Aproximación Topológica a problemas de elección social

por

Esteban Induráin, Universidad Pública de Navarra

Quedé sorprendido por el interés poco común de un público, normalmente inquieto, que aceptaba entrar en el juego de la reflexión. No extrañaban las ideas trascendentes, ni la aproximación al infinito matemático, y tenían curiosidad por conocer las últimas razones de la sinrazón de las paradojas. Procuré dárselas, pero a través de esa compleja comunicación, entre el orador y el auditorio, que tan bien conocemos los profesores, percibí que no les bastaban las razones, sino que exigían la verdad, una verdad clara e indiscutible.

Al final, las consultas de unos jóvenes, posibles estudiantes de matemáticas, tal vez algo deslumbrados por una problemática nueva, que preguntaban por el camino a seguir para acceder a estudios superiores.

Pregunta semejante a la que el rey de Siracusa formulara a Arquímedes, hace más de veinte siglos. Fascinado el rey por la claridad y belleza con que Arquímedes presentara las teorías matemáticas, y deseando participar en este juego intelectual, pidió que se le diera una instrucción rápida en el método matemático. "Lo siento majestad, en la Matemática no hay atajos para reyes", *le contestó Arquímedes.*

(Enrique Linés Escardó: *"Reflexiones sobre la certeza matemática"*. Lección inaugural del curso 1984-1985, pronunciada el 1 de Octubre de 1984. UNED. Madrid. 1984).

1. Introducción

A guisa de introducción, viene a cuento que nos planteemos el problema matemático descrito por el ejemplo que viene a continuación:

Ejemplo 1.1: *Dos personas están situadas en el centro del desierto, sin agua. Alguien les dice que hay un oasis a diez minutos de allí. Lamentablemente, quien tal cosa les dice no sabe en qué dirección y sentido hay que moverse para llegar a él. Las dos personas deciden moverse ya que si se quedan quietos donde están perecen de sed. Y deciden que caminarán juntos en busca del oasis. Pero tienen que ponerse de acuerdo antes en la dirección y sentido hacia la cuál caminarán. Cada uno de ellos tiene sus propias* preferencias *o pareceres basados en su intuición*[1]*, y entre estas posibles preferencias de cada individuo se puede considerar que hay una idea de* proximidad, similitud *o incluso* continuidad, *en el sentido que a direcciones próximas corresponden preferencias parecidas (próximas). Antes de moverse los dos individuos quieren* ponerse de acuerdo. *Para ello buscan una* regla *que determine idea de* preferencia común, *cumpliendo las siguientes condiciones que podrían denominarse de* sentido común:

i) Si ambos tienen la misma preferencia, la regla les obliga a que se muevan en la dirección y sentido que determina tal preferencia en la que ambos parten ya de una coincidencia y acuerdo.

ii) El orden en que los dos individuos manifiestan sus preferencias no tiene efecto alguno sobre la decisión que tomen siguiendo la regla. Esto es, no por hablar primero o hablar más un individuo va a imponer su preferencia al otro. La regla trata a ambos individuos por igual.

iii) A preferencias próximas la regla debe asignar decisiones, esto es, determinaciones concretas de dirección y sentido en los que moverse, que resulten también próximos.

La cuestión que se plantea es si estos individuos encontrarán una tal regla *que les permita salir del impasse moviéndose en alguna determinada dirección y sentido, y, con suerte, encontrar el oasis y salvarse.*

Por sorprendente que pueda parecer, el ejemplo anterior acaba planteando un problema *nada trivial* que corresponde a una rama de la matemática habitualmente considerada como *"matemática pura"*, a saber, se trata de un elegante problema de *Topología Algebraica* relacionado con la *no retractibilidad de una banda de Moebius sobre su frontera.*

[1]Por ejemplo, algo le puede hacer pensar que el oasis se encuentra hacia el Noroeste, donde saben que están las montañas.

Pasamos ahora a analizar el *ejemplo* propuesto:

Comenzamos por observar que el conjunto de posibles preferencias de cada individuo, en cuanto a elegir una dirección y sentido hacia la cual moverse, se puede identificar con la circunferencia unidad $\mathbb{S}^1$, sobre la que consideraremos su topología usual.

El diseño de una regla consiste, por tanto, en encontrar una determinada función $F : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ que sea continua, y que cumpla además que

$$F(x, y) = F(y, x) \text{ y } F(z, z) = z \quad (x, y, z \in \mathbb{S}^1).$$

Pero el hecho de que $F(x, y) = F(y, x)$ nos puede hacer pensar en definir una función continua *directamente sobre un espacio topológico cociente de* $\mathbb{S}^1$*, tras haber identificado el punto* (x, y) *con el punto* (y, x) $(x, y \in \mathbb{S}^1)$.

Resulta que este cociente es topológicamente una *banda de Moebius.* Y resulta además que los puntos de la diagonal de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ se corresponden en este cociente, precisamente, con la frontera de tal banda de Moebius.

Como la frontera de la banda de Moebius es topológicamente una circunferencia $\mathbb{S}^1$, el objetivo del problema que nos ocupa consistiría en encontrar una aplicación continua de la banda de Moebius sobre su borde o frontera, cuya restricción al borde fuese la aplicación identidad. En otras palabras, hemos de hallar una *retracción* de la banda de Moebius sobre su frontera.

