Algunos problemas variacionales en la teoría de curvas

por

Oscar J. Garay, Universidad del País Vasco

1. Introducción

Desde épocas remotas el Hombre ha intentado comprender y dominar los fenómenos de la Naturaleza. Por supuesto que hay otras infinidad de fenómenos y formas que apararecen en la Naturaleza, pero al mirar el mundo alrededor a menudo nos sorprende una simetría en la forma, una regularidad en la pauta que nos hace sospechar que, después de todo, hay un cierto orden en el caos que nos rodea. ¿ Por qué es esto así ? ¿Por qué la Naturaleza en una situación concreta prefiere una determinada forma y comportamiento entre la multitud de posibiliadades concebibles? Este orden sugiere que deben de existir una serie de leyes Universales detrás de tanta armonía. Posiblemente jamás alcancemos una respuesta final a la mayoría de las cuestiones de esta índole, pero es posible que seamos capaces de encontrar o desenmascarar una serie de principios explicativos que aclaren por qué, en una situación determinada, unas formas y comportamientos predominan sobre otras. Esta modesta actitud ante los secretos de la Naturaleza ha sido de vital importancia en la evolución del conocimiento científico. En esta lucha, la búsqueda por la simplicidad ha sido no sólo un fundamento estético basado en la creencia de que la más simple es la mejor manera de hacer algo, sino que también albergaba la convicción de la Naturaleza siempre opera de la forma más eficiente. Una de estas teorías es la conocida como PRINCIPIO DE ECONOMíA DE LOS MEDIOS o también PRINCIPIO DE MíNIMA ACCIÓN. Esta teoría surgió y desarrolló durante el periodo del barroco y rococó, desde finales del siglo XVII y a lo largo del XVIII, es decir desde el mismo nacimiento de lo que conocemos como ciencia moderna. Desde sus comienzos se ha utilizado como una herramienta esencial en la búsqueda del conocimiento del mundo físico propiciando, al mismo tiempo, el desarrollo de la teoría matemática conocida como CÁLCULO DE VARIACIONES.

A pesar de que a través de los tiempos siempre se han buscado leyes o principios que explicasen el mundo físico, no fue hasta 1744 cuando el científico francés Pierre-Louis de Maupertuis propuso un principio general que abarcase la gran variedad de fenómenos físicos, conocido posteriormente como el PRINCIPIO DE MíNIMA ACCIÓN. Influenciado por las ideas de Leibniz , Maupertuis estableció el principio metafísico de que la Naturaleza opera siempre de la forma más económica posible, así, por ejemplo, en un medio homogéneo la luz viaja siempre eligiendo el camino más corto. Maupertuis, viendo este principio como una manifestación de la sabiduría de Dios, concluyó que los cambios en la Naturaleza se producen de forma que se consume la menor cantidad de la energía o acción necesaria para dicho cambio. En la forma propuesta por Maupertuis, el principio era demasiado vago y ambiguo como para ser útil a la hora de atacar problemas concretos de alguna dificultad. Fueron Euler (quien también había insinuado el principio poco antes que Maupertuis) y Lagrange quienes lo elaboraron y desarrollaron de una forma matemática convirtiéndolo en una herramienta indispensable para la Física. Sin embargo, esta evolución estuvo a su vez fundamentada en una de los más influyentes creaciones de la mente humana: Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, de Isaac Newton, aparecida en 1687.

Figura 1: Isaac Newton

Las ideas revolucionarias de Newton no fueron inmediatamente aceptadas en Europa donde hasta 1730 predominaron las ideas de René Descartes. Los Cartesianos lucharon denodadamente contra las ideas de Newton hasta que la Academia Francesa de Ciencias decidió poner fin a la disputa basándose en los hechos mas que en el debate. De esta suerte, organizaron dos expediciones científicas, una al Círculo Ártico en Suecia y otra al Ecuador, con el objeto de realizar mediciones geodésicas y determinar si la Tierra estaba achatada en los Polos, como las teorías de Newton preveían, o si lo estaba en el Ecuador, como lo hacían las de Descartes. La expedición al Norte fue dirigida por Mapertuis en 1736-37 y demostró que Newton tenía razón. Este hecho le dio una enorme popularidad a Maupertuis y contibuyó a la posterior expansión de su principio de mínima acción.

