

La Geometría de las Esferas

por

Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria

Introducción

Queremos realizar una exposición *divulgativa* sobre algunos de los aspectos esenciales de la geometría de las esferas. En este sentido, apartaremos del núcleo del texto las definiciones rigurosas, que serán indicadas como notas a pie de página. También eliminaremos las constantes citas bibliográficas, incluyendo al final un listado por temas.

Estudiaremos la esfera $S^{n-1} = \{x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Aparentemente nada hay tan simple como la esfera unidad en el espacio euclídeo. Más aún, parece que todas las esferas deben tener las mismas propiedades, independientemente de su dimensión, pues todas son igual de *redondas*. Lo que queremos mostrar es que existen muchas diferencias entre las esferas de distintas dimensiones. Más aún, la moraleja de todo lo que sigue es la siguiente:

Las propiedades geométricas de la esfera S^{n-1} dependen esencialmente de las propiedades algebraicas del espacio \mathbb{R}^n .

Aún así, existen muchas propiedades comunes a todas las esferas. La más célebre, la *desigualdad isoperimétrica*: Las esferas son las hipersuperficies cerradas (de volumen lateral fijo) que encierran mayor volumen (Steiner, 1842). Sin em-

bargo, en esta exposición vamos a centrarnos en las diferencias, en vez de en las propiedades comunes.

Esferas y cubos. Vamos a compararlos. Empleamos las siguientes notaciones:

- Cubo de dimensión n es $I^n \subset \mathbb{R}^n$, $I = [0, 1]$.
- Diámetro es el supremo de las distancias entre puntos de la figura.
- Volumen es el volumen que encierran.
- Volumen lateral es el volumen (de una dimensión menor) de su borde.

Podemos realizar los cálculos correspondientes a los cubos de distintas dimensiones, obteniendo:

Cubo	Diámetro	Volumen	Volumen Lateral
$I \subset \mathbb{R}$	1	1	0
$I^2 \subset \mathbb{R}^2$	$\sqrt{2}$	1	4
$I^3 \subset \mathbb{R}^3$	$\sqrt{3}$	1	6
$I^4 \subset \mathbb{R}^4$	$\sqrt{4}$	1	8
$I^5 \subset \mathbb{R}^5$	$\sqrt{5}$	1	10
$I^6 \subset \mathbb{R}^6$	$\sqrt{6}$	1	12
$I^n \subset \mathbb{R}^n$	\sqrt{n}	1	2n

- El diámetro de los cubos es creciente. Esto significa que podemos meter una barra de un kilómetro de longitud en un cubo de arista un centímetro, con tal de que n sea *suficientemente grande*.

- Los volúmenes de los cubos son siempre 1 si el cubo es de arista 1. Si es de arista r el volumen es rn , que tiende a infinito si $r > 1$ y que tiende a cero si $r < 1$.

Respecto de los volúmenes de las esferas se tiene (se llama doble factorial a $n!! = n(n-2)(n-4)\dots$):

Esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$	Volumen	Radio=1	Volumen Lateral
$S^1 \subset \mathbb{R}^2$	πr^2	3,1415	$2\pi r$
$S^2 \subset \mathbb{R}^3$	$4/3\pi r^3$	4,1887	$4\pi r^2$
$S^3 \subset \mathbb{R}^4$	$1/2\pi r^4$	4,9348	$2\pi^2 r^3$
$S^4 \subset \mathbb{R}^5$	$8/15\pi^2 r^5$	5,2637	$8/3\pi^2 r^4$
$S^5 \subset \mathbb{R}^6$	$1/16\pi^3 r^6$	5,1677	$\pi^3 r^5$
$S^6 \subset \mathbb{R}^7$	$16/105\pi^3 r^7$	4,7247	$16/15\pi^3 r^6$
$n = 2k$	$(1/k)!\pi^k r^{2k}$		volumen lateral(S^n)=
$n = 2k + 1$	$(2/n!!)(2\pi)^{(k/2)} r^{2k+1}$		$(n+1/r)$ volumen(S^n)

Veamos algunas consecuencias:

- El volumen de las esferas tiende siempre a cero, cuando n tiende a infinito, independientemente de cuál sea el radio r .
- Para radio uno, la esfera más grande es S^4 .

Estas observaciones son suficientes para hacernos pensar que cuando aumentamos las dimensiones las propiedades geométricas escapan a nuestra *intuición*.

Esferas pares e impares

El hecho de que se puedan identificar los espacios \mathbb{R}^{2n} y \mathbb{C}^n trae como consecuencia que las esferas de dimensión impar tienen una geometría mucho más rica que las de dimensión par. Para precisar en qué sentido una geometría es más rica que otra debemos introducir primero una serie de conceptos¹. Aunque de entrada pueden resultar demasiado técnicos, más adelante veremos su sentido geométrico.