Y ahora, la teoría clásica de Homotopía en Topología Algebraica nos dice que *no existe tal retracción.* Y el problema queda así resuelto por la negativa:

No va a ser posible poner de acuerdo a esas dos personas.

(Puede verse un estudio más detallado de este problema en el artículo titulado *"The Moebius strip and a social choice paradox"*, de Juan Carlos Candeal y Esteban Induráin, Economics Letters, 1994).

Que nosotros sepamos, es la primera aplicación en Ciencias Sociales[2] que se le ha encontrado a esa *extravagancia matemática* que corresponde a una *superficie de una sola cara,* y que conocemos con el nombre de *banda o cinta de Moebius.*

En estas aplicaciones de la matemática a las Ciencias Sociales, ha aparecido recientemente una corriente que utiliza potentes resultados *topológicos,* propios además de Topología Algebraica (homología y homotopía).

En el ejemplo que hemos propuesto aparece un *"espacio de preferencias"* que se identifica con $\mathbb{S}^1$, y se busca después una aplicación (*regla*) de $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ en $\mathbb{S}^1$ que cumpla determinadas propiedades. Pues bien, el caso general de este tipo de

[2]Hay una teoría apasionante, y aparecida hace no más de cincuenta años, denominada *"Teoría Matemática de la Elección Social"*; véase, por ejemplo, *"Social Choice theory"*, de Jerry S. Kelly (Springer Verlag, New York, 1988).

problema corresponde a buscar aplicaciones continuas del espacio producto X^n de n copias de un espacio topológico X que modela el "espacio de preferencias", y con valores en X. Y se ha demostrado que la existencia de una tal regla está ligada a propiedades topológicas de X, como la *contractibilidad* del espacio. En espacios no contractibles[3] tal regla no siempre existe. Esta teoría concreta tiene poco más de veinte años y se considera iniciada en el artículo de G. Chichilnisky y G. Heal titulado *"Necessary and sufficient conditions for a resolution of the social choice paradox"* (Journal of Economic Theory, 1983).

2. La Teoría Matemática de la Elección Social

El problema planteado en la introducción es un problema de "elección social", en el que a partir de las preferencias individuales (en este caso de *dos* agentes), se ha de diseñar una "regla", o bien una "preferencia social" que ponga de acuerdo a ambos, siendo considerada como la "preferencia de la sociedad en su conjunto" (en este caso la "sociedad" es ese conjunto de dos individuos), y que debe reflejar y respetar, en la medida de lo posible, las preferencias "individuales" de los agentes que componen la sociedad.

Por fijar ideas, si hay *unanimidad* en un hecho (por ejemplo, si *todos y cada uno* de los miembros de la sociedad, al establecer sus preferencias individuales, dicen que "el elemento x es mejor que el y") la "preferencia social" o "regla de agregación de preferencias individuales" deberá respetar esa unanimidad (no tendría ningún sentido ahora que la preferencia *social* declarase en última instancia que y es mejor que x).

La Elección Social (o al menos, el enfoque matemático de la misma) puede considerarse como una disciplina integrada en la "Teoría de la Decisión", disciplina científica que centrándose en aspectos cuantitativos y estructurales trata de estudiar la metodología y propiedades de las reglas que llevan a un individuo, o colectivo, a tomar una decisión. Esta parte (Elección Social) de la Teoría de la Decisión está dedicada al estudio de los métodos, sistemas e instituciones para la realización de "elecciones colectivas", esto es, elecciones o decisiones que afectan a un colectivo (grupo de gente; votantes en unas elecciones; agentes económicos; empresarios, directivos o socios que han de tomar una decisión económica en su empresa, etc.). La idea fundamental subyacente a toda la teoría de la Elección Social es la búsqueda de "buenas reglas de elección", en el sentido de que la elección "social" que se tome respete de algún modo las preferencias "individuales" de cada agente o individuo que forme parte del colectivo que haya tomado esa decisión "social".

No resulta en absoluto sencillo el diseño de tales reglas. Si bien pueden encon-

[3] Es el caso de $\mathbb{S}^1$.

trarse reglas que respeten alguna de las restricciones que nuestro "sentido común" impondría a una regla de elección "colectiva" (por ejemplo, que respete el anonimato de los votantes), al elaborar una lista , incluso pequeña, de "restricciones que nuestro sentido común impondría a una regla de elección colectiva", ya no es tan sencillo encontrar una regla.

De hecho, y como muestra el famoso *Teorema de Imposibilidad de Arrow* (1950-1951), puede incluso que no exista regla para una lista dada de restricciones.

Este resultado, quizá sorprendente cuando se tiene noticia de él por primera vez, resulta desalentador, y, a nuestro modo de ver, contiene una fuerte carga psicológica, ya que viene a decir que, de acuerdo con esa lista de restricciones impuestas por nuestro "sentido común", toda regla colectiva que se tome va a tener alguna imperfección . En este sentido de la toma de decisiones colectivas, no solamente cualquier colectivo o sociedad no sería perfecto, sino que, por más que se esforzase, nunca podría serlo. En efecto, no sólo para el colectivo resultará difícil tomar una decisión o regla de elección social, sino que por más perfecta que sea la regla que se tome, "nunca lloverá a gusto de todos", pues dicha regla contravendrá al menos una de esas restricciones impuestas.