El propósito de esta charla es exponer, mediante el uso de tres ejemplos de la teoría de curvas, algunos problemas matemáticos relacionados con el principio de mínima acción y otras propiedades variacionales.

El primer ejemplo, sirve para ilustrar cómo los problemas variacionales ya eran objeto de interés en la Antiguedad. Los dos ejemplos siguientes analizan cómo el principio del mínimo condujo a las nociones de geodésicas y curvas elásticas. Usando un lenguaje moderno, lo que se hace normalmente en este tipo de problemas, es considerar un cierto espacio de curvas, Ω, sobre el que tenemos definido un funcional "energía", $\mathfrak{F}$, y donde se pretende encontrar las curvas de Ω que son mínimos o, al menos, puntos críticos de dicha "energía".

2. El problema Isoperimétrico

Desde antiguo, el círculo y la esfera se han considerado como las formas perfectas en Geometría. Para los antiguos Griegos eran los símbolos de la simetría última de lo divino. Por esa razón pensaban que que los planetas se movían en el firmamento describiendo círculos perfectos. El filósofo griego Xenófanes (565-470 b.C) deshechó los multiples dioses de la creencia popular y los reemplazó por un único y supremo dios a quien atribuyó la forma de una esfera.

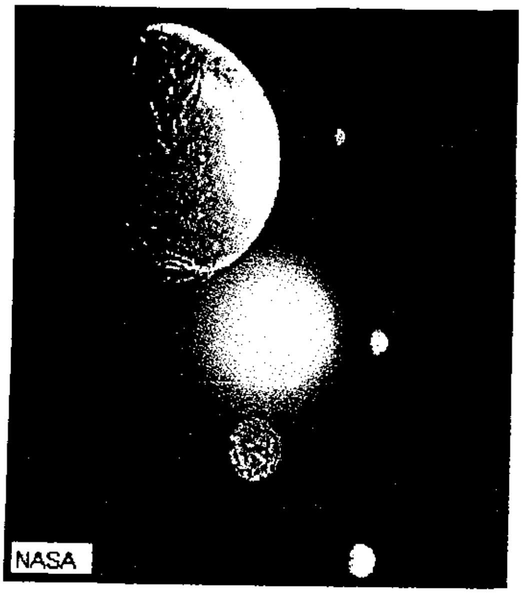

Figura2: Urano y sus lunas

La gran variedad de fuerzas y mecanismos en la naturaleza que producen objetos con forma casi esférica hacen que la forma esférica sea tan sugestiva hoy en día como lo era en la Antiguedad. Como hemos dicho, ya los antiguos Griegos desarrollaron la idea de que en la Naturaleza existe un orden una simetría y una armonía que pueden explicarse por medio de las Matemáticas. Es más los Pitagóricos pensaban que las almas puras podían ascender a través de las esferas celestiales, para una eventual unión con Dios, por medio de las matemáticas. Este interés por la suprema simetría de las esferas, motivó que una notable propiedad variacional del círculo ya fuera conocida en la Antiguedad.

Esta propiedad está relacionada con la historia de la reina Dido, contada por Virgilio en la Eneida. Dido era una princesa fenicia, hija de Belo, rey de Tiro (que hoy forma parte de Libano) y esposa de Siqueo uno de los más ricos terratenientes fenicios. Cuando el hermano de Dido, Pigmalión accede al trono de Tiro, éste manda asesinar a Siqueo para arrebatarle sus posesiones. El fantasma de Siqueo se aparece a Dido y le revela el crimen y el lugar donde ocultaba enormes tesoros. Con ellos prepara su fuga junto con sus seguidores y llegan al Norte de Africa (aproximadamente en el año 900 a.c) al lugar que más tarde se llamaría Cartago. Una vez allí intentó compral al rey local, Iarbas rey de los gétulos, una porción de tierra donde establecerse con sus seguidores. No se sabe muy bien si fue porque Dido era tacaña o porque Iarbas no quería vecinos molestos, que cerraron el trato con la condición de que Dido compraría aquella porción de tierra que pudiera abarcar con la piel de un toro. Dido interpretó la palabra abarcar de la forma más generosa posible, y mandó cortar la piel del toro en tiras muy estrechas las que, unidas, formaron una gran cinta de entre uno y dos kilómetros, con los que pudo rodear una superficie de entre 10 y 25 hectáreas donde fundó la ciudad de Birsa (Cartago). Cómo pudo obtener Dido, la mayor cantidad posible de tierra rodeándola con la cinta ? Dido tuvo que resolver el siguiente problema matemático:

De entre todas las posibles curvas cerradas y simples de una longitud dada, cuál encierra un área mayor ?