- En variedades de dimensión par se define una estructura casi-compleja como una aplicación J (diferenciable) que a cada vector tangente le asocia otro vector tangente de modo que $J \circ J = J^2 = -id$. Las variedades kählerianas son las más ricas de entre éstas. En particular, $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ es kähleriana.

- En variedades de dimensión impar se define una estructura casi-contacto como la dada por una aplicación ψ (diferenciable) entre campos vectoriales, por un campo vectorial ξ y por una 1-forma η tales que: (1) $\psi^2(X) = -X + \eta(X)\xi$, para cualquier campo X , y (2) $\eta(\xi) = 1$. Las variedades sasakianas son las más ricas entre éstas. En particular, \mathbb{R}^{2n+1} es sasakiana.

Así que los espacios euclídeos reales \mathbb{R}^k son variedades kählerianas si k es par y sasakianas si k es impar. Se podría pensar que la situación para las esferas es la

¹La definición de variedad kähleriana es la siguiente: es una variedad casi-compleja dotada de una métrica riemanniana g tal que $g(J(X), J(Y)) = g(X, Y)$, para cualesquiera campos vectoriales X e Y , y de modo que $\nabla J = 0$, siendo ∇ la conexión de Levi-Civita de g . Se dice entonces que g es una métrica hermitica. El significado geométrico de las variedades kählerianas es que el transporte paralelo asociado a la conexión de Levi-Civita conmuta con la actuación de la estructura casi-compleja. Si se considera la identificación entre \mathbb{R}^{2n} y \mathbb{C}^n dada por $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n) \cong (z^1, \dots, z^n)$ resulta que la estructura casi-compleja canónica de \mathbb{R}^{2n} está dada por: $J(\partial/\partial x^j) = (\partial/\partial y^j)$; $J(\partial/\partial y^j) = -(\partial/\partial x^j)$. La geometría definición de variedad sasakiana es más técnica y la omitimos aquí. Es de destacar, no obstante, la profunda relación entre ambas geometrías: si una variedad M es casi-hermitica entonces $M \times \mathbb{R}$ es una variedad casi-contacto riemanniana; si una variedad M es casi-contacto riemanniana, entonces $M \times \mathbb{R}$ es una variedad casi-hermitica. (Una variedad casi-contacto riemanniana es la dotada de una métrica riemanniana g tal que $g(\psi(X), \psi(Y)) = g(X, Y) - h(X)h(Y)$, para cualesquiera campos X e Y).

misma. Sin embargo, no es así. Resulta:

- Todas las esferas de dimensión impar son sasakianas.
- La única esfera de dimensión par que es kähleriana² es S^2 y la otra única esfera que es casi-compleja es S^6 .

¿Cuál es la verdadera razón para que haya estas diferencias? Lo veremos más adelante. Realmente, depende en parte del siguiente conocido resultado:

Teorema (Campos vectoriales sobre esferas)

- S^{2n} no admite campos sin ceros.
- S^{2n+1} siempre admite campos sin ceros.

Demostración: Requiere dos pasos. Para esferas de dimensión par es una conocida consecuencia del Teorema de Hopf-Poincaré³. Para las de dimensión impar se puede construir explícitamente un campo vectorial ξ en la esfera $S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$, definiendo

$$\xi(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2k}, x_{2k-1}).$$

Es un campo vectorial sin ceros. Este campo ξ es tangente a la esfera porque el vector normal es

$$N(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k-1}, x_{2k}) = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2k-1}, x_{2k})$$

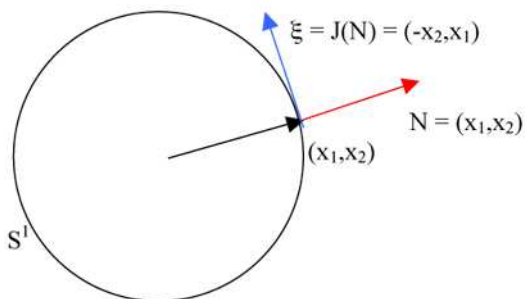
y, obviamente, $x \cdot N = 0$. Con esto concluye la demostración. C.Q.D.

Pero además $\xi = J(N)$, siendo J la estructura casi-compleja⁴ de \mathbb{R}^{2k} . El siguiente dibujo muestra la situación para $k = 1$.