Ante la aparición de un resultado tan negativo como la no existencia de una regla social (bajo una cierta lista de restricciones, lógicas, que ha impuesto nuestro sentido común) cabría incluso considerar como "caso cerrado", ya carente de interés, todo estudio de la "Elección Social", pensando que, si no va a haber regla, "ya no hay nada que estudiar, poco podemos hacer". Dicho de otra manera, el teorema de imposibilidad terminaría ya con todo estudio acerca de la Elección Social (y además, terminaría de una manera desalentadora).

A nuestro modo de ver, esta postura anterior sería de lo más acientífico. Precisamente, la aparición de un teorema de imposibilidad como el de Arrow (1950-1951), nos lleva a plantearnos cuestiones muy profundas, y de muy diversa índole. Por ejemplo, a un nivel psicológico, nos lleva a replantearnos nuestra propia idea de sentido común , ya que para encontrar algún resultado de "posibilidad" (existencia de regla) habremos de "relajar" esa idea inicial de sentido común con la que habíamos empezado. Esto habrá de hacerse tratando de eliminar algunas de las restricciones que ese sentido común inicial impondría a una regla de "elección social", o cuando menos, sustituyéndolas por otras restricciones menos exigentes (y, claro está, que sigan siendo acordes con nuestro sentido común). Además, y a un nivel científico (y ya en un plano matemático), incluso en una situación de imposibilidad (no existencia de regla colectiva) sigue teniendo interés el estudio de "reglas".

A pesar de que no habrá una regla que satisfaga todas las restricciones, o, en otras palabras, toda decisión, regla, o elección colectiva que se tome tendrá algún defecto, ya que irá en contra de alguna de las restricciones, no deja de tener perfecto sentido, en tal situación, el estudio de "minimización de lo malo que una regla pueda tener", respondiendo a la idea de tener "del mal, el menos", idea que sigue siendo apasionante, y que genera numerosos problemas matemáticos aún por analizar. Si bien una regla tiene, seguro, algo de malo (por el resultado de imposibilidad), puede todavía tener bastante de bueno, y, por ello, ser digna de estudio. Cabe decir también que el saber "detectar" qué tiene de bueno (y, sobre todo, qué tiene de malo) una regla dada, es "todo un arte", entendiendo con ello que, precisamente, la teoría de la Elección Social reserva gran parte de su contenido al análisis cualitativo (estudio, y "detección" de propiedades buenas y malas) de las reglas de elección social o decisión colectiva.

Ese análisis cualitativo entronca con la idea anterior de saber relajar esa idea inicial de sentido común, puesto que han de buscarse "cualidades" que sean próximas o parecidas a las que exigiríamos en esas restricciones iniciales de nuestro sentido común a una regla de elección colectiva, y que, aun siendo próximas, den lugar a resultados de *posibilidad* (aparición de reglas). Es tarea nada fácil, y que, de nuevo, despierta el entusiasmo científico.

Veamos ahora algún *ejemplo* inicial acerca de cómo a partir de preferencias o elecciones "individuales" no resulta en absoluto sencillo obtener una preferencia o elección "social", colectiva que satisfaga buenas propiedades:

Ejemplo 2.1 (El dilema del prisionero. Relación de la Elección Social con la Teoría de Juegos)

Imaginemos que dos atracadores A y B han sido capturados por la Policía, pero han podido destruir las pruebas de una acción criminal más grave, con lo que esperan ser condenados, únicamente, a una pena pequeña, por un delito menor. Veamos cómo la Policía no tardará en hacerles caer y confesar, con "lógica implacable", apelando a su "interés racional": La situación para ambos es idéntica, por lo cual nos basta considerar el caso de uno cualquiera de ellos, sea A. Naturalmente, la Policía está interesada en conseguir una confesión completa de A, e intenta convencerle de los beneficios que le reportará actuar de esa forma. Si su confesión se utiliza para condenar a su compinche en el crimen, B, A quedará libre. Por otra parte, si B también confiesa y la declaración de A no es ya necesaria para condenar a B, la confesión de A serviría para mitigar un poco su pena, que se reduciría de 51 a 50 años de cárcel (suponemos que la pena mayor es de 50 años, y la menor, de un año). Si a A le preocupa únicamente su propio interés, su razonamiento acaba siendo "no importa lo que haga B, lo importante para mi es confesar". Como B está en la misma situación de A hará lo mismo, siendo ambos condenados a 50 años,... ¿es esto un logro para ellos? Si en vez de un interés individual influido por lo "social" (pensando en lo que haga el otro recluso) hubiesen prescindido de él, hubiesen observado que la única manera de alcanzar la pena menor es no confesando, y hubiesen "optimizado la situación colectiva" no confesando, siendo así condenados a una pena menor de un año.

Comentario: Si no existiera el otro recluso, la preferencia "individual" de A (y de B) sería no confesar. Al existir el otro recluso, el juego entra en acción, y si bien la mejor "regla colectiva" es "no confesar ninguno de los dos", parece que, siendo tanto A como B más individualistas, o, en definitiva, más egoístas, la "regla colectiva" que aparecería es "confesar los dos", cuya consecuencia final en absoluto resulta la mejor para ambos.

Ejemplo 2.2 (Manipulación del territorio que conduce a distinto resultado final en una elección de representantes en el Parlamento. Hasta la Geografía puede influir en el resultado obtenido a través de una regla de Elección Social).

