Cómo mover una aguja en un conjunto plano pequeño

por

Javier Duoandikoetxea, Universidad del País Vasco

1. El problema de Besicovitch

El año 1919 el matemático ruso Abram S. Besicovitch publicó en un artículo que apareció en una revista de poca difusión su solución al siguiente problema:

> **Problema de Besicovitch.** *¿Existe un conjunto plano de medida cero que contiene un segmento de longitud 1 en cada dirección?*

El término *medida cero* (área cero en el caso del plano) aunque remite a la teoría de la medida se puede expresar en términos elementales que serán suficientes para entender el planteamiento: *un conjunto plano tiene medida cero si para cada ϵ positivo se puede encontrar una familia finita o numerable de cuadrados (o rectángulos) que recubra al conjunto y cuya suma de áreas sea menor que ϵ.*

La razón por la que Besicovitch se planteó el estudio de esa cuestión hay que buscarla en la integral de Riemann. Desde unos años antes se sabía que una función es integrable Riemann si y sólo si su conjunto de discontinuidades tiene medida cero (longitud si estamos en una variable, área en dos). Basándonos en este resultado es muy sencillo construir una función $f(x,y)$ integrable en el plano y tal que la función $x \mapsto f(x,b)$ no sea integrable Riemann (como función de una variable) para algún valor b. En efecto, basta elegir una función cuyos únicos puntos de discontinuidad sean los de un segmento de longitud positiva contenido en la recta $y = b$. Como conjunto plano sus singularidades tendrán área cero pero para b fijo la longitud del conjunto de singularidades no será cero.

La construcción anterior depende de la colocación del sistema de referencia y si giramos los ejes, se pierde la propiedad ya que en cada recta paralela a los nuevos ejes no habrá más que un único punto de discontinuidad. Besicovitch se preguntó si era posible construir un ejemplo que fallase en todos los sistemas de referencia. Queda claro cuál será el papel del conjunto que pretende construir, precisamente el de ser el conjunto de los puntos de discontinuidad de la función. Al tener medida cero la función será integrable como función de dos variables pero fijados unos ejes siempre habrá un segmento en el conjunto con la dirección de los ejes y la función de una variable definida sobre la línea que contiene al segmento tendrá un conjunto de discontinuidades de longitud 1.

La respuesta de Besicovitch fue que tal conjunto existe.

2. El problema de Kakeya

Al mismo tiempo que Besicovitch trabajaba en Rusia en el problema anterior aparecía en una revista japonesa un artículo de Sôichi Kakeya, profesor de matemáticas en Sendai. En este trabajo se planteaba el siguiente problema:

> **Problema de Kakeya.** *Encontrar el conjunto plano de área mínima en el que se puede hacer girar continuamente un segmento de longitud 1 de modo que vuelva a ocupar su posición original pero con los extremos invertidos.*

El segmento de longitud 1 es lo que en adelante llamaremos *aguja*. En realidad, en la pregunta de Kakeya se pide que el conjunto sea convexo pero de momento vamos a olvidarnos de esta restricción. Parece haber ciertas semejanzas entre los enunciados de ambos problemas porque en este segundo caso el conjunto tiene que contener un segmento de longitud 1 en cada dirección ya que al hacer girar continuamente la aguja, tendrá que pasar por todas las direcciones. Sin embargo, también es fácil convencerse de que la exigencia de movimiento continuo obliga a que el área de cualquier figura sobre la que podamos realizar lo que el problema de Kakeya exige tiene que ser positiva.

El artículo de Kakeya, que contiene otras cuestiones además de la que presentamos, no resuelve este problema ni siquiera en el caso convexo.

3. Buscando respuestas al problema de Kakeya

Sería interesante que el lector abandonase temporalmente la lectura de este artículo y dedicase un tiempo a buscar su propia respuesta al problema de Kakeya. Es decir, que convendría "personalizar" el problema: *¿cuál es el conjunto plano de área más pequeña que yo soy capaz de encontrar en el que puedo hacer girar una aguja de modo que vuelva a ocupar su posición original pero con los extremos invertidos?*

Supuesto que ya hemos dedicado un tiempo a la cuestión y antes de pasar a hablar de respuestas definitivas, voy a presentar algunos de los conjuntos en que quizá hayamos pensado.