²El porqué de las esferas pares sólo S^2 puede admitir una estructura kähleriana se sigue del hecho de que una variedad compacta kähleriana tiene que tener no nulos los grupos pares de cohomología, ya que la forma de Kähler ω , dada por $\Omega(X, Y) = g(J(X), Y)$, es cerrada y define una clase de cohomología no nula de $H^2(M)$ y, por tanto, $\Omega^k \in H^{2k}(M)$ es una clase no nula de cohomología. Como es bien sabido todas las clases de cohomología de una esfera S^{2n} son nulas salvo las extremas.

³El Teorema de Hopf-Poincaré afirma que para todo campo vectorial con ceros aislados definido en una variedad compacta la suma de los índices de los ceros del campo coincide con la característica de Euler de la variedad. Las esferas de dimensión par tienen característica 2, por lo que *a fortiori* todo campo sobre ellas debe tener algún cero. En cambio las de dimensión impar tienen característica cero, por lo que no se puede colegir nada aplicando el Teorema de Hopf-Poincaré.

⁴En efecto, como \mathbb{R}^{2k} tiene una estructura hermítica con la estructura casi-compleja J y la métrica standard g , resulta que $g(\xi, N) = g(J(N), N) = g(J^2(N), J(N)) = -g(N, \xi) = -g(\xi, N)$, con lo que ξ es perpendicular al vector normal y, por tanto, tangente a la esfera.



Así que las esferas S^{2k+1} están dotadas de un campo canónico $\xi = J(N)$, que se puede definir *intrínsecamente*, esto es, sin necesidad de emplear coordenadas. De hecho, este campo es el necesario para alcanzar la estructura sasakiana en las esferas de dimensión impar.

Las esferas S^1 , S^3 y S^7

Tienen especiales propiedades porque el espacio euclídeo en que viven tiene estructura de álgebra normada. Un álgebra normada es un espacio vectorial real dotado de un producto interno⁵ y una norma (que satisface $N(ab) = N(a)N(b)$). Recordemos el siguiente célebre teorema:

Teorema de Hurwitz. Las únicas álgebras normadas son:

- \mathbb{R} , que es cuerpo conmutativo.
- $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, que es cuerpo conmutativo.
- $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, que es cuerpo no conmutativo.
- $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$, que es álgebra no asociativa.

Como consecuencia de este teorema resulta que las esferas S^1 , S^3 y S^7 se pueden considerar como los vectores unitarios de una cierta álgebra normada, y, de hecho, se obtiene que

- $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ es grupo de Lie⁶ y admite un campo sin ceros.
- $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ es grupo de Lie y admite 3 campos independientes.
- $S^7 \subset \mathbb{R}^8$ no es grupo de Lie pero sí admite 7 campos independientes.

Una variedad que admite tantos campos vectoriales independientes en todo punto como su dimensión se denomina *paralelizable*. Adams probó en 1958 que éstas son las únicas esferas paralelizables. Así pues, el hecho de que una esfera sea paralelizable depende esencialmente, ¡otra vez!, de la estructura de álgebra del espacio euclídeo del que la esfera es una hipersuperficie.

Antes de estudiar otras esferas, veamos el producto de los cuaterniones y octo-

⁵El producto debe satisfacer la propiedad pseudo-asociativa y las distributivas: $a(\lambda b) = (\lambda a)b$; $a(b+c) = ab+ac$; $(a+b)c = ac+bc$, siendo a, b, c elementos del álgebra, $\lambda \in \mathbb{R}$.

⁶Un grupo de Lie es una variedad diferenciable dotada de una estructura de grupo algebraico de modo que las operaciones de grupo son diferenciables.

niones. En \mathbb{R}^3 se define el producto vectorial de dos vectores:

\times	i	j	k
i	0	k	$-j$
j	$-k$	0	i
k	j	$-i$	0

que permite definir una estructura de cuerpo no conmutativo en $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$ (llamado cuerpo de los cuaterniones), de base $1, i, j, k$, dado por:

\cdot	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Observación: \mathbb{R}^3 con el producto vectorial \times también tiene estructura de álgebra (= espacio vectorial con un producto interno). En este caso verifica las dos siguientes propiedades:

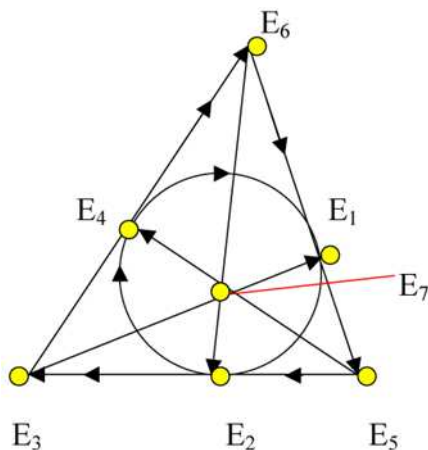
- Anticonmutativa: $a \times b = -b \times a$,
- Propiedad de Jacobi: $[a \times (b \times c)] + [b \times (c \times a)] + [c \times (a \times b)] = 0$.

