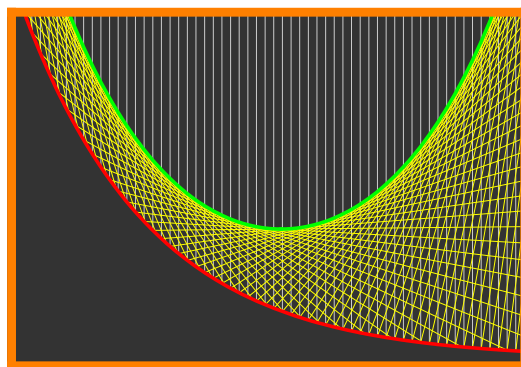


Figura 21.

## 4.2. Las evolutas

C. Huygens, en su obra *Horologium oscillatorium*, fechada en 1673, desarrolló el concepto de *evoluta* en relación con sus trabajos sobre el péndulo cicloidal. La evoluta de una curva, en su definición actual, es la envolvente de la familia de rectas normales a dicha curva en todos sus puntos. La evoluta puede definirse también como el lugar geométrico de los centros de curvatura de la curva dada. En esta subsección mostraremos a grandes rasgos, además de algunos ejemplos clásicos, el contenido de la obra de Huygens y su relación con las evolutas.

Aunque estudiadas con otro propósito, las evolutas de algunas curvas habían sido previamente calculadas por Apolonio de Perga en el Libro V de su obra *Secciones cónicas*. En concreto había determinado las evolutas de las cónicas. Obtuvo que la evoluta de la parábola  $y^2 = 2px$  es la cúbica  $27py^2 = 8(x-p)^3$ ; la de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ ; y la de la hipérbola  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  es  $(ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}$ . Todas las cónicas, las rectas normales y sus envolventes (en verde) se muestran en la figura 22.

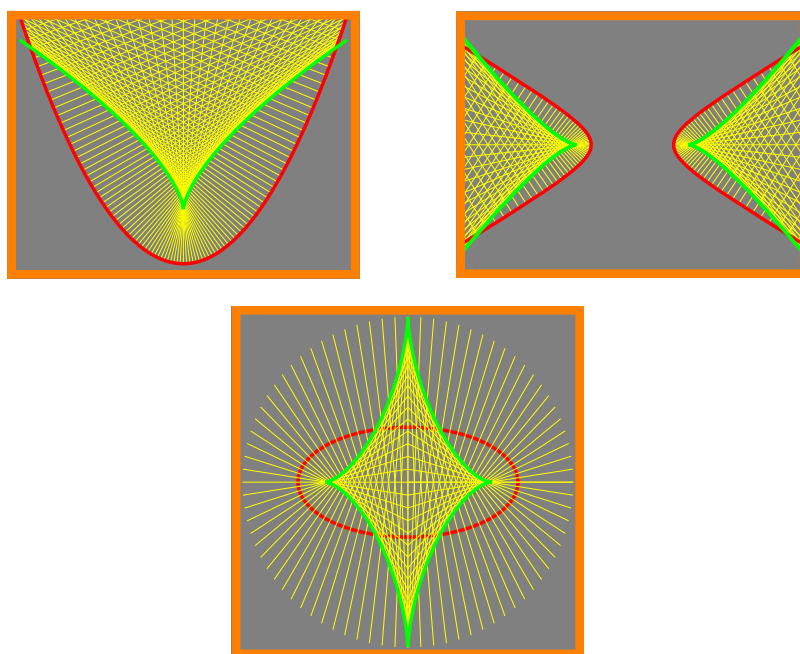


Figura 22.

La razón de Huygens para trabajar sobre las evolutas tiene su origen en su interés en la construcción de un péndulo de precisión. La búsqueda de relojes seguros era una necesidad apremiante de su época tanto para la geografía y la navegación científica como para la astronomía teórica. En el péndulo que describe trayectorias circulares el periodo de oscilación depende de la amplitud de su trayectoria. En otras palabras, si a un péndulo de trayectoria circular se le modifica la amplitud de oscilación entonces deja de medir correctamente el tiempo, puesto que se altera también el periodo de su oscilación. El interés por la *cicloide*<sup>17</sup> de la comunidad científica de la época hizo que Huygens fijase su atención sobre esta curva para intentar construir su péndulo. Recordemos que la cicloide es la curva que genera la trayectoria de un punto de una circunferencia de radio  $a$  que gira sin deslizamiento sobre una recta.