Un círculo de diámetro 1 es seguramente el conjunto que más rápidamente viene a la mente (figura 1). También sirve un cuadrante de círculo de radio 1 (figura 2). En ambos casos el área utilizada es $\pi/4 = 0.785\ldots$ Este último conjunto se puede modificar haciendo ángulos de 60 grados como en la figura 3, que tiene un área de $(\pi - \sqrt{3})/2 = 0.7047709\ldots$ Hemos reducido el tamaño del conjunto. Una variante de esta figura podría ser el triángulo equilátero de altura 1 (figura 4). Puesto que su área es $1/\sqrt{3} = 0.5773502\ldots$, mejoramos aún un poco más. Hasta aquí el proceso no parece muy difícil pero mejorar esta figura es delicado.

El siguiente conjunto que muestro tiene una idea distinta e interesante (fue propuesto por una alumna en una clase en que planteé el problema). Situemos la aguja sobre el eje de ordenadas y hagamos deslizar su extremo inferior a lo largo del eje de abscisas hasta que quede en posición horizontal; repitamos el proceso hacia abajo y la aguja quedará situada de nuevo en el eje de ordenadas pero ahora está abajo el extremo que antes estaba arriba. Basta deslizarla sobre el eje para situar la aguja sobre la posición inicial pero invertida. ¿Cuál es la figura resultante y cuánto vale su área? Es media astroide (cuya ecuación es $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$) y su área vale $3\pi/16 = 0.5890486\ldots$ No es menor que la del triángulo... pero se puede mejorar la construcción.