Un álgebra que verifica estas propiedades se llama *álgebra de Lie*. Obviamente no es álgebra normada (por el teorema de Hurwitz); de hecho se tiene la conocida relación $\|a \times b\| = \|a\| \|b\| \text{sen}(a, b)$.

Análogamente en \mathbb{R}^7 se define un producto vectorial que permite dar estructura de álgebra a $\mathbb{O} = \mathbb{R}^8$, del siguiente modo:

\times	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_7
E_1	-1	E_4	E_7	$-E_2$	E_6	$-E_5$	$-E_3$
E_2	$-E_4$	-1	E_5	E_1	$-E_3$	E_7	$-E_6$
E_3	$-E_7$	$-E_5$	-1	E_6	E_2	$-E_4$	E_1
E_4	E_2	E_1	$-E_6$	-1	E_7	E_3	$-E_5$
E_5	$-E_6$	E_3	$-E_2$	$-E_7$	-1	E_1	E_4
E_6	E_5	$-E_7$	E_4	$-E_3$	E_1	-1	E_2
E_7	E_3	E_6	E_1	E_5	$-E_4$	$-E_2$	-1

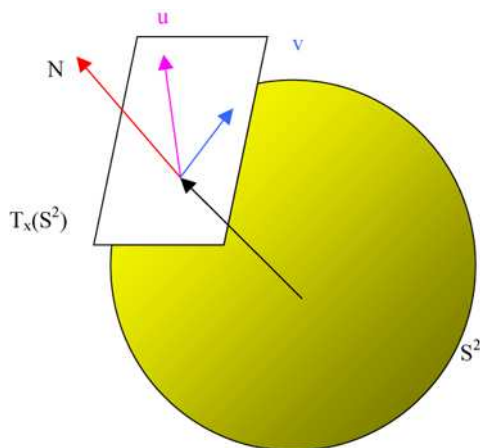
(hemos omitido el 1 que es neutro para la multiplicación). Esta estructura multiplicativa se puede recordar mediante el *plano de Fano*, que es el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{Z}_2)$:



Las esferas S^2 y S^6

Acabamos de ver que \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^7 están dotados de un producto vectorial. Esta propiedad influye, de modo decisivo, en la geometría de las esferas S^2 y S^6 , puesto que permite definir en ellas estructuras casi-complejas.

En $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ se puede definir: $\Omega_x(u, v) = [N, u, v] = N \cdot (u \times v)$.



Las siguientes observaciones se demuestran de modo sencillo:

- Ω es antisimétrica: el signo mide la orientación de la base N, u, v ,
- Ω mide el área del paralelogramo definido por u y v .

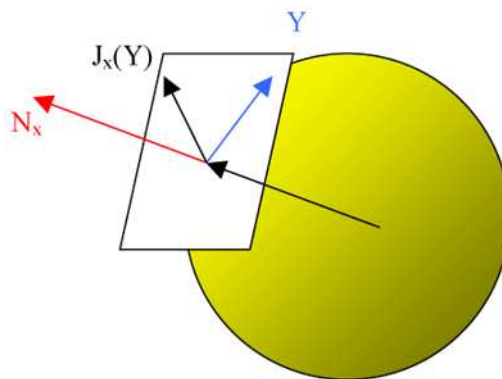
De hecho, Ω es la estructura simpléctica⁷ canónica de S^2 . Con Ω podemos medir áreas en la esfera.

Consecuencia: Se pueden realizar mapas de la Tierra que conserven áreas

⁷Una estructura simpléctica está dada por una 2-forma cerrada de rango máximo en todo punto. En particular, toda variedad kähleriana es también simpléctica.

(pues el plano también tiene una forma simpléctica y dos formas simplécticas son siempre localmente equivalentes). De modo independiente también se pueden realizar mapas que conserven ángulos (proyecciones conformes). No se puede conseguir que conserven áreas y ángulos, porque entonces serían isometrías y no existen isometrías entre plano (curvatura de Gauss $K = 0$) y esfera ($K = 1/R^2$).