Un país imaginario consta de nueve provincias, que denotaremos NW (Noroeste), NC (Norte Central), NE (Noreste), CW (Centro-Oeste), CC (Centro-Centro), CE (Centro-Este), SW (Sur-Oeste), SC (Sur Central) y SE (Sureste). En dicho país va a haber unas elecciones democráticas donde se han de elegir tres representantes en el Parlamento. Se presentan candidatos de dos partidos (que denotaremos A y B). Se da la circunstancia de que cada una de las regiones está igualmente poblada por 170.000 habitantes con derecho a voto. Se ha hecho un sondeo electoral, y se ha establecido que:

- En la provincia NW 10.000 votarán al partido A, y 7.000 al B.
- En la provincia NC 8.000 votarán al partido A, y 9.000 al B.
- En la provincia NE 7.000 votarán al partido A, y 10.000 al B.
- En la provincia CW 8.000 votarán al partido A, y 9.000 al B.
- En la provincia CC 10.000 votarán al partido A, y 7.000 al B.
- En la provincia CE 7.000 votarán al partido A, y 10.000 al B.
- En la provincia SW 8.000 votarán al partido A, y 9.000 al B.
- En la provincia SC 10.000 votarán al partido A, y 7.000 al B.
- En la provincia SE 7.000 votarán al partido A, y 10.000 al B.

Con este sondeo en la mano, si las regiones autónomas del país fuesen "Tercio Norte" (NW, NC, NE), "Franja Central" (CW, CC, CE) y "Tercio Sur" (SW, SC, SE), y cada región autónoma eligiera un representante por mayoría simple de votos, el partido B obtendría tres representantes, y nada quedaría para el partido A. Sin embargo, si las regiones autónomas fuesen "Banda Oeste" (NW, CW, SW), "Banda Central" (NC, CC, SC) y "Banda Este" (NE, CE, SE), la situación política final sería bien distinta, ya que el partido A ganaría en las dos primeras regiones, perdiendo en la última. Habría así dos representantes de A, y uno de B.

Evidentemente, si el Gobierno en el poder (antes de las elecciones) fuese del partido A, podría sacar una ley diciendo que: *"A partir de hoy, las regiones autónomas seguirán un esquema de franjas verticales" (los argumentos que explicaría al ciudadano para justificar la necesidad de la ley nos tienen sin cuidado, el motivo político está bien claro).*

Comentario: Ante una afirmación como *"hay científicos (matemáticos, economistas,...) que se rompen la cabeza intentando buscar las reglas más democráticas para nuestras elecciones"*, hay quien pensará que "pues parece mentira que piensen tanto, con lo fácil que es contar el número de votos y aplicar una regla de mayoría simple". Creemos que este ejemplo anterior pondrá en evidencia que hasta algo "tan simple como la mayoría simple" se presta a no pocas sutilezas y manipulaciones en un contexto de Elección Social (lo veremos también en el siguiente Ejemplo 2.3). Es la propia teoría de la Elección Social la que nos advertirá de que estas trampas están ahí,... y, por tanto, hay que seguir rompiéndose la cabeza intentando buscar las reglas más democráticas, etcétera.

Ejemplo 2.3 (El orden de los factores puede alterar el producto).

Tres individuos A, B, C se presentan a un concurso compuesto por tres miembros del jurado (P, Q y R). Cada miembro del jurado establece un orden de preferencias entre los candidatos, otorgando tres puntos a su más preferido, dos al siguiente, y uno a su menos preferido. Se da la circunstancia de que P ha establecido el orden (A,B,C); Q ha establecido el orden (B,C,A); R ha establecido el orden (C,A,B). Así, todos los candidatos obtienen seis puntos. Lamentablemente, el concurso sólo puede tener un ganador. El jurado debe, por tanto, establecer un sistema de desempate que permita decidir quién es ese ganador. Veamos una "regla" que permite que salga elegido uno de los tres previamente establecido de antemano (con lo que la trampa es obvia). Por ejemplo, para que salga A procedemos como sigue: La elección se hace en dos fases; en la primera fase el jurado elige uno entre B y C (olvidándose por el momento de A). Cada miembro del jurado da dos puntos a su preferido entre B y C, y un punto al otro. B gana por cinco puntos a cuatro. Una vez hecho eso, la segunda fase consiste en confrontar A y B de la misma manera que en la primera fase se confrontaron B y C. A gana ahora por cinco a cuatro, y resulta elegido.

Comentario: Las reglas que aquí se utilizan (antes y después del desempate), a pesar de ser "numéricas" (se cuenta un número de puntos) son, en esencia, reglas de mayoría simple. Donde más claro se ve es en el sistema de desempate: al confrontar B con C, B gana por mayoría simple (dos miembros del jurado le prefieren). Y lo mismo ocurre al confrontar A con B.

Para resumir esta sección diremos que no hemos pretendido dar una definición formal y rigurosa del concepto de “Elección Social”. Quizá no la haya. Un economista, un político, un sociólogo, o un matemático tendrán ideas y matices diferenciados acerca del concepto, y todas esas ideas son perfectamente válidas. Hemos pretendido, eso sí, hacer ver la necesidad de encontrar reglas para la toma de decisiones colectivas, de estudiar las buenas (y las malas) propiedades que dichas reglas pueden tener, y, sobre todo, la complejidad a que puede dar lugar un tal estudio (viendo por ejemplo las sutilezas de la regla de la mayoría simple y sus afines). Es, a nuestro modo de ver, esa complejidad, lo que hace apasionante el estudio sistemático de las reglas y sus propiedades. Y, para nosotros, ese estudio “es” la Teoría de la Elección Social.