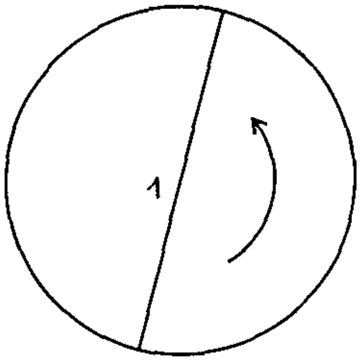

Figura 1

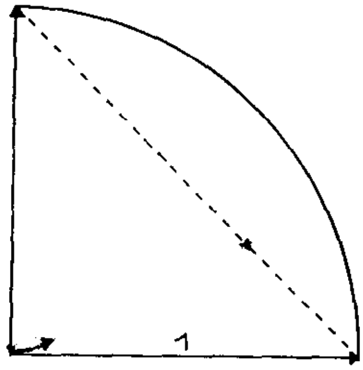

Figura 2

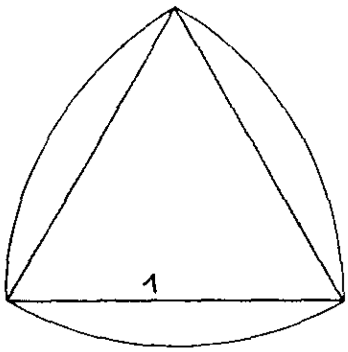

Figura 3

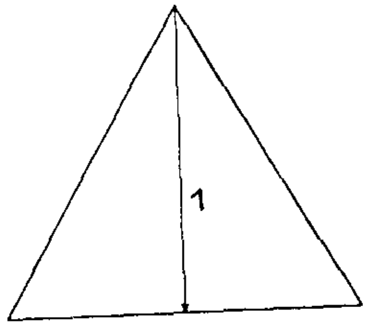

Figura 4

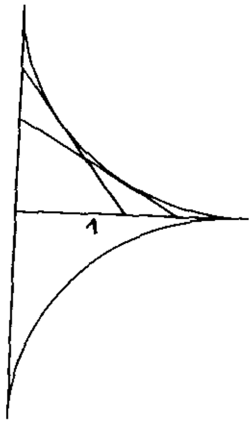

Figura 5

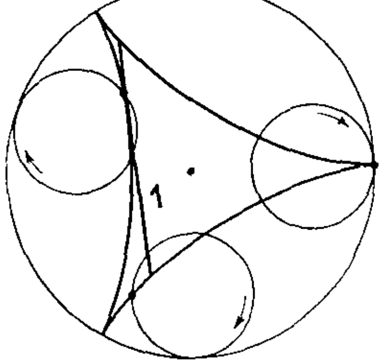

Figura 6

La astroide es un caso particular de *hipocicloide*. Esta es una figura que se obtiene del modo siguiente: se considera una circunferencia de radio R y en su interior se sitúa otra de radio menor, r, tangente a la primera; se marca un punto sobre ésta y se la hace rodar por el interior de la grande manteniéndose siempre tangente a ella. La trayectoria del punto marcado es una hipocicloide. Para obtener una astroide debe ser $R = 4r$ (la del párrafo anterior necesita además $R = 1$). Dejamos al lector que piense en las diferentes figuras que se obtienen según la relación R/r (conviene distinguir si es racional o irracional y en el primer caso, si es entero o no).

Pues bien, la hipocicloide construida para $R = 3r$ (figura 6) tiene una interesante propiedad: la tangente en cualquier punto tiene un segmento interior a la figura de longitud constante, independiente del punto. Es fácil convencerse entonces de que dicha hipocicloide de "tres cuernos" permite girar una aguja sin salirse de su interior. Ajustando el radio para que la longitud de la aguja sea 1, sale $R = 3/4$ lo que da para la figura un área de $\pi/8 = 0.392699\ldots$ ¡Hemos mejorado todos los resultados anteriores! Este resultado ya había sido observado por Kubota, según menciona Kakeya en un artículo con M. Fujiwara de 1917.

Como ya hemos dicho la pregunta original de Kakeya se refería a conjuntos convexos. De las figuras anteriores sólo las cuatro primeras lo son. El artículo conjeturaba que el triángulo equilátero de la figura 4 era la respuesta al problema para conjuntos convexos y el matemático alemán J. Pàl lo probó en un artículo de 1921. Para conjuntos en general el problema quedaba abierto y se tenía la impresión de que la hipocicloide de la figura 6 no se podría mejorar. Sólo había que demostrarlo, pero ...

4. Besicovitch encuentra a Kakeya

Hemos dejado a Besicovitch en Rusia en unos años cruciales. La revolución de 1917 cambió el país y nada volvió a ser igual. Tras un paso por San Petersburgo había ido como profesor a Perm, en los Urales, a la última universidad creada en el país antes de la revolución soviética y que contaba con algunos buenos profesores. Allí fue donde publicó su trabajo mencionado en la primera sección. En 1923 una beca le hubiera permitido salir a pasar una temporada a occidente pero las autoridades le negaron el permiso de salida. Decidió salir sin permiso, estuvo un año en Copenhague junto a Harald Bohr, un importante matemático menos famoso que su hermano el físico Niels Bohr, y de allí pasó a Inglaterra donde estuvo varios meses en Oxford. Uno de los más ilustres matemáticos ingleses,

G. H. Hardy, le ayudó a encontrar un puesto en la Universidad de Liverpool y en 1927 se trasladó a Cambridge donde pasó el resto de su vida. Murió en 1974.

No se sabe quién hizo la conexión entre el resultado de Besicovitch y el problema de Kakeya, pero lo cierto es que una vez salido del aislamiento ruso Besicovitch conoció de algún modo el problema y aprovechó su construcción de 1919 para dar una solución definitiva que apareció publicada en 1927. Posteriormente otros matemáticos como Perron y Schoenberg modificaron la presentación original y la que mostramos a continuación está basada en los llamados *árboles de Perron*. Que quede claro no obstante que las ideas fundamentales son debidas a Besicovitch.