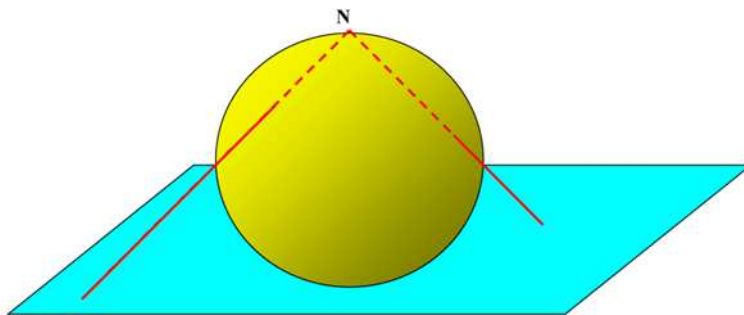
Y se puede definir una estructura casi-compleja J dada por: $J_x(Y) = N_x \times Y$. Geométricamente es un giro de 90 grados.



De hecho la esfera S^2 tiene estructura de variedad compleja kähleriana. Se puede obtener también mediante la identificación:

$$S^2 \leftrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \leftrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

esto es, la *esfera de Riemann*, obtenida mediante la proyección estereográfica:



En la esfera $S^6 \subset \mathbb{R}^7$ se puede definir la estructura casi-compleja del mismo modo, usando el producto vectorial de \mathbb{R}^7 : $J_x(Y) = N_x \times Y$

Las esferas exóticas de Milnor

Hasta ahora hemos presentado algunas propiedades geométricas de las distintas esferas. Lo que ahora vamos a comentar, conmovió totalmente puesto que se dirigía a la estructura más profunda de las propias esferas: su naturaleza como

variedades diferenciables. En 1956 Milnor descubrió que la esfera S^7 tiene 28 estructuras diferenciables⁸ no equivalentes. Las esferas S^1 a S^6 admiten sólo una estructura de variedad diferenciable, esto es, todas son equivalentes entre sí. De hecho el número de estructuras no equivalentes varía de una manera que parece muy difícil de explicar⁹:

Esfera	Número
S^n con $n < 7$	1
S^7	28
S^8	2
S^9	8
S^{10}	6
S^{11}	992
S^{12}	1
S^{13}	3
S^{14}	2
S^{15}	16256
S^{31}	$> 16 \cdot 10^6$

Donaldson (1983) probó que \mathbb{R}^4 admite infinitas estructuras diferenciables, mientras que los demás espacios \mathbb{R}^n admiten sólo una. Ambos recibieron la medalla Fields (Milnor en 1962 y Donaldson en 1986).

En cualquier caso, con estas observaciones sobre estructuras diferenciables no equivalentes nos hemos salido realmente de la Geometría Diferencial para adentrarnos en la Topología Diferencial. Como vamos viendo, nuestro viaje por las

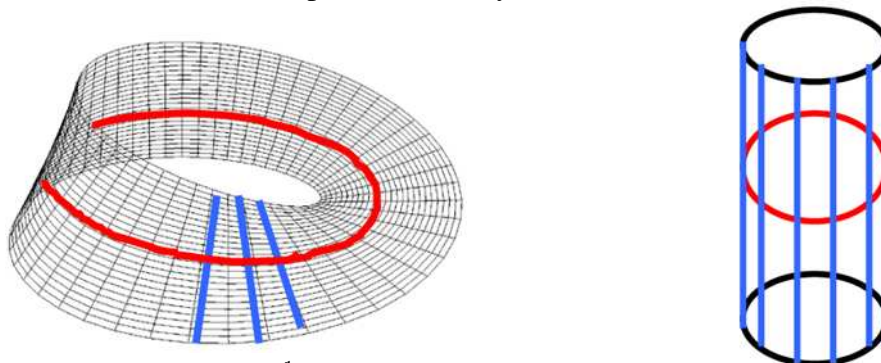
⁸Una estructura diferenciable está dada por un atlas maximal (un atlas es una colección de cartas con cambios de coordenadas diferenciables). Cada atlas está contenido en un único atlas maximal. Se dice que dos atlas maximales A y A' sobre una misma variedad M definen estructuras diferenciables equivalentes si existe un difeomorfismo entre (M, A) y (M, A') . Todas las esferas tienen una estructura diferenciable definida por el atlas de dos cartas dado por las proyecciones estereográficas desde los polos norte y sur sobre el plano ecuatorial.

⁹Tiene que ver con los grupos de homotopía de orden superior. El de orden uno, llamado también grupo fundamental y grupo de Poincaré, se puede definir como el conjunto de clases de equivalencia (módulo la relación de homotopía) de aplicaciones de la circunferencia S^1 en el espacio topológico de que se trate. Los de orden superior son las clases correspondientes a aplicaciones de esferas S^k . A diferencia de los grupos de homología, los de homotopía no se anulan si el orden es superior a la dimensión de la variedad. De hecho, aunque las esferas son de los objetos geométricos más simples, no se conocen explícitamente todos los grupos de homotopía de orden superior para todas las dimensiones.

esferas nos hace pasar por paisajes muy diferentes.