En primer lugar, Huygens probó que, sobre la cicloide, el periodo de oscilación es independiente de la amplitud. Esto es lo que se conoce como propiedad *tautócrona*<sup>18</sup>. De esto se sigue que dadas dos partículas,  $A$  y  $B$ , que

<sup>17</sup>La cicloide es llamada en muchas ocasiones la *Helena de la geometría* por comparación con la mítica Helena de Troya. La comparación se debe a que ambas fueron motivo de agrias disputas: la segunda porque su raptó por parte de Paris dio lugar a la guerra entre Esparta y Troya que se narra en la *Ilíada*; la primera porque la prioridad sobre la demostración de algunas de sus singulares propiedades fue motivo de discusión entre importantes matemáticos del siglo XVII.

<sup>18</sup>Igual tiempo.

se desplazan sobre la cicloide por el efecto de la gravedad, la figura 23 ilustra la situación, pero que comienzan su movimiento a distinta altura, alcanzarán el punto más bajo de la curva en el mismo instante.

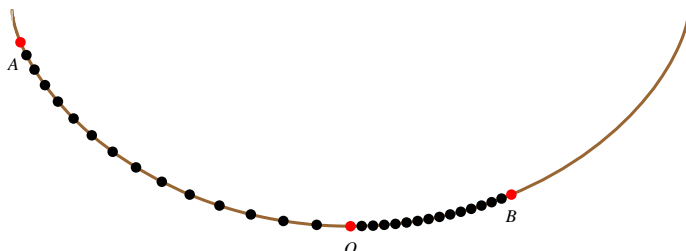


Figura 23.

Una vez probada la propiedad tautócrona de la cicloide debemos encontrar un procedimiento para que un péndulo describa un arco con esa forma. Esto va a ser posible gracias a la siguiente propiedad de las cicloides: la evoluta de una cicloide es la misma cicloide pero trasladada.

Considerando la parametrización habitual para la cicloide,  $x = a(\theta - \operatorname{sen} \theta)$  e  $y = a(1 - \cos \theta)$ , podemos probar que, para cada  $\theta$ , la ecuación de la recta normal es

$$x \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} + y \cos \frac{\theta}{2} = a\theta \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

Para esta familia de rectas, la solución del sistema (2.1), en este caso, será

$$x = a(\theta + \operatorname{sen} \theta), \quad y = a(\cos \theta - 1).$$

Usando la traslación  $\theta = \alpha + \pi$ , las ecuaciones anteriores se transforman en

$$x = a\pi + a(\alpha - \operatorname{sen} \alpha), \quad y = -2a + a(1 - \cos \alpha),$$

que se corresponde con la cicloide inicial, trasladada por el vector  $(a\pi, -2a)$ .

En la figura 24 se puede ver en rojo la cicloide inicial, en amarillo las rectas normales y en verde la cicloide evoluta. De esta forma, para construir el péndulo cicloidal basta tomar dos pestañas con forma de medio arco de cicloide y colgar, en la unión entre ambas, un peso en una cuerda cuya longitud coincida con la de los arcos. Así, la cuerda, en su oscilación, siempre describirá una cicloide.

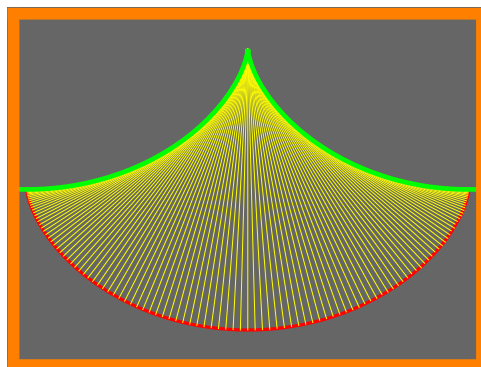


Figura 24.



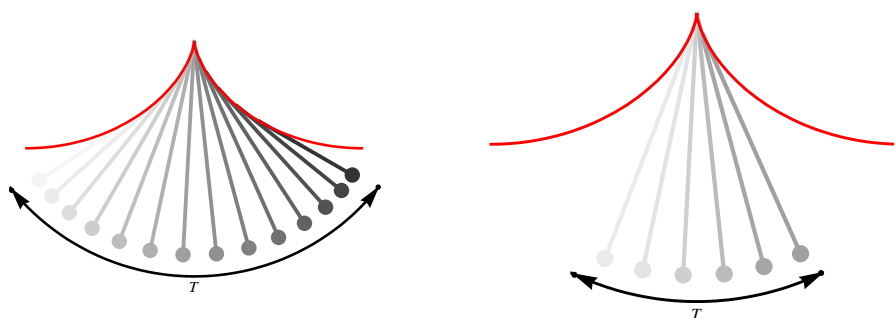


Figura 25.