5. El árbol de Perron y las conexiones de Pàl

Consideremos el triángulo ABC de la figura 7, y sea $\mathcal{A}_0$ su área. Realizaremos sobre él la siguiente operación: unimos el vértice A con el punto medio M del lado BC y deslizamos el triángulo ABM sobre el AMC de modo que la altura del punto N sobre la base de la figura sea r veces la altura de ABC. ¿Cuál es el área de la figura resultante? Podemos observar que consta de un triángulo semejante al original con los lados multiplicados por r y una "pajarita" (suponemos que r es mayor que $1/2$ para que la pajarita esté completa). Juntando las dos partes de la pajarita se observa que equivale a dos triángulos semejantes al original con los lados multiplicados por $1-r$. En consecuencia, el área total es

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 r^2 + 2\mathcal{A}_0(1-r)^2.$$

Repetimos ahora la operación con cada uno de los dos medios triángulos que hemos conseguido. Vamos a contabilizar solamente la rebaja que se produce en el área del triángulo $B'NC'$, aunque el movimiento correspondiente podría rebajar también el área de la pajarita. Ahora tendremos una desigualdad para el área resultante en lugar de una igualdad, concretamente,

$$\mathcal{A}_2 \leq \mathcal{A}_0 r^2[r^2 + 2(1-r)^2] + 2\mathcal{A}_0(1-r)^2.$$

Repitiendo el proceso y volviendo a considerar la rebaja que se produce sobre el triángulo de área $A_0 r^2$ tenemos la acotación

$$\mathcal{A}_3 \leq \mathcal{A}_0 r^4[r^2 + 2(1-r)^2] + 2\mathcal{A}_0(1-r)^2(1+r^2).$$

Al cabo de k veces de repetir el proceso conseguimos una figura que tiene forma de árbol con 2^k ramas (la figura 9 representa el tercer paso) y de ahí toma su nombre la construcción. La cota que se obtiene para el área es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_k &\leq \mathcal{A}_0[r^{2k} + 2(1-r)^2(1 + r^2 + \ldots + r^{2k-2})] \\ &= \mathcal{A}_0[r^{2k} + 2(1-r)^2\frac{1 - r^{2k}}{1 - r^2}] \leq \mathcal{A}_0[r^{2k} + 2(1-r)]. \end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$ podemos elegir $r < 1$ de modo que $1 - r < \epsilon/4\mathcal{A}_0$ y una vez elegido r podemos elegir k para que $r^{2k} < \epsilon/2\mathcal{A}_0$. En consecuencia, la construcción permite llegar a una figura de área tan pequeña como se quiera.

La propiedad interesante del árbol de Perron es que contiene segmentos en todas las direcciones que en la figura original (figura 7) están entre las direcciones de AB y AC. Lo que hemos perdido es la posibilidad de ir por medio de un giro continuo de la dirección AB hasta la AC como se podía en la figura original.

Nos planteamos ahora la siguiente cuestión: *si tenemos dos segmentos de igual longitud situados sobre rectas paralelas, ¿cuál es el área mínima necesaria para pasar de uno a otro?* Veamos que se puede pasar de uno a otro sobre un conjunto de área tan pequeña como se quiera.

Giremos el segmento un ángulo muy pequeño, desplacémoslo a lo largo de la nueva recta en que se apoya hasta que corte a la línea sobre la que deseamos situarlo, un giro del mismo tamaño que el primero lo sitúa sobre ella y un desplazamiento a lo largo de ésta termina el trabajo (figura 10). La única área no nula barrida en el camino del segmento se produce al hacer los giros y, por tanto, se puede hacer tan pequeña como se desee. (No hay que olvidar que por largo que sea el recorrido sobre las rectas el área es cero.) Una construcción de este tipo se llama *conexión de Pàl*, por el matemático antes mencionado, que es a quien Besicovitch atribuye la idea.