Podemos suponer que Dido conocía la respuesta correcta: la circunferencia de dicha longitud. Incluso podría haber obtenido más cantidad de tierra, si los dos extremos de la cinta hubieran estado fijados a dos puntos de una, más o menos rectilínea, playa Mediterránea, y hubiera extendió la cinta en forma de una semicircunferencia. Esto es, de hecho, lo que cuenta Virgilio que hizo ella. Si miramos a algunos mapas de ciudades amuralladas de la Europa medieval, parece como si sus habitantes hubieran llegado a la misma conclusión que Dido.

El problema planteado en la historia de Dido pertenece al tipo de problemas que, en Matemáticas, se conocen con el nombre de problemas isoperimétricos. La solución, como hemos dicho la circunferencia, ya era conocida por los griegos, aunque no se dio una demostración rigurosa hasta finales del siglo XIX. Una formulación equivalente, acorde con el principio del mínimo, sería fijar un área determinada y de entre todos los dominios con dicho área, determinar áquel con menor longitud perimetral. Una tercera formulación sería expresar el problema mediante una desigualdad analítica, es decir, puesto que conocemos los valores del área del disco y de la longitud de su frontera, establecer el problema isoperimétrico en términos de una *desigualdad isoperimétrica,* $L^2 \geq 4\pi A$, donde A es el área del dominio y L la longitud de su perímetro.

3. El Problema de las Geodésicas

Todos nos hemos enfrentado en múltiples ocasiones con problemas relacionados con el Principio del mínimo. Cuando hacemos un viaje en automóvil nos preguntamos cuál será la ruta más corta o aquella por la que tardaremos menos en realizar el viaje. Problemas de este tipo fueron importantes estratégicamente para el Imperio Romano, que comunicó sus provincias por un excelente sistema de carreteras. Asimismo, la cuestión de encontrar las rutas más cortas y breves hacia el lejano Este y el Nuevo Mundo, fue de vital importancia para las grandes potencias Europeas de los siglos XV y XVI. La teoría Matemática que trata de determinar las líneas más cortas en una superficie, como por ejemplo, la de la tierra, comenzó en 1697 con los estudios de los hermanos Jacob (1654-1705) and Johann (1667-1748) Bernoulli.

Los hermanos Bernoulli, que fueron los primeros miembros de una dinastía de matemáticos suizos, nacieron en Basilea y eran hijos de un mercader de fármacos. Estudiaron matemáticas en contra de la voluntad de su padre, pero este fue uno de los pocos puntos que tuvieron en común, pues durante la mayor parte de su vida estuvieron amargamente enfrentados. De hecho, esta agría disputa está en el centro del turbulento nacimiento del estudio de las geodésicas. Entre 1666 y 1680 , Newton y Leibniz descubrieron el cálculo infinitesimal. Mientras que las ideas de Newton no se publicaron hasta 1711, Leibniz publicó las suyas en 1684, aunque de una manera un tanto breve y críptica. El primero en entender y desarrollar las ideas de Leibniz fue Jacob, quien en 1687 había aceptado un puesto profesor de Matemáticas en Basilea rechazando un trabajo eclesiástico. Jacob enseñó a su joven hermano los secretos del cálculo infinitesimal que él había redescubierto sin la ayuda de Leibniz. En 1690, Newton, Leibniz y los dos hermanos Bernoulli eran las únicas persona que conocían el cálculo diferencial e integral. Parece ser que fue en esta fecha cuando surgió la rivalidad entre los dos hermanos. En Agosto de 1697, Johann propuso publicamente como un desafío a su hermano, el problema de encontrar el camino más corto entre dos puntos de una superficie convexa. En otras palabras, el problema de:

Determinar, de entre todas las curvas que unen dos puntos dados de una superficie, aquellas que tienen la longitud más pequeña.

