Bosquejo histórico de las geometrías no euclídeas: antecedentes, descubrimiento, difusión, consistencia, modelos, aplicaciones físicas, ...

por

José Llombart Palet

1 Introducción

Los intentos efectuados a lo largo de casi 2.000 años para demostrar el llamado V Postulado de Euclides desembocaron en la creación, en el siglo XIX, de unas nuevas geometrías a las que se conoce genéricamente con el nombre de geometrías no euclídeas.

Los descubrimientos de la física durante el siglo XX han evidenciado que dichas geometrías pueden ofrecer una representación más conveniente de ciertas estructuras y teorías físicas. Así la teoría de la relatividad restringida de Einstein puso de manifiesto que había que considerar un espacio cuatri-dimensional caracterizado por la geometría de Minkowski. Un poco más tarde varios investigadores advirtieron que la cinemática relativista estaba íntimamente ligada con la geometría hiperbólica de Lobachevski y Bolyai. Por otra parte, el desarrollo de la teoría de circuitos de microondas condujo en la década de los 50 a una serie de trabajos que ponían al descubierto la estructura hiperbólica subyacente en las representaciones de circuitos y al mismo tiempo permitían su utilización efectiva en las aplicaciones técnicas.

El contenido de este trabajo se divide en varias partes. En primer lugar se explica como la búsqueda de la solución del problema del postulado de las paralelas condujo al descubrimiento de las geometrías no euclídeas. Seguidamente se pone de manifiesto como la consideración de los modelos para el estudio del plano hiperbólico permite dar respuesta al problema de la consistencia de tales geometrías. Finalmente, se pasa revista a la forma en que se produjo la difusión de las geometrías no euclídeas en el seno de la comunidad matemática, se reflexiona acerca de la naturaleza de la geometría del espacio físico y se hace referencia a algunas aplicaciones de la geometría hiperbólica a algunas teorías físicas.

2 El problema del postulado de las paralelas

Hasta el siglo VI a. n. e. la geometría consistía en un conjunto de reglas que permitían resolver algunos de los problemas que se presentaban en la vida cotidiana. Estas reglas, que fueron desarrolladas especialmente en Mesopotamia, Babilonia y Egipto, se basaban únicamente en experiencias y observaciones.

Posteriormente, los sabios griegos como Tales de Mileto (hacia 624-548 a.n.e.), Pitágoras de Samos (hacia 580-500 a.n.e.), Hipócrates de Quío (hacia 440 a.n.e.), y Eudoxo de Cnido (hacia 408-355 a.n.e.) obtuvieron un considerable número de resultados geométricos: inscripción de esferas en un cono, semejanza de triángulos, las principales propiedades de los circulos, los polígonos y poliedros regulares, las secciones cónicas, ... Utilizando los conocimientos geométricos alcanzados por sus predecesores, Euclides (hacia 365-300 a.n.e.) realizó con sus *Elementos* (hacia 325 a.n.e.) la primera síntesis de la geometría.

El mérito de Euclides consistió en haber sabido seleccionar un conjunto de enunciados básicos a partir de los cuales logró estructurar, siguiendo el método axiomático - preconizado por Aristóteles (384-322 a.n.e.) como el único a adoptar en toda ciencia deductiva -, un sistema geométrico en el que quedaban demostrados todos los resultados geométricos más importantes que se conocían en la época.

Dichos enunciados básicos responden a tres tipos distintos:

a) Definiciones ("punto", "recta", "superficie", "ángulo", ...). En realidad no son verdaderas definiciones, sino más bien descripciones de intuiciones. En ellas se emplean conceptos primitivos que en sí mismos necesitarían también ser definidos.

b) Axiomas o verdades consideradas como evidentes y que no necesitan demostración ("dos magnitudes iguales a una tercera son iguales entre sí", "el todo es mayor que la parte", ...).

c) Postulados o verdades no evidentes en sí mismas, que no podemos demostrar, pero que resulta preciso admitirlas como ciertas ya que los teoremas deducidos de las mismas pueden ser verificados concretamente ("dos puntos cualesquiera determinan una recta", "toda recta contiene un segmento - finito - tan grande como se quiera", "una circunferencia queda determinada por su centro y su radio", "todos los ángulos rectos son iguales").