En la figura 25 mostramos el desplazamiento del péndulo con dos amplitudes distintas en las que emplea un mismo tiempo  $T$ ; y en la figura 26 se muestra la página del *Horologium oscillatorium* que contiene el diseño del péndulo cicloidal de Huygens.

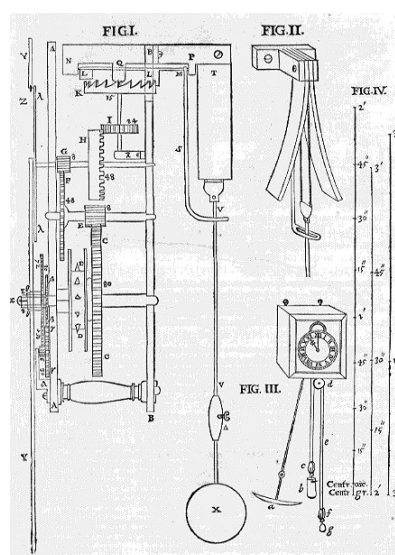


Figura 26.

## 5. Eadem mutata resurgo

Como ya dijimos antes Johan Bernoulli estuvo involucrado en los primeros trabajos conocidos sobre la cáustica de la circunferencia. Sin embargo, fue su hermano Jacob quien obtuvo algunos resultados sorprendentes relacionados con las envolventes. El trabajo de Jacob se concentró sobre una curva que fue su gran pasión: la espiral logarítmica.

La expresión general, en coordenadas paramétricas, para la espiral logarítmica es

$$x = ke^{\lambda\theta} \cos \theta, \quad y = ke^{\lambda\theta} \sin \theta,$$

donde el parámetro  $\theta \in \mathbb{R}$  y las constantes  $\lambda$  y  $k$  son números reales. En la parte inferior derecha de la figura 27 se muestra un caso particular de espiral logarítmica. Es frecuente encontrar espirales logarítmicas en la naturaleza. Por ejemplo, en la concha del nautilus (*Nautilus Pompilius*), un molusco

marino cuya concha crece uniformemente alrededor de un centro y hacia el exterior adquiriendo la forma de una espiral logarítmica (véanse las imágenes de la parte superior de la figura 27). Igualmente se presenta en la distribución que adoptan las pipas en los girasoles, en las piñas de las coníferas o (de manera aproximada) en el patrón que siguen las borrascas atmosféricas, los huracanes y las galaxias (en la figura 27 la parte inferior izquierda la ocupa una imagen de satélite del huracán *Katrina*, que presenta una forma espiral casi perfecta).

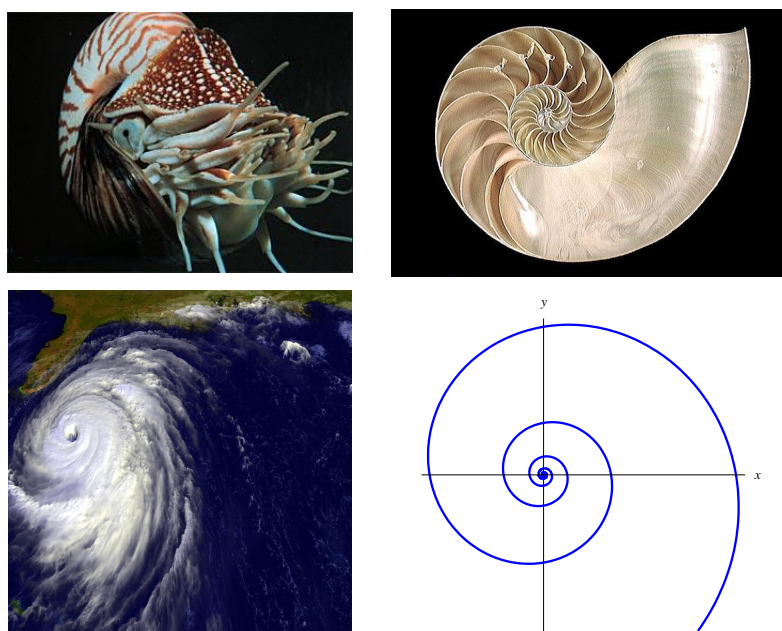


Figura 27.