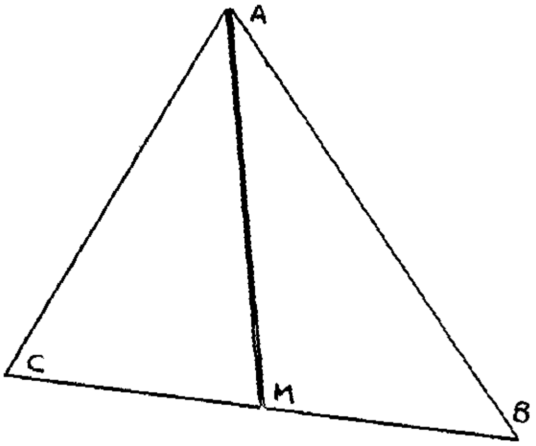

Figura 7

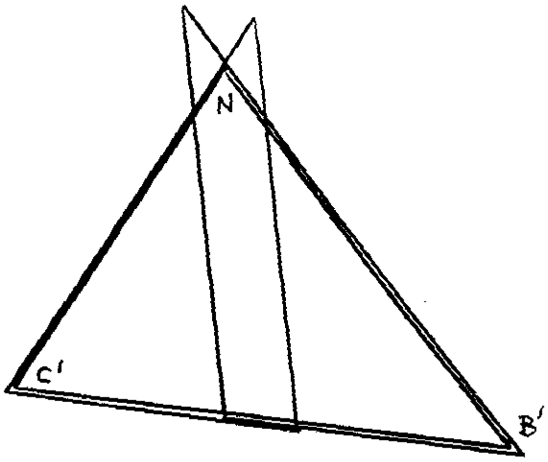

Figura 8

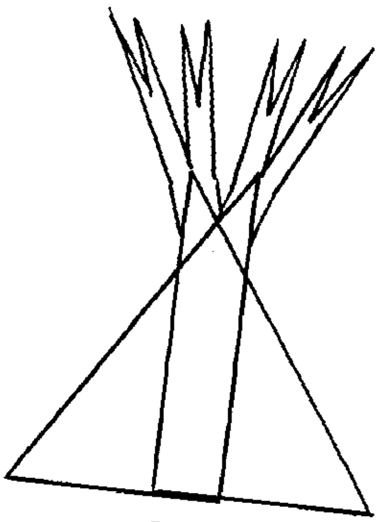

Figura 9

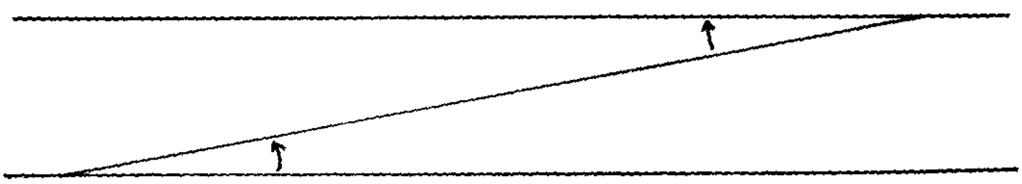

Figura 10

6. La solución del problema de Kakeya

Teorema. *Existe un conjunto plano de área tan pequeña como se quiera sobre el que se puede hacer girar continuamente de modo que vuelva a ocupar su posición original con los extremos invertidos.*

Consideremos un triángulo como el de la figura 7 y veamos que dado $\epsilon > 0$ podemos pasar la aguja del lado AB al lado AC recorriendo un área menor que ϵ. Para ello comenzamos construyendo un árbol de Perron de área menor que $\epsilon/2$, lo que sabemos hacer. Si esta construcción ha dividido el triángulo original en M trozos, que han quedado desplazados entre sí, colocamos $M - 1$ conexiones de Pàl, cada una con área menor que $\epsilon/2M$, que permitan pasar del lado de uno de los trozos al lado paralelo del siguiente, con lo que estamos añadiendo un área total menor que $\epsilon/2$. Sobre la figura resultante se puede realizar el movimiento anunciado.

Para completar el conjunto necesario para responder al problema de Kakeya basta comenzar con un triángulo con ángulo recto en A, realizar la construcción anterior y repetirla cuatro veces girando noventa grados cada vez.

7. Algunas variantes

Ya hemos mencionado más arriba que en el caso de considerar solamente conjuntos convexos la solución al problema de Kakeya la da el triángulo equilátero de altura 1. Hay otras restricciones que permiten seguir planteándose variantes del problema de Kakeya.

Cuanto más pequeña sea el área deseada para el conjunto que construimos en la sección anterior más largas serán las conexiones de Pàl necesitadas y no es posible hacer esa construcción (para cualquier medida) dentro de un círculo prefijado. ¿Se puede hacer de otra manera para limitar su extensión? En 1941, A. H. van Alphen fue capaz de realizar la construcción en un círculo de radio $2 + \epsilon$ para cualquier $\epsilon > 0$ y en 1971, F. Cunningham la hizo en un círculo de radio 1 y probó además que no se puede hacer en un círculo de radio menor.