En la definición XXIII del primer libro de los *Elementos*, Euclides define las "rectas paralelas" como "dos rectas coplanares que, prolongadas cuanto se quiera, no se encuentran".

Para demostrar las propiedades recíprocas a las propiedades XXVII ("si dos rectas determinan con una transversal a ellas ángulos alternos internos iguales, entonces son paralelas") y XXVIII ("si dos rectas determinan con una transversal a ellas ángulos internos de un mismo lado suplementarios, entonces son paralelas"), Euclides establece el más importante y célebre de sus postulados: el V Postulado, que enuncia así: "Si una línea recta que corta a otras dos determina ángulos del mismo lado de la secante cuya suma es menor de dos rectos entonces aquellas dos prolongadas hacia este lado se encuentran".

Desde el mismo momento en que la obra de Euclides fue conocida y estudiada, el V Postulado produjo una gran inquietud, ya que no era tan evidente como los anteriores. Unos estimaban que la evidencia del mismo era suficiente, por lo que no era preciso demostrarlo, mientras que otros consideraban que el sistema geométrico de Euclides no estaría completo hasta que no se hubiera alcanzado su demostración a partir de los axiomas y postulados que le precedían. El problema así planteado se conoce con el nombre de "problema del postulado de las paralelas o problema del V Postulado".

3 Los "demostradores"

La mayoría de las "demostraciones" del V Postulado que se dieron desde la época de Euclides hasta el primer tercio del siglo XVIII se basaban en la definición de recta paralela a una dada entendida como recta equidistante a la misma, que no figuraba en los *Elementos*, o en el establecimiento de postulados aparentemente más sencillos que el formulado por Euclides; pero que, en el fondo, eran equivalentes a éste.

Así Posidonio (s. II a.n.e.) creyó que mejorando la definición de paralelismo podría probar el V Postulado. Llamó "paralelas" a dos rectas equidistantes y coplanarias. Ptolomeo (s. II) intentó demostrar la proposición XXIX sin utilizar el postulado de Euclides y deducir seguidamente éste a partir de aquélla. Proclo (410-485) "demostró" el V Postulado partiendo del supuesto según el cual "la distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas" y deduciendo que "una recta que corta a una de dos rectas paralelas también corta a la otra". O sea, tomando como hipótesis que "la distancia entre dos rectas paralelas se mantiene finita" demostró el postulado de Euclides.

A la caída del Imperio Romano los árabes fueron los depositarios de los conocimientos matemáticos de los griegos. Aunque no aportaron grandes novedades a las formas de enfocar la solución del problema, se mostraron muy interesados por el mismo. La figura más interesante de este periodo fue el astrónomo y matemático persa Nasir al-Din o Al-Tusi (1201-1274). Introdujo un trapecio isósceles, llegando a demostrar que los ángulos interiores superiores del mismo eran rectos, lo que le indujo a pensar que había demostrado el V Postulado.

Fue a través de la traducción de la versión árabe de los *Elementos* como el conocimiento de la geometría de Euclides llegó a Occidente. El problema del postulado de las paralelas alcanzó una difusión simultánea a la de la propia geometría. Es posible que Levi ben Gerson (principios del siglo XIV) fuera el primer comentarista europeo que examinó el problema. La divulgación del mismo se vio potenciada con la invención de la imprenta (siglo XV).

Durante el Renacimiento el problema siguió teniendo un enfoque inadecuado. F. Commandino (1509-1575) complementó la definición euclídea de paralelismo con el concepto de equidistancia y repitió la demostración de Proclo. El jesuita C. Clavio (1537-1612) "demostró" el V Postulado basándose en el supuesto según el cual "la línea equidistante de una recta es una recta". P. A. Cataldi (?-1626) tomó como hipótesis de partida el hecho que "rectas no equidistantes son convergentes en una región, y en la otra divergentes". Giordano Vitale (1633-1711) también utilizó el concepto de equidistancia para definir el concepto de paralelismo entre dos rectas.