3. ¿Qué es un modelo de Elección Social?

Un modelo de Elección Social podría entenderse aquí ya como un:

“Conjunto determinado de “agentes” que han de establecer sus preferencias individuales sobre un cierto conjunto de “bienes”, y que desean tomar decisiones colectivas o de “elección social”. Así mismo ha de haber un conjunto preestablecido de propiedades, basadas en el sentido común, que se han de exigir a toda decisión o regla de elección colectiva que se tome en dicho grupo de agentes”.

Como ejemplo, el modelo topológico de elección de Chichilnisky se basa en un espacio topológico que representa las preferencias de cada agente (a cada agente se le asocia el mismo espacio). A las reglas se les exige tres condiciones, que son: continuidad, respeto de la unanimidad, y respeto del anonimato.

Estudiar un modelo significará analizar todas y cada una de sus características, tanto las relativas al grupo de agentes, como al conjunto de bienes sobre el que se establece la preferencia, como a las reglas de elección social de ese modelo y sus propiedades. Pero, la cuestión fundamental en todo modelo será la existencia de reglas de elección social. Si, en el modelo, se han exigido demasiadas restricciones a las reglas, o, si el conjunto de agentes, o el de bienes, no satisfacen ciertas propiedades, podría no existir ninguna regla para tal modelo. Tales situaciones aparecen, por ejemplo, en el modelo de Arrow, que es de tipo combinatorio, y dónde el problema está en haber exigido “demasiado” a la regla. Mientras, en el modelo de Chichilnisky, si el espacio de preferencias no tiene buenas propiedades topológicas (relativas a contractibilidad), las reglas pueden no existir.

Antes de empezar a hablar de modelos matemáticos, conviene dar definiciones precisas acerca de qué vamos a entender nosotros por "regla", y qué "propiedades" puede tener una tal regla. Daremos las definiciones (a menos de necesidad imperiosa de lo contrario) para el caso "finito" (número finito de agentes, número finito de bienes o alternativas,...). Esto no impide pensar en generalizaciones a casos infinitos (numerables, continuos) relativos al número de agentes, o al de alternativas (o a ambos). Las definiciones para estos casos infinitos aparecen (en la mayoría de los casos) como generalización o extrapolación de las que se den para casos finitos. Por ello entendemos que para este punto de arranque (presentación de conceptos) el caso finito está más de acuerdo con nuestra propia intuición, y, así, ayuda mejor a fijar las ideas.

Nota: No renunciamos al trabajo con "casos infinitos". De hecho, en los modelos topológicos de Chichilnisky el espacio de preferencias será un espacio topológico, que puede ser finito, o no serlo.

Introducimos, por tanto, conceptos previos acerca de reglas de Elección Social. Supondremos, de momento, una Sociedad que consta de un número finito "n" de individuos (agentes) $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Cada uno de estos individuos debe decidir, elegir, o, simplemente, mostrar sus preferencias, acerca de un conjunto de alternativas, que también supondremos finito, $\{b_1, \ldots, b_k\}$. El número "k" de alternativas puede o no coincidir con el de agentes "n". Cada agente tiene definida una relación de preferencias P_i $(i = 1, \ldots, n)$ sobre el conjunto de alternativas.

Definición 3.1: Una *relación de preferencia P* definida sobre un conjunto X será para nosotros una relación binaria definida en X, que satisface las condiciones siguientes (supuesto que la notación xPy significa "x es preferido a y"):

i) es irreflexiva (es decir, para ningún "a" de X se verifica aPa),

ii) es asimétrica (es decir, nunca puede ser aPb y bPa al mismo tiempo, siendo "a" y "b" elementos de X),

iii) es transitiva (es decir, dados a, b, c elementos de X, si es aPb y también bPc, entonces debe ser cierto también aPc),

iv) es negativamente transitiva (es decir, dados a, b, c elementos de X, si no se da aPb, y tampoco se da bPc, entonces no se da aPc).

Definición 3.2: Asociada a una relación de preferencia P consideraremos dos relaciones más, que denotaremos I y R. La relación I se dirá "relación de indiferencia", y se define aIb (se lee: "a es indiferente a b") como "ni aPb, ni tampoco bPa"). La relación R, "relación de preorden total asociado" se define como aRb (se lee: "a es preferido o indiferente a b") si o bien se da aPb, o se da aIb.

La notación que emplearemos para designar a las relaciones de indiferencia y preorden del agente "i" es I_i, R_i.

Definición 3.3: Una relación de preferencia P se dirá *representable por una función de utilidad*, si existe una función numérica $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ (conjunto de los números reales) tal que se verifique aPb si y sólo si $f(a) > f(b)$, para cualesquiera elementos a, b de X. Cualquier función que represente a P se dice "función de utilidad para P".

Nota: En el caso finito, toda relación de preferencia es representable por una función de utilidad, lo que permite, si es necesario, "visualizar numéricamente" cada preferencia, manejando, directamente, una función de utilidad que la represente. Muy distinta es la situación para el caso de ser X infinito. Aquí, no necesariamente una relación de preferencias es representable.

Definición 3.4: Un *perfil de preferencias* es una n-tupla $u = (P_1, \ldots, P_n)$, o, en su caso, $(R_1, \ldots, R_n)$, siendo P_i, R_i, respectivamente, las relaciones de preferencia y de preorden del agente "i" $(i = 1, \ldots, n)$ (la idea es que un perfil nos muestra "en bloque" todas las preferencias de los agentes).