En 1698, Jacob resolvió el problema para las superficies de revolución. Johann criticó la solución por tratar de un caso muy especial y anunció, sin aportar la prueba, que el poseía la respuesta correcta afirmando que la curva más corta en una superficie, verificaba la propiedad de que en cada uno de sus puntos el plano osculador era perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto. Treinta años más tarde, en 1727, Johan propuso el mismo problema a su estudiante L. Euler (1707-1783), quien lo resolvió en 1728 aunque no lo publicó hasta 1732, dando lugar al primer artículo sobre el tema. Euler reducía el problema de encontrar la curva más corta a la solución de una ecuación diferencial que es equivalente a la condición geométrica sobre el plano osculador de Johann Bernoulli.

Con la aparición del artículo de Euler, Johann aprovechó para proclamar de nuevo que la respuesta era conocida por él desde hacía mucho tiempo. Sin embargo, los expertos dudaban de las palabras de Johann. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta el asunto relacionado con el Marqués de L'Hopital. En 1691-2 cuando con ocasión de un viaje por Francia, Johan Bernoulli conoció al Marqués, convinieron en que, a cambio de una pensión vitalicia, aquél comunicara al Marqués todos sus nuevos descubrimientos sobre el cálculo infinitesimal y que permaneciera callado sobre el tema hasta la muerte de éste. L'Hopital convirtió los descubrimientos de Johann en el primer libro sobre el Cálculo Infinitesimal, que apareció en 1696. A la muerte del Marqués, Johann afirmó ser el auténtico autor del libro, hecho que hoy en día parece estar confirmado.

Posteriormente, las curvas que verificaban la propiedad de que en cada uno de sus puntos el plano osculador era perpendicular al plano tangente a la superficie en dicho punto, recibieron el nombre de *geodésicas*, por lo que el teorema de Bernoulli afirma que las curvas de menor longitud deben de ser geodésicas. Resulta que el enunciado recíproco, no es cierto, ya que "pequeños trozos" de geodésicas si dan el camino más corto entre dos puntos de una superficie, pero no así trozos "más grandes". Basta considerar, por ejemplo, que en una esfera las geodésicas son los círculos máximos contenidos en ella, pero que si cogemos dos puntos de un círculo máximo que no sean diametralmente opuestos, entonces el arco más pequeño de dicho círculo situado entre ambos puntos es de longitud mínima, pero no el otro. Una geodésica se dice *minimizante* si es la curva de longitud más corta que une dos puntos.

Debemos recalcar que Euler no probó la existencia de geodésicas sobre una superficie, sino que dió una condiciónes que deben de satisfacer dichas líneas, si es que existen. No fue hasta 1900 que David Hilbert, demostró la existencia de geodésicas por un punto cualquiera de una superficie en cualquier dirección. Si sobre cada geodésica, se puede uno desplazar eternamente con velocidad constante, entonces la superficie se dice *geodésicamente completa*. Ejemplos de superficies que no son geodésicamente completas, son fáciles de encontrar. Por ejemplo, en cualquier disco abierto de $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar inducido, las geodésicas alcanzan la frontera en tiempo finito. Del mismo modo, si consideramos a $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar inducido por la proyección esterográfica desde la esfera, las geodésicas resultantes se escapan a infinito en tiempo finito. Por otra parte, sobre una superficie se define una

H. Hopf y W. Rinow demostraron en 1931, que sobre una superficie completa dos puntos cualesquiera pueden unirse por una geodésica minimizante. A partir de aquí surgen naturalmente muchos otros problemas relacionados, como, por ejemplo:

- ¿ Cuántas geodésicas, " geométricamente " distintas , hay uniendo dos puntos dados ?

  ¿ Cuáles son minimizantes ?

  ¿ Cuántas geodésicas cerradas hay en una superficie ?