La aportación debida a John Wallis (1616-1703) presentó ciertas connotaciones originales, ya que abandonó el concepto de equidistancia. "Demostró" el V Postulado basándose en la hipótesis de considerar que "de toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria", que, aunque no sea más evidente que el propio postulado, le permitió percatarse de que el V Postulado junto con las definiciones, axiomas y postulados que le preceden, constituye la condición necesaria para la existencia de figuras semejantes.

En 1795 J. Playfair (1748-1819) formuló el postulado de Euclides en los siguientes términos: "Si un punto P no pertenece a una recta dada r entonces existe una y sólo una recta que pasando por P es paralela a r".

4 Los precursores

En el siglo XVIII el jesuita italiano Girolamo Saccheri (1667-1733), profesor de la Universidad de Pavía, dio un nuevo enfoque a la solución del problema del V Postulado en su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus* ("Euclides exonerado de toda culpa") (1733), que significó un hito en la historia de los intentos para resolverlo. Saccheri era un profesor brillante y un hombre dotado de una gran memoria. Se dice que era capaz de jugar simultáneamente tres partidas de ajedrez sin mirar a los tableros. Antes de llegar a Pavía para ocupar en 1697 la cátedra de matemáticas de su Universidad, había enseñado filosofía durante tres años en Turín, en donde publicó la *Logica demonstrativa* (1697), obra que trataba sobre la compatibilidad de las definiciones y los postulados. Procedió por *reductio ad absurdum*. Así, consideró como ciertas las veintiocho primeras proposiciones de Euclides y tomó como tesis contraria la falsedad del V Postulado, a partir de la cual esperaba llegar a una contradicción, con lo que quedaría probado que el anti-V Postulado es falso y que, por lo tanto, el postulado de Euclides es verdadero.

En su argumentación admitió implícitamente que la recta es infinita y utilizó el postulado de Arquímedes o de la continuidad de la recta. Empleó como figura fundamental el trapecio isósceles que ya había introducido Nasir al-Din. Se trata en realidad de un cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y perpendiculares a la base, es decir, de un cuadrilátero ABCD cuyos ángulos A y B son rectos y cuyos lados AD y BC son iguales. Dedujo las propiedades de esta figura a partir del siguiente lema: "Sea un cuadrilátero ABCD con los ángulos consecutivos A, B rectos. Si los lados AD y BC son también iguales, el ángulo C es igual al ángulo D. Si los lados AD y BC son desiguales, de los dos ángulos C y D es mayor el adyacente al lado menor y recíprocamente". En virtud de la naturaleza de los ángulos C y D estableció tres hipótesis: a) hipótesis del ángulo recto, b) hipótesis del ángulo obtuso, y c) hipótesis del ángulo agudo (Fig. 1). Observó que la hipótesis del ángulo recto era equivalente al V Postulado y, por lo tanto, permitía desarrollar el sistema geométrico propuesto por Euclides. La hipótesis del ángulo obtuso le

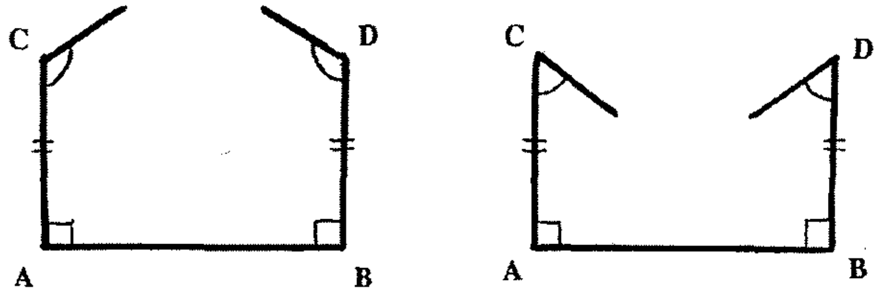


Figura1

condujo a la contradicción que supone negar la naturaleza de la línea recta como línea abierta de longitud infinita. Finalmente, desarrollando la hipótesis del ángulo agudo obtuvo resultados que consideró un tanto "extraños", entre los que figuraba el siguiente: "dos rectas paralelas o bien tienen una única perpendicular en común, a ambos lados de la cual estas se alejan indefinidamente una de la otra o bien no poseen ninguna, en cuyo caso convergen asintóticamente en un sentido y divergen indefinidamente en el otro".