Definición 3.5: Siendo Y el conjunto de alternativas, una *función de elección* es una aplicación del conjunto de las partes de Y (conjunto de todos los subconjuntos posibles de Y, incluido el vacío) en sí mismo. Un subconjunto del conjunto de alternativas Y (o elemento, genérico, del conjunto de sus partes) se suele denominar, técnicamente, *"agenda"* (nótese que una función de elección lleva asigna a una agenda, otra agenda, con lo que, en esta primera definición del concepto, no se exige que esa asignación sea un conjunto de un sólo miembro).

Definición 3.6: Una *regla de Elección Social* es una aplicación C del conjunto de perfiles en el conjunto de funciones de elección (a cada perfil "u" se le asocia una función de elección que se suele denotar C_u).

4. El modelo de Arrow y el teorema de imposibilidad de Arrow

Comenzamos ahora por ver qué restricciones exigiríamos a una regla de elección social, basándonos en nuestro sentido común[4]. Para ello necesitamos introducir una serie de definiciones previas.

Definición 4.1: Dada una regla de elección C, y un perfil u, diremos que una agenda "a" está en el dominio de elección de C_u si se verifica que $C_u(a)$ es un

[4]Como se verá, a partir del teorema de imposibilidad de Arrow podrá decirse aquello de que *"el sentido común es el menos común de los sentidos"*.

subconjunto no vacío de la agenda "a". Se dice que la regla C tiene la *propiedad de dominio universal*, si para todo perfil u, cualquier agenda no vacía pertenece al dominio de C_u.

Definición 4.2: Se dice que la regla C satisface la *condición fuerte de Pareto* si, para todo perfil $u = (R_1, \ldots, R_n)$, para cualesquiera dos alternativas "x" e "y", tales que para toda preferencia P_i que aparezca en el perfil "u" se cumple que xR_iy, existiendo al menos un "j" tal que xP_jy, y para toda agenda "a" que contenga a la alternativa "x" , se verifica que la alternativa "y" no pertenece a $C_u(a)$. Esta condición viene a decir que si todo el mundo considera que x es al menos tan bueno como y, habiendo al menos un agente que considera x mejor que y, y además x pertenece a la "lista de alternativas finalmente elegidas", no tiene sentido que "y" esté en dicha lista.

Definición 4.3: Se denomina *coalición* (S) a todo subconjunto del conjunto de agentes (sociedad) $N = 1, \ldots, n$. Dada una regla de elección social C (relativa a dicha sociedad, y sobre un conjunto de alternativas X), se dice que la coalición S es *decisiva* para la alternativa "x" frente a la alternativa "y" si para cualquier perfil $u = (P_1, \ldots, P_n)$, tal que para toda preferencia P_s relativa a algún agente en S sea xR_sy, existiendo al menos un agente t en S para el que sea xP_ty, y para cualquier agenda "v" que contenga a "x", se verifica que "y" no pertenece a $C_u(v)$. En el caso de que una coalición sea decisiva para cualquier par de alternativas, entonces diremos simplemente que "es decisiva". Si existe una coalición decisiva compuesta por un sólo agente "i", se dice que este agente es un *dictador* para la regla C. Una regla de elección social, C, se dice *dictatorial* si existe un dictador para dicha regla.

Definición 4.4: Diremos que una regla de elección social, C, satisface la condición de *independencia de las alternativas irrelevantes*, si para cualquier agenda v, y cualesquiera dos perfiles u_1, u_2 cuya actuación sobre la agenda sea idéntica, se tiene que $Cu_1(v) = Cu_2(v)$.

Definición 4.5: Se dice que una función de elección F admite una *representación*, si existe una relación binaria ϕ sobre el conjunto de alternativas X, tal que para cualquier agenda v se verifica que

$$F(v) = \{x : x \text{ es elemento de } v,\ x\,\phi\, y, \text{ para todo } y \text{ de } v\}.$$

Se dice además que F admite una *representación transitiva*, si existe una relación binaria ϕ reflexiva, transitiva, y completa (preorden completo) que representa a F. Una regla de elección social C se dice *representable* si para cualquier perfil "u", la función de elección C_u admite una representación. Y se dice transitivamente representable si para cualquier perfil admite una representación transitiva.

Llegados a este punto, hemos visto ya una serie de condiciones que nuestro sentido común impondría a cualquier regla de elección que se precie de tener "buenas propiedades". Así, por ejemplo, sucede en el modelo de Arrow que trata de encontrar reglas de elección social verificando las cinco condiciones siguientes:

i) Propiedad de dominio universal.

ii) Condición fuerte de Pareto.

iii) No existencia de dictador.

iv) Independencia de las alternativas irrelevantes.

v) Representabilidad transitiva.

Aparentemente, parece que no se ha exigido gran cosa (sólo cinco condiciones que responden a nuestras ideas intuitivas de lo "exigible" a una regla colectiva). Pues bien, lamentablemente, ocurre que si hay al menos tres agentes y al menos tres alternativas, el modelo de Arrow es vacío, es decir: No existe ninguna regla de elección social que satisfaga conjuntamente las cinco condiciones anteriores.