Matemáticamente, dos geodésicas se consideran geométricamente iguales, cuando se pueden deformar continuamente la una en la otra sin salirse de la superficie en la que están incluidas. En este caso se dice que son homotópicamente equivalentes. Respecto de las dos primeras cuestiones, hoy sabemos, que en cada clase de homotopía de curvas que unen dos puntos dados de una superficie completa, existe una geodésica minimizante. El asunto de la existencia de geodésicas cerradas es más delicado y ha sido objeto de profunda investigación desde principios de siglo. En 1927, Birhoff demostró la existencia de al menos una geodésica cerrada, sobre superficies compactas con la topología de una esfera. En 1929, Lusternik y Scnirelmann dieron una demostración de la existencia de al menos tres geodésicas cerradas simples para cualquier esfera topológica. La demostración, sin embargo, no se pudo completar totalmente hasta que, en la década de los setenta, Ballmann consiguió una prueba correcta. La generalización a esferas de dimensión n, es decir la existencia de $\frac{n(n+1)}{2}$ geodésicas sobre n-esferas topológicas, fue hecha por Alber en 1960. La demostración no era correcta, y Ballmann y otros autores dieron posteriormente pruebas correctas de diversas versiones del teorema de Alber. En 1934, Morse había demostrado, con el ejemplo del elipsoide con los tres ejes distintos, que el número anterior era óptimo. En efecto, si la razón entre los ejes es próxima a 1, entonces las elipses que se obtienen al cortar el elipsoide con los planos coordenados, son las únicas geodésicas cerradas del mismo. Finalmente mencionaremos, que Klingenberg, demostró en los años sesenta, la existencia de al menos una geodésica cerrada simple en toda superficie compacta (sea del tipo topológico de la esfera o no). Uno de los métodos más importantes en el estudio de las geodésicas cerradas, ha sido el aplicar la teoría de Morse a ciertos espacios de curvas, donde las geodésicas aparecen como puntos críticos del funcional energía. Si Ω es un cierto espacio de curvas que satisfacen ciertas condiciones de diferenciabilidad y de frontera, se define el *funcional energía,* $\mathfrak{F} : \Omega \to \mathbb{R}$, $\mathfrak{F}(\alpha)=\int_\alpha < \alpha', \alpha' >$, $\alpha \in \Omega$. Se tiene entonces que las geodésicas son los puntos críticos del funcional energía.

4. El Problema de las Curvas Elásticas

Otro de los problemas clásicos del Cálculo de Variaciones fue propuesto también por Jacob Bernoulli en 1691: El problema de la cable elástica o, simplemente, *elástica.* Este problema está relacionado con la siguiente situación física: cojamos una cuerda de piano y juntémosla diferenciablemente por sus extremos. Retorzamos el aro resultante de modo que obtengamos una inmersión diferenciable de la circunferencia en $\mathbb{R}^3$. Si liberamos ahora el aro, éste se mueve de modo que decrece la *"energía elástica"* en él almacenada. El asunto es describir cómo evoluciona el aro y determinar cúal es la posición última que alcanza. Fue Daniel Bernoulli (1700-1782), hijo de Johann y sobrino de Jacob, quien, en una carta a L. Euler, sugirió un modeló matemático para describir una elástica en equilibrio. Usando una terminología moderna, este modelo diría que una

elástica es una curva para la que la energía almacenada en la misma por efecto de su curvatura, es mínima con respecto a las curvas de su misma longitud

Esta energía se mide por el funcional curvatura al cuadrado total de la curva que describe la posición del cable. Más concretamente, sea M una variedad de Riemann completa y representemos por $\Omega(u, v)$ el espacio de curvas inmersas en M, que unen p y q y cuyas velocidades en dichos puntos son, respectivamente, u y v . Por Ω representaremos el espacio de curvas cerradas que pasan por p y, finalmente, representaremos por $\Omega_L(u,v)$ y Ω_L los respectivos subespacios de los anteriores formados por las curvas de longitud L. Siguiendo el modelo de Daniel Bernoulli, la *energía elástica* total de una curva α viene dada $F(\alpha) = \int_\alpha \kappa^2$, donde κ es la curvatura de la curva. En consecuencia, una *curva elástica* es un punto crítico del funcional $F : \Omega_L(u,v) \longrightarrow \mathbb{R}$, una *curva elástica cerrada* es un punto crítico del funcional $F : \Omega_L \longrightarrow \mathbb{R}$, y las *curvas elásticas libres* se definen como los puntos críticos de F sobre los espacios $\Omega(u,v)$ y Ω (cerradas). Nótese que las geodésicas cerradas, son mínimos absolutos de la energía elástica. Se plantean entonces, las siguientes cuestiones:

- Existencia de elásticas cerradas en M.
- Clasificación de las elásticas (cerradas o no).
- Determinar la estabilidad de los puntos críticos

En 1743, L. Euler determinó por cuadraturas, todas las formas que un cable elástico plano podía adoptar. Como consecuencia de esta clasificación, las únicas elásticas cerradas planas son los círculos y una curva con "forma de ocho".