En realidad Saccheri estaba dando cuerpo a un sistema geométrico complejo; pero su afán en reconocer absurda la hipótesis del ángulo agudo le llevó a fiarse más de la intuición que de la lógica, concluyendo "que la hipótesis del ángulo agudo es completamente falsa, ya que repugna a la misma naturaleza de la línea recta". A pesar de que Saccheri no llegó a percatarse de que la hipótesis del ángulo agudo conducía a un sistema geométrico lógicamente posible, se debe de valorar como de muy positiva su aportación, ya que la misma abrió caminos más atrevidos y creativos que dieron origen al surgimiento de nuevas e interesantes ideas.

El matemático suizo-alemán Johann Heinrich Lambert (1728-1777), que fue condiscípulo de Euler y Lagrange en la Academia de Ciencias de Berlín, intentó resolver el problema del V postulado siguiendo el esquema propuesto por Saccheri en la tercera parte de su obra *Theorie der Parallellinien* (escrita en 1766; publicada en 1786). Utilizó como figura fundamental el cuadrilátero trirrectángulo. Según la naturaleza del cuarto ángulo estableció las hipótesis del ángulo recto, del ángulo obtuso, y del ángulo agudo. *La primera hipótesis le llevó fácilmente al sistema* euclídeo. Mediante un razonamiento que se apoya en el postulado de Arquímedes alcanzó rápidamente una contradicción que puso de manifiesto la falsedad de la hipótesis del ángulo obtuso. A pesar de que intentó llegar a una contradicción que le permitiera negar la hipótesis del ángulo agudo no fue capaz de encontrarla, por lo que no proclamó que hubiera demostrado el V Postulado. Fue perfectamente consciente de la situación a la que había llegado cuando escribió que: "Las demostraciones del postulado euclidiano pueden ser llevadas tan lejos que, a primera vista, sólo queda un detalle insignificante. Pero al hacer un análisis escrupuloso, resulta que en esta insignificancia aparente reside, precisamente, la esencia del problema; comúnmente ésta contiene la proposición a demostrar, o bien un postulado equivalente a ella"

Adrien Marie Legendre (1752-1833) siguió en sus razonamientos un esquema parecido al empleado por Saccheri y Lambert. A pesar de que quizás fuera la persona que mayor tiempo dedicó a intentar demostrar el V Postulado, no aportó nuevos resultados. Sin embargo, la forma elegante y sencilla que dio a la exposición de sus investigaciones hizo que éstas alcanzaran una gran difusión, con lo que el interés por el problema se fue acrecentando.

A pesar de que las contribuciones de Saccheri y Lambert no permitieron probar la indemostrabilidad del postulado de las paralelas, a finales del siglo XVIII empezó a considerarse seriamente la idea de que había que admitirlo sin demostración. La profundización en el estudio del problema siguiendo el esquema empleado por Saccheri y Lambert, y divulgado por Legendre, sin la preocupación de descubrir contradicciones constituyó el eslabón que permitió descubrir las geometrías no euclídeas.

Antes de seguir conviene dejar constancia de algunos de los resultados a que llegaron Saccheri y Lambert y que encontraron acomodo, más tarde, en un nuevo cuerpo de doctrina geométrico:

"Las tres hipótesis son estables. Es decir, si son ciertas para un trapecio, también lo son para cualquier trapecio" (Saccheri y Lambert).

"Por un punto no perteneciente a una recta dada se pueden trazar infinitas rectas no secantes a aquella" (Saccheri).