Las fibraciones de esferas

Una *fibración* es, hablando de modo intuitivo y sin rigor, una aplicación $\pi : A \longrightarrow B$, tal que cada punto de B tenga un entorno U de modo que $\pi^{-1}(U)$ es homeomorfo a $U \times F$. A F se la llama la fibra tipo. Por ejemplo, son fibraciones sobre la circunferencia las dadas por el cilindro y la banda de Möbius.



El cilindro es el producto $S^1 \times \mathbb{R}$. La banda de Möbius es producto localmente, pero no globalmente.

Pues bien, entre esferas también existen fibraciones (no producto) de las que la primera fue descubierta por Hopf:

- $S^3 \longrightarrow S^2$, con fibra S^1
- $S^7 \longrightarrow S^4$, con fibra S^3
- $S^{15} \longrightarrow S^8$, con fibra S^7

Nuevamente aparecen nuestras esferas distinguidas: La existencia de estas fibraciones está relacionada con las estructuras de álgebra de \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^4 , y \mathbb{R}^8 . ¿Cómo? Se puede dar una explicación¹⁰, utilizando un poco de Topología y de Geometría Proyectiva.

¹⁰De igual modo que se considera la esfera de Riemann $S^2 = \mathbb{C} \cup \infty = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$, se pueden considerar otras esferas como rectas proyectivas sobre los correspondientes conjuntos numéricos: $S^1 = \mathbb{P}_1(\mathbb{R})$, $S^4 = \mathbb{P}_1(\mathbb{H})$, $S^8 = \mathbb{P}_1(\mathbb{O})$. En efecto, cada recta proyectiva $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ se puede considerar como la recta afín a la que se le ha añadido el punto del infinito: $K \cup \infty$. En nuestro caso, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, $\mathbb{K} = \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$, $\mathbb{K} = \mathbb{O} = \mathbb{R}^8$) y cada recta proyectiva es la compactificación por un solo punto del espacio euclídeo correspondiente, esto es, la esfera de igual dimensión. Por otra parte, cada recta proyectiva $\mathbb{P}_1(\mathbb{K})$ es también el conjunto de rectas vectoriales de \mathbb{K}^2 . Podemos definir entonces aplicaciones a) $\mathbb{R}^2 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{R}) = S^1$; b) $\mathbb{R}^4 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = S^2$; c) $\mathbb{R}^8 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{H}) = S^4$; d) $\mathbb{R}^{16} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_1(\mathbb{O}) = S^8$; en que a cada vector le hagamos corresponder la recta vectorial que genera. Si nos restringimos a los vectores unitarios, tenemos las fibraciones de Hopf.

Además, las fibraciones de Hopf permiten calcular ciertos *grupos de homotopía de orden superior* de esferas, pues se tiene:

- $\pi_i(S^2) \approx \pi_{i-1}(S^1) + \pi_i(S^3), i \geq 2$
- $\pi_i(S^4) \approx \pi_{i-1}(S^3) + \pi_i(S^7), i \geq 2$
- $\pi_i(S^8) \approx \pi_{i-1}(S^7) + \pi_i(S^{15}), i \geq 2.$

Analíticamente, podemos definir:

$$\begin{aligned} S^3 \subset \mathbb{R}^4 \cong \mathbb{C}^2 &\longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2 \\ (w, x, y, z) &\longrightarrow \frac{w+ix}{y+iz} \\ (w, x, 0, 0) &\longrightarrow \infty \end{aligned}$$

donde se pasa de $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a S^2 mediante la proyección esterográfica. Está claro que la fibra de infinito es una circunferencia:

$$S^3 \cap \{y = 0\} \cap \{z = 0\}.$$

Todas las fibras son de hecho circunferencias. ¿Cómo están dispuestas? Lo vemos en la siguiente ilustración, en la que aparecen cuatro fibras, convenientemente *engordadas*.



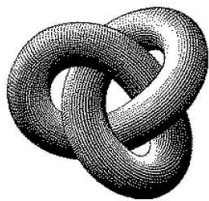
Fibras de la fibración de Hopf $S^3 \longrightarrow S^2$.

Nudos y esferas anudadas

Las fibras de la fibración de Hopf definen un *enlace*. Quizá el más célebre sea el *enlace de Borromeo*:



Cuando se tiene solamente una circunferencia en \mathbb{R}^3 se puede formar un *nudo*:



(En la ilustración está “engordado” para que se pueda percibir mejor)

Topológicamente la figura obtenida es una circunferencia: un habitante unidimensional que la empezara a recorrer no podría distinguir si está en una circunferencia plana o en una anudada. Realmente, la Topología sí da más medios de distinguir los nudos, pero no es ésta ocasión de explicarlo. *Geométricamente* sí se puede distinguir si una circunferencia está anudada o no: la curvatura total de un nudo es $\geq 4p$ (teorema de Fary-Milnor), mientras que la de S^1 es $2p$.