El tema permaneció olvidado durante bastante tiempo, hasta que Radon clasificó, en 1928, las elásticas *libres (*aquellas que minimizan la curvatura al cuadrado total entre todas las curvas que unen dos puntos, sean de la misma longitud o no *)* de $\mathbb{R}^3$. Pero no ha sido hasta muy recientemente que el tema ha sido nuevamente objeto de interés. En 1982-3 Bryant y Griffiths generalizaron la noción de elástica y estudiaron este tipo de curvas en los espacios modelo (espacios Euclídeos, esferas e hiperbólicos). En esa misma época, D. Singer y J. Langer clasificaron las elásticas cerradas en los espacios modelo 2-dimensionales (1984), en $\mathbb{R}^3$ (1985) y en S^3 (1987), estudiando también la estabilidad de las mismas. En particular, demostraron que existe (salvo semejanzas) una familia numerable de elásticas cerradas no-planas en $\mathbb{R}^3$. Todas ellas están embebidas (no se autocortan) y caen dentro de un toro de revolución. El problema de las elásticas cerradas es, por su dificultad, de especial interés dentro de esta teoría. Langer y Singer en 1987 por una parte, y Koiso en 1993 usando un argumento diferente, por otra, demostraron la existencia de elásticas cerradas de una longitud dada en una variedad compacta.

Los primeros ejemplos de elásticas cerradas en superficies de curvatura no constante los dieron M. Barros y O.J. Garay en 1996 en un artículo donde clasificaron las superficies de revolución cuyos paralelos son todos curvas elásticas libres. Posteriormente, los mismos autores junto con D. Singer dieron ejemplos de elásticas en el plano proyectivo complejo y, siguiendo una idea de Pinkall, aplicaron el estudio de las elásticas a la construcción de ejemplos de superficies de Willmore.

En contraste con la situación en el plano, hay gran cantidad de elásticas cerradas en la esfera de dimensión dos. Las figuras siguientes son algunos ejemplos de ellas.