Teorema 4.1 (Teorema de Imposibilidad de Arrow): *Para una sociedad con al menos tres agentes, que definen sus preferencias sobre un conjunto de al menos tres alternativas, no existe ninguna regla de elección social que satisfaga simultáneamente las condiciones de dominio universal, fuerte de Pareto, no existencia de dictador, independencia de las alternativas irrelevantes, y representabilidad transitiva.*

Este resultado de imposibilidad apareció por primera vez en los trabajos de Kenneth J. Arrow (Premio Nobel de Economía en 1972), hacia 1950. La idea original estaba ya en su artículo *"A difficulty in the concept of Social Welfare"*, Journal of Political Economy 58, 328-346 (1950), así como en su libro *"Social Choice and individual values"*, Yale University Press, New Haven, CT, 1951. No obstante, es en la segunda edición (1963) de dicho libro donde aparecen más ideas relacionadas con la génesis del problema, así como una demostración completa y rigurosa del teorema de imposibilidad. Cabe imaginar, y comentar una vez más, el tremendo impacto que un resultado así produjo (y sigue produciendo) en la teoría de la Elección Social. A partir de este resultado, "parece como si no pudiéramos fiarnos de ninguna regla de elección colectiva". Así mismo, nos obliga a replantearnos nuestra propia idea de sentido común, en cuanto a elección social se refiere, tratando de diseñar nuevos modelos de elección social, a cuyas reglas, por un lado, se les exija "casi lo mismo" (restricciones lo más próximas posible) que en el modelo de Arrow, pero que, por otro lado, sean no vacíos, esto es, den lugar a resultados de posibilidad (existencia de alguna regla).

Por su riqueza de ideas, contenidos, y presentación, además de por su fácil y amena lectura, merece recomendar al lector la línea de demostración del libro de J.S. Kelly *"Social Choice Theory"* (Springer Verlag, 1988), así como también la demostración, ideas, y enfoque que aparecen en el libro de I. Ekeland *"Économie Mathématique"* (Hermann, Paris, 1979).

La mayor parte de las pruebas clásicas del teorema de imposibilidad de Arrow utilizan fundamentalmente *Combinatoria* y *Matemática Discreta*.

5. Las reglas de elección de Chichilnisky y la aproximación topológica a problemas de Elección Social

Una vez estudiado el modelo de Arrow, y visto el teorema de imposibilidad, una tarea a realizar (o línea de investigación a seguir) es la búsqueda de otros modelos que den lugar a resultados de *posibilidad*, esto es, que dichos modelos sean no vacíos (contengan al menos una regla de elección social).

Una aproximación a la Elección Social, construyendo modelos que, si no en todos los casos, en situaciones significativas son no vacíos, es el estudio de los modelos topológicos de Chichilnisky, y las reglas de elección de Chichilnisky asociadas a dichos modelos. El estudio de dichos modelos se encuadra en el marco de la agregación topológica de preferencias. Como ya hemos comentado, la idea de "agregación" corresponde a la necesidad de "pasar de lo individual a lo colectivo o social".

Así, con preferencias, el problema de la agregación será encontrar una "preferencia social" (que se dirá agregada) a partir de la familia de preferencias individuales, y de manera que la preferencia social cumpla alguna condición, también "de sentido común", para con las preferencias individuales "que entran en la agregación". De igual modo, cabe hablar de agregación de funciones de utilidad, preórdenes, etc.

La idea subyacente es siempre la misma (obtener "un agregado social" a partir de "componentes individuales"). Las técnicas matemáticas para estudios sobre agregación son muy variadas, si bien en estos nuevos modelos se introdujeron técnicas *topológicas*. Más adelante se introdujo también algún resultado basado en técnicas algebraicas.

Los modelos de Chichilnisky aparecieron a partir de artículos de Graciela Chichilnisky publicados desde finales de los años setenta. Cabe destacar los siguientes: G. Chichilnisky, *"Social choice and the topology of spaces of preferences"*, Advances in Mathematics 37, 165-176 (1980) y G. Chichilnisky y G. Heal, *"Necessary and sufficient conditions for a resolution of the Social Choice paradox"*, Journal of Economic Theory 31, 68-87 (1983).

A diferencia del modelo de Arrow, en los modelos de Chichilnisky el número de posibles relaciones de preferencia de cada agente sobre el conjunto de alternativas puede ser *infinito* (de hecho, en la mayoría de los casos así lo será). Esto lleva a que el número de alternativas sea también infinito: es un sencillo ejercicio demostrar que sobre un conjunto de k alternativas, un agente puede definir hasta $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ preferencias estrictas (sin declarar nada indiferente). En cualquier caso, y aunque grande, es un número finito. Así mismo, aún habiendo posibilidad de declarar algún tipo de indiferencia, el número de preferencias posibles sobre k alternativas sigue siendo finito.

El número de agentes también puede ser infinito, aunque suele trabarse casi siempre (salvo en algún resultado específico) con un número finito de agentes.

Una idea clave para la construcción de los modelos de Chichilnisky estriba en suponer que el conjunto de preferencias de cada agente es un espacio topológico Z, que suele suponerse de Hausdorff (separado).

En realidad, para casi todos los efectos, basta suponer que Z es un conjunto sobre el que se tiene definida una idea de *proximidad* o de contigüidad . Así mismo, cuando se trabaje con aplicaciones entre tales espacios, basta con tener una idea acerca de *continuidad* de dichas aplicaciones. En esencia, la continuidad viene a indicar "respeto de la proximidad entre puntos" (puntos contiguos se aplican en puntos contiguos).