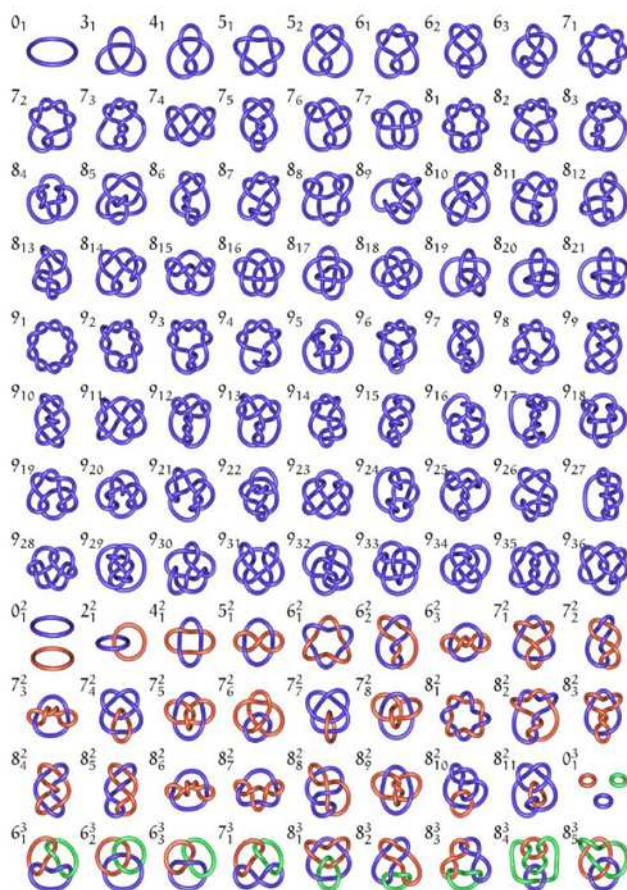
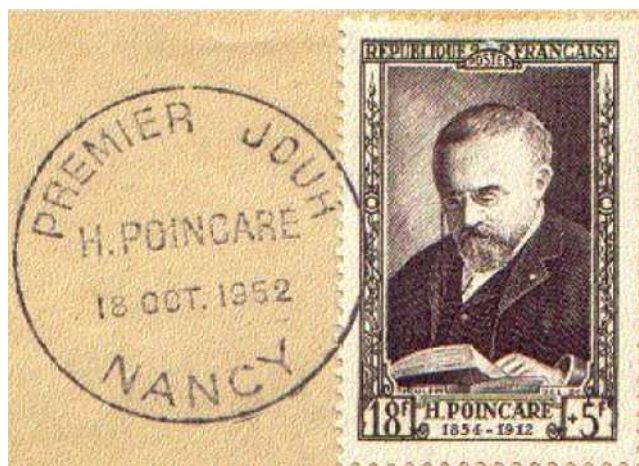


Tabla de nudos y enlaces

Los nudos y enlaces se clasifican atendiendo al número de cruces de sus proyecciones planas. La siguiente tabla ofrece la clasificación de los nudos de menos de diez cruces, y las de enlaces de dos y tres componentes de menos de nueve cruces.

La conjetura de Poincaré



La ilustración representa el sello dedicado a Poincaré (1854-1912)

Es quizá el problema más famoso referente a las esferas. Poincaré en 1904 realizó la siguiente conjetura: *Si una variedad cerrada (=compacta y conexa) de dimensión 3 es simplemente conexa (=grupo fundamental trivial), entonces necesariamente es homeomorfa a S^3 .*

- En 1961 probó Smale que la conjetura es cierta para variedades de dimensión n , con $n > 4$.
- En 1982 Freedman probó la conjetura para $n = 4$.
- También en 1982 Thurston enunció su Conjetura de Geometrización (toda variedad de dimensión 3 puede descomponerse en trozos cada uno de los cuales es cociente de una de las 8 geometrías de dimensión 3).
- En el año 2003 Perelman anunció que había demostrado la conjetura de Thurston y la de Poincaré para $n = 3$.

Los tres primeros autores recibieron la Medalla Fields: Smale en 1966, Thurston en 1982 y Freedman en 1986.

Este problema está contenido en la relación de los siete “Problemas del Milenio” propuestos por el Instituto Clay, dotados cada uno con un millón de dólares.