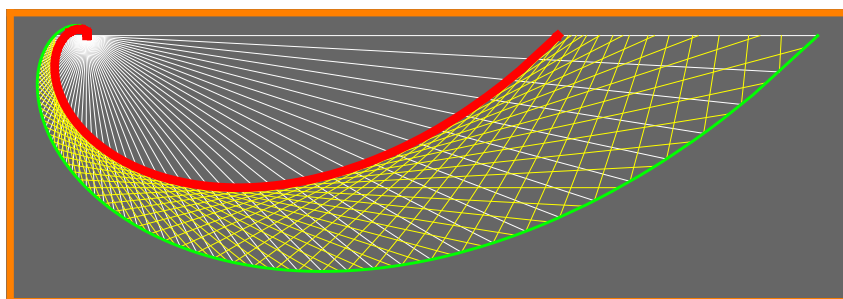
La espiral logarítmica fue obtenida por R. Descartes en 1638 como solución a un problema propuesto por G. Galilei. E. Torricelli, en 1645, determinó la longitud de una espiral desde un punto cualquiera hasta su polo (el punto donde tiende a acumularse la espiral). Sin embargo, fue Jacob Bernoulli (en la parte izquierda de la figura 28) quien, a finales del siglo XVII y armado con el cálculo diferencial, estudió en profundidad múltiples propiedades de la espiral logarítmica. A lo largo de varios trabajos realizó un profundo estudio de la misma, quedando cautivado por ella hasta el punto de denominarla *spira mirabilis* (espiral maravillosa). Entre las propiedades que analizó Jacob Bernoulli destaca el hecho de que la evoluta y la cáustica con punto radiante en el polo de una espiral logarítmica son, a su vez, espirales logarítmicas pero giradas un cierto ángulo con respecto a la inicial. Este hecho le provocó tal fascinación que pidió que en su tumba, en el cementerio de Basilea, figurase

la inscripción *Eadem mutata resurgo*, que puede traducirse como *Aunque modificada, resurjo*, y un grabado en piedra con una espiral logarítmica. Sin embargo, como se ve en la parte derecha de la figura 28, no cumplieron con su deseo, puesto que la espiral que aparece en su mausoleo es, en realidad, una espiral arquimediana.

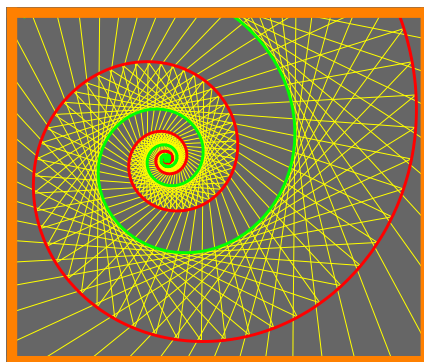


Figura 28.

Cerramos esta revisión de la espiral logarítmica, y con ella este trabajo, mostrando dos imágenes que recogen parte de la belleza que cautivó a Jacob Bernoulli, allá por el siglo diecisiete. Siendo la espiral de partida la coloreada en verde, la cáustica con punto radiante en el polo de una espiral logarítmica es otra espiral logarítmica...



... y la evoluta de una espiral logarítmica es otra espiral logarítmica.



## Bibliografía

- [1] T. M. Apostol y M. A. Mnatsakanian, Proof without words: surprising property of hyperbolas, *Math. Mag.* **79** (2006), 339.
- [2] T. M. Apostol y M. A. Mnatsakanian, A new look at the so-called Trammel of Archimedes, *Amer. Math. Monthly* **116** (2009), 115–133.
- [3] V. G. Boltianski, *La envolvente*, Editorial MIR, Moscú, 1977.
- [4] Ó. Ciaurri, A property of parabolae, *prepublicación*.
- [5] T. L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1921; reimpresión, Dover, 1981.
- [6] R. Ibáñez, *El vientre de un arquitecto (La búsqueda de la forma)*, en “Un paseo por la geometría, 2003–04”, editores R. Ibáñez y M. Macho, Universidad del País Vasco, 2004.
- [7] G. Minagari Scarpello y A. Scimone, The work of Tschirnhaus, La Hire and Leibniz on catacaustics and the birth of the envelopes of lines in the 17th century, *Arch. Hist. Exact Sci.* **59** (2005), 223–250.
- [8] G. Quenell, Envelopes and string art, *Math. Mag.* **82** (2009), 174–186.
- [9] D. Seiple, E. Boman y R. Brazier, Mom! There’s an astroid in my closet!, *Math. Mag.* **80** (2007), 104–111.
- [10] V. Stakhovsky, Problem 11279, *Amer. Math. Monthly* **114** (2007), 259.
- [11] G. Tsintsifas, Problem 3255, *Cruz Mathematicorum* **33** (2007), 298.

**Óscar Ciaurri Ramírez**

Universidad de La Rioja

Departamento de Matemáticas y Computación

C/Luis de Ulloa s/n, 26004 Logroño

e-mail: [oscar.ciaurri@unirioja.es](mailto:oscar.ciaurri@unirioja.es)