Veamos ahora cuáles son esas propiedades que nuestro sentido común impondría ahora a las reglas, para diseñar así el modelo de Chichilnisky:

Definición 5.1: Diremos que una regla $f : Z^n \to Z$ respeta la *unanimidad* si se verifica que $f(z, \ldots, z) = z$, para cualquier elemento z de Z.

Definición 5.2: Diremos que una regla $f : Z^n \to Z$ respeta el *anonimato* si se verifica que $f(z_1, \ldots, z_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$, donde $(x_1, \ldots, x_n)$ es una reordenación (esto es, permutación de posiciones entre los elementos de la n-tupla) cualquiera de $(z_1, \ldots, z_n)$, y $(z_1, \ldots, z_n)$ son "n" elementos cualesquiera de Z.

Definición 5.3: Una *n-regla de Chichilnisky* sobre el espacio de preferencias Z es una aplicación $f : Z^n \to Z$ satisfaciendo las tres condiciones siguientes:

(i) Es continua.

(ii) Respeta la unanimidad.

(iii) Respeta el anonimato.

Definición 5.4: Un *modelo topológico (finito) de Chichilnisky* constará de una sociedad de "n" agentes. Las preferencias de cada agente constituyen un espacio topológico separado (Hausdorff) Z, el mismo para todos los agentes. Las reglas del modelo serán n-reglas de Chichilnisky, es decir, aplicaciones $f : Z^n \to Z$ continuas, y respetando la unanimidad y el anonimato.

Se tratará de estudiar si el modelo es o no vacío (esto es, si o no en él existen en él n-reglas de Chichilnisky).

La existencia de n-reglas de Chichilnisky está íntimamente ligada a la topología del espacio Z. Esto es, según sea la topología de Z existirán n-reglas, o no existirá ninguna.

Lo importante ahora, desde el punto de vista de la teoría matemática de la Elección Social, es que en este contexto topológico *aparecen resultados de posibilidad*, pues, en contraposición con el modelo de Arrow que desemboca siempre en un resultado de imposibilidad, en estos modelos de Chichilnisky aparecen familias de espacios topológicos para los que *sí* va a haber reglas de agregación "social" de las preferencias individuales. Es un hecho muy importante, ya que fue en este contexto topológico donde se probaron los primeros resultados de "posibilidad", hoy ya clásicos, que se conocen y manejan en Elección Social.

Comentamos a continuación alguno de los principales resultados en esta dirección.

Teorema 5.1 (Teorema de Imposibilidad de Chichilnisky): *Existen espacios topológicos Z, y valores de "n" para los que no existe ninguna n-regla de Chichilnisky.*

Comentario: Hemos contemplado ya el caso de tomar $Z = \mathbb{S}^1$, y $n = 2$. G. Chichilnisky probó también este resultado de no existencia en 1980 (véase *"Social choice and the topology of spaces of preferences"*, de G. Chichilnisky, publicado en Advances in Mathematics 37, pp. 165-176, en 1980), para el caso más general de esferas de dimensión k (para cualquier k natural mayor que 1) , y cualquier número finito y mayor que dos, de agentes.

Teorema 5.2 (Teorema de existencia de Chichilnisky-Heal): *Sea Z un espacio topológico que tiene estructura de complejo celular (CW-complejo) parafinito. Entonces, Z admite n-reglas de Chichilnisky para cualquier valor de "n" si y solamente si Z es un espacio topológico contractible.*

Comentario: No definiremos aquí el concepto de CW-complejo celular parafinito, ni tampoco el de espacio contractible. Bástenos decir que son espacios "naturales", y quedarnos con la idea intuitiva de que un espacio es contractible si mediante deformación continua puede contraerse a un punto. Por ejemplo, un disco es contractible a su centro (vamos achicando su tamaño de forma continua, hasta que el radio del disco valga cero), mientras que un aro (circunferencia unidad), o la superficie de un balón de fútbol (esfera $\mathbb{S}^2$) no lo es. Este resultado fue demostrado por G. Chichilnisky y G. Heal en un trabajo conjunto de 1983, que ya hemos mencionado anteriormente.

Cabe decir para terminar que muchos otros modelos topológicos de Elección Social han aparecido en la literatura a partir de los trabajos pioneros de Chichilnisky y Heal.

También es un hecho a destacar que los fundamentos topológicos abstractos de los resultados obtenidos por Chichilnisky eran ya conocidos desde mucho tiempo atrás (véase, por ejemplo, *"Aufbau von Mittelwerte mehreren Argumente I"*, publicado[5] en 1933 en Mathematische Annalen 109, pp. 235-253), si bien todo parece indicar que a nadie hasta la llegada de Chichilnisky y Heal se le había ocurrido encontrarles la más mínima aplicación, y mucho menos aún en una teoría tan aparentemente alejada de la "Matemática Pura" como es la Elección Social. Este es el gran mérito de estos autores.

Esteban Induráin
Universidad Pública de Navarra
Departamento de Matemática e Informática
Campus Arrosadía. Edificio "Las Encinas"
31006 Pamplona
e-mail: ***steiner@si.unavarra.es***

[5]Una segunda parte, con el título *"Aufbau von Mittelwerte mehreren Argumente II"* se publicó en 1935 en la misma revista, en el volumen 11, pp. 713-730. Además, el mismo autor publicó en esa misma revista (ya en 1943), en el volumen 119, pp. 210-215, un nuevo artículo sobre el tema, titulado *"Über Raüme mit Mittelbindungen"*.