Comentarios finales.

El autor desea hacer público su agradecimiento a los organizadores del ciclo *Un paseo por la geometría*, tanto por el esfuerzo que dedican a la divulgación de la Geometría como por la amabilidad y disponibilidad mostrada hacia los conferenciantes.

Además, confía en que las observaciones contenidas en el presente texto puedan acrecentar la curiosidad e interés de los lectores, a los que pide indulgencia ante la falta de rigor del mismo y lo elemental que puede resultar para un conocedor de la Geometría.

Bibliografía

Habiendo sido el presente un trabajo de carácter divulgativo, muchos de los resultados citados se pueden encontrar en numerosos textos. Vamos a agruparlos de modo temático, siguiendo el orden de la exposición. No haremos una relación extensa: solamente sugeriremos obras donde poder proseguir la lectura. Por supuesto que todo lo que se ha comentado se puede encontrar fácilmente por Internet.

Volumen de las esferas: Véase, por ejemplo,

[1] R. Rothe: *Matemática Superior para matemáticos, físicos e ingenieros* I. Ed. Labor, 1959, página 517.

Geometría compleja: Existen muchos tratados. Por ejemplo,

[2] S. Kobayashi y K. Nomizu: *Foundations of Differential Geometry*, I, II. Interscience, N. York, 1963, 1969.

Geometría casi-contacto: Una referencia básica es el libro

[3] D. E. Blair: *Contact manifolds in Riemannian Geometry*, Lecture Notes in Math. 509, Springer, Berlín, 1976.

Álgebras reales, cuaterniones y octoniones: Veáanse, por ejemplo:

[4] J. P. Ward: *Quaternions and Cayley Numbers*, Kluwer Ac. Publ., Dordrecht, 1997.

[5] J. C. Baez: The octonions. *Bull. Amer. Math. Soc.* 39 (2002), 145-205.

Aplicaciones de la geometría simpléctica a la cartografía: La estructura simpléctica de la esfera S^2 y su aplicación a la cartografía puede hallarse en

[6] J. C. Marrero: Geometría simpléctica y ciencia. Un paseo por la Geometría, 2001-2002, 183-201. Departamento de Matemáticas, U.P.V.-E.H.U.

Una introducción matemática a temas de cartografía en

[7] R. Ibáñez: Muerte de un cartógrafo. Un paseo por la Geometría, 2001-2002, 23-44. Departamento de Matemáticas, U.P.V.-E.H.U.

Homotopía: Esta es una parte de la Topología Algebraica. Citaremos el libro clásico

[8] N. Steenrod: The topology of fibre bundles. Reprint of the 1957 edition. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999.

porque en él se incluyen resultados sobre los grupos de homotopía de orden superior de las esferas. Una introducción a la teoría de homotopía (no a la de orden superior), que incluye en la página 240 el listado de estructuras diferenciables no equivalentes de las esferas, es el libro

[9] W. S. Massey: Introducción a la topología algebraica. Ed. Reverté, Barcelona, 1972.

Teoría de nudos y enlaces: Sólo citaremos dos libros clásicos:

[10] R. H. Crowell y R. H. Fox: Introduction to knot theory. Reprint of the 1963 original. Graduate Texts in Mathematics, No. 57. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[11] G. Burde y H. Zieschang: Knots. de Gruyter Studies in Mathematics, 5. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1985.

El Teorema de Milnor-Fary mencionado en el texto está probado, por ejemplo, en las páginas 167 a 172 de:

[12] R. S. Millman y G. D. Parker: Elements of differential geometry. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1977.

Conjetura de Poincaré: Ha sido objeto de muchos artículos y comentarios. Los siguientes artículos dan una visión general del problema y de cómo se puede afrontar utilizando flujos de Ricci:

[13] J. Milnor: Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. Notices Amer. Math. Soc. 50 (2003), no. 10, 1226–1233.

[14] M. T. Anderson: Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow. *Notices Amer. Math. Soc.* 51 (2004), no. 2, 184–193.

Medallas Fields y problemas del Milenio: La Gaceta de la R.S.M.E. dedica una sección a los matemáticos que han obtenido la medalla Fields, así como a otros aspectos del tema. De los que hemos mencionado en el texto, el único que ya ha aparecido en esta sección es Thurston:

[15] M. T. Lozano: William Thurston, medalla Fields. *Gaceta de la R.S.M.E.*, 3, no 3, (2000) 549-555.

Respecto de los problemas del milenio puede verse:

[16] M. Castellet: De Hilbert a los Problemas del Milenio. *Gaceta de la R.S.M.E.*, 6, no 2, (2003) 367-376.