Volviendo a los conjuntos construidos en la sección 3 nos podemos preguntar si entre los conjuntos simplemente conexos (es decir, sin agujeros) el que responde al problema de Kakeya es la hipocicloide de la figura 6. La respuesta de F. Cunningham es que incluso exigiendo al conjunto esta condición suplementaria se puede conseguir que el área sea tan pequeña como se desee.

Intentémoslo con otro tipo de restricción, pidamos que el conjunto sea estrellado con respecto a un punto (es decir, el conjunto contiene todos los segmentos que unen ese punto con cualquier otro del conjunto). Tampoco en este caso la hipocicloide da el mínimo, pero a diferencia del caso anterior no se puede conseguir un área tan pequeña como se desee; se sabe que tiene que ser mayor que $\pi/108 = 0.0290888\ldots$ y que se puede hacer de área igual a $(5-2\sqrt{2})\pi/24 = 0.284258\ldots$ No se sabe cuál será la respuesta exacta.

8. Vuelta al problema de Besicovitch

Hemos comenzado mencionando el problema de Besicovitch que pedía la construcción de un conjunto de área cero con segmentos en todas las direcciones. Quizá la idea que a uno le viene a la cabeza es la de hacer el límite en la construcción del árbol de Perron. ¿Tiene sentido hablar de límite de los conjuntos que se producen en cada paso? ¿Queda "algo" si lo hacemos? Es más fácil de decir que de hacer...

En cierto modo es verdad que la respuesta es un límite de la construcción pero no directamente. Hay que asegurar algunos detalles y hay que empezar partiendo el triángulo en trocitos para que al aplicar la construcción básica del árbol de Perron quede un conjunto cuyos puntos disten poco del original. Teniendo el cuidado suficiente para asegurarse el paso al límite, el problema de Besicovitch encuentra su respuesta por este camino.

Sin embargo, voy a mencionar una construcción debida al matemático francés J. P. Kahane que responde al problema de Besicovitch de una manera enormemente sencilla. Para ello basta construir en el intervalo $[0,1]$ el conjunto ternario de Cantor. Recuerdo que este conjunto se obtiene quitando el tercio central (abierto) del intervalo, después los tercios centrales de los dos que quedan, lo mismo con los cuatro del paso siguiente y así sucesivamente; el conjunto de Cantor es la intersección de todos los conjuntos que van quedando en esta construcción. Coloquemos ahora dos de estos conjuntos en el plano, uno de ellos contenido en el segmento $[0,1]\times\{0\}$ y el otro en $[0,1]\times\{1\}$. Uniendo todos los puntos del inferior con todos los del superior queda un conjunto de segmentos que cumple las propiedades pedidas en el problema de Besicovitch, excepto que cubren sólo las direcciones de media circunferencia. Añadiendo un conjunto igual girado 180 grados se completa la construcción.

9. Referencias

[1] **Kakeya, S.**, Some problems on maxima and minima regarding ovals, *Tôhoku Sci. Reports* **6**, 1917, 71-88.

[2] **Besicovitch, A. S.**, On Kakeya's problem and a similar one, *Math. Z.* **27**, 1928, 312-320.

Un artículo de exposición de Besicovitch (en realidad, es el guión de una película sobre el problema) y otro con las variantes de la sección 7:

[3] **Besicovitch, A. S.**, Tha Kakeya problem, *Amer. Math. Monthly* **70**, 1963, 697-706.

[4] **Cunningham, F. Jr.**, The Kakeya problem for simply connected and for star-shaped sets, *Amer. Math. Monthly* **78**, 1971, 114-129.

La construcción de Kahane mencionada en la sección 8 está en

[5] **Kahane, J. P.**, Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires, *Enseignement Math.* **15**, 1969, 185-192.

Un par de libros donde se pueden encontrar los problemas de Kakeya y Besicovitch y otras cuestiones relacionadas:

[6] **de Guzmán, M.**, *Differentiation of Integrals in* $\mathbf{R}^n$, Lecture Notes 481, Springer Verlag, 1975.

[7] **Falconer K.**, *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge University Press, 1985.