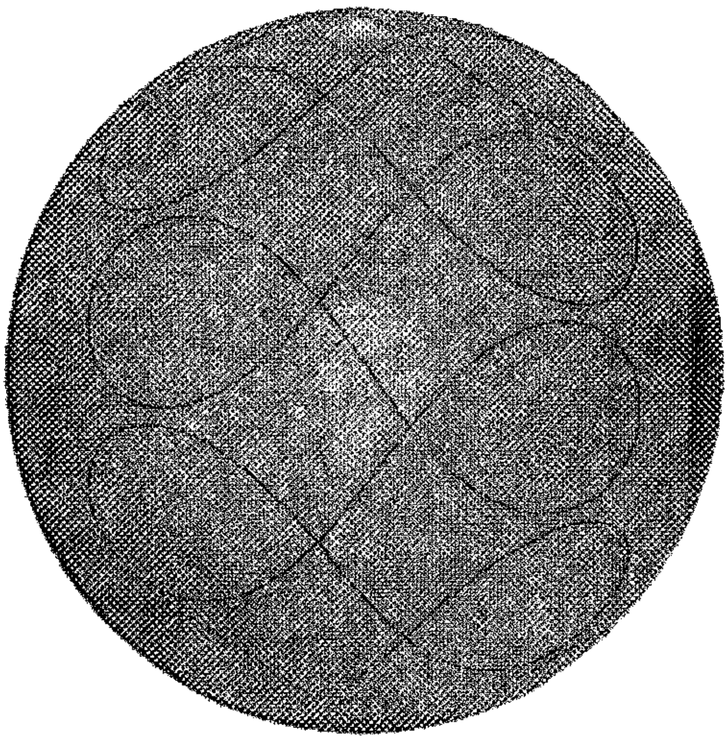

Figura 4

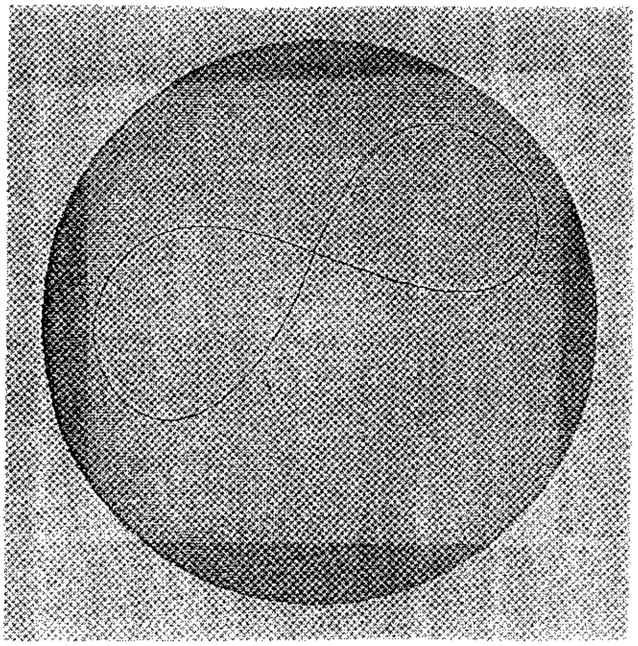

Figura5

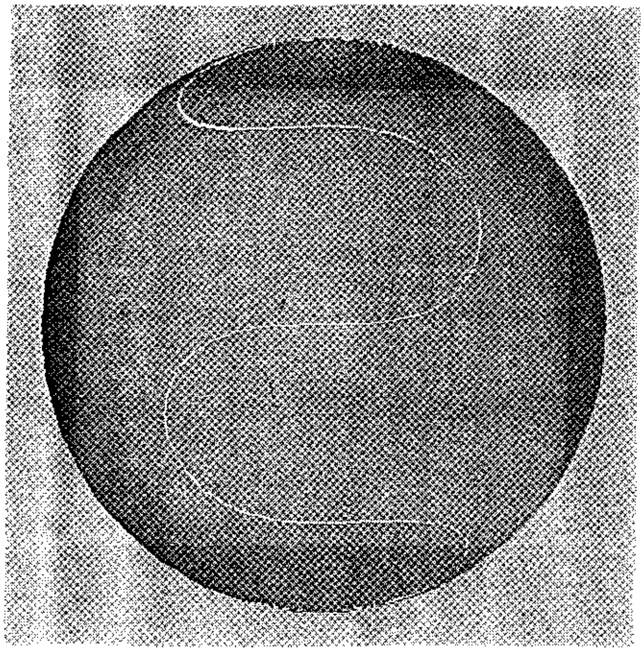

Figura 6

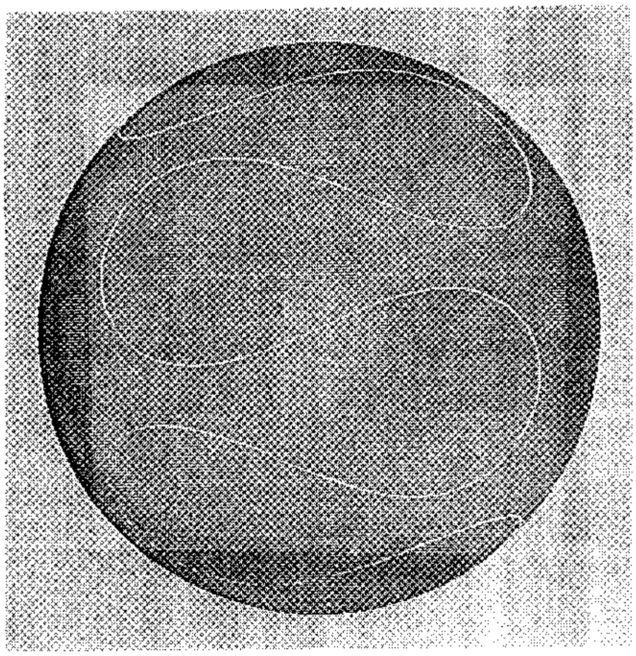

Figura 7

5. Referencias

[1] Hildebrandt, S.; Tromba, A., *The Parsimonious Universe*, Springer-Verlag, 1996.

[2] Langer, J.; Singer, D., The total squared curvature of closed curves, *J. Differential Geom.* 20 (1984), 1-22.

[3] Truesdel, C., The influence of elasticity in Analysis; The classical heritage, *Bull. Amer. Math. Soc.* 9 (1983), 293-310.