"Entre todas las rectas no secantes a una dada que pasan por un punto, existen dos rectas límite que se aproximan indefinidamente a la recta dada, una a la derecha y la otra a la izquierda" (Saccheri).

"La suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos" (Lambert).

"El área de un triángulo es proporcional a su defecto o diferencia entre dos rectos y la suma de los ángulos del triángulo" (Lambert).

"Si la longitud de los tres lados de un triángulo tiende a infinito, el área del mismo sigue siendo finita" (Lambert).

....

5 Los descubridores

A pesar de casi 2.000 años de fracasos en los intentos de demostrar el V Postulado, no decayó el interés por el tema. Mientras muchos geómetras a principios del siglo XIX estaban dispuestos a acatar la hipótesis euclídea, otros prosiguieron sus investigaciones, lo que hizo posible el descubrimiento de nuevos sistemas geométricos.

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) fue el primero en enfocar el problema de forma correcta. Refutó la creencia bimilenaria sobre la plausibilidad de demostrar el postulado de las paralelas. A partir de 1792, con sólo 15 años, intentó resolver el problema utilizando el método seguido por Saccheri, es decir, por *reductio ad absurdum*. Observó que era posible demostrar rigurosamente que la hipótesis del ángulo obtuso conducía a una contradicción; pero llegó a la conclusión de que tal eventualidad no podía presentarse en el caso de la hipótesis del ángulo agudo, lo que le indujo a pensar en la existencia de otra geometría distinta a la de Euclides que, desde el punto de vista de la lógica, no contenía en sí misma ninguna contradicción. Posteriormente, en una segunda aproximación al tema, desarrolló los teoremas fundamentales de la nueva geometría, a la que primero, en 1813, llamó "antieuclídea", más tarde "geometría astral" y, finalmente, "no euclídea".

Gauss no publicó los resultados de sus investigaciones en este tema. Los mismos han podido conocerse por figurar entre sus papeles y borradores, a los que sólo se tuvo acceso después de su muerte. También se ha tenido noticia de sus hallazgos a través de la extensa correspondencia que mantuvo a lo largo de su vida con algunos de sus coetáneos como Wolfgang Bolyai, Franz A. Taurinus (1794-1874), ... ¿Cómo se explica que Gauss no se atreviera a hacer público su descubrimiento?. Viene siendo comúnmente aceptado que a partir del Renacimiento Dios fue ocupando una posición cada vez más secundaria en las exposiciones matemáticas de las teorías científicas. Las leyes matemáticas se fueron convirtiendo en el centro de atención. Durante el siglo XVIII a un mayor avance de las matemáticas le correspondía un retroceso de la inspiración religiosa en el trabajo matemático, haciéndose cada vez más débil la presencia divina. Joseph Louis Lagrange (1736-1813) y Pierre Simon Laplace (1749-1829) eran agnósticos. Laplace rechazaba de forma absoluta cualquier creencia en Dios como matemático y arquitecto del universo. A pesar de que creía en un Dios eterno, omnisciente y omnipresente, Gauss consideraba que las ideas acerca de Dios nada tenían que ver con las matemáticas o con la búsqueda de las leyes matemáticas de la naturaleza. La Naturaleza reemplaza a Dios. "Tú, Naturaleza, eres mi diosa; mis servicios se limitan a tus leyes", exclamó Gauss.

Simultáneamente, a lo largo del siglo XVIII, los filósofos se plantearon la cuestión de por qué las leyes matemáticas de la naturaleza tenían que ser necesariamente verdades. David Hume (1711-1776) mantenía que no podemos conocer ni la mente ni la materia, ambas cosas son ficciones. Solo percibimos sensaciones. ¿Quién nos garantiza que existe un mundo permanente de objetos sólidos?. Todo lo que conocemos son nuestras propias sensaciones de ese mundo. Ni el espacio ni el tiempo ni la causualidad son realidades objetivas. La fuerza y firmeza de nuestras sensaciones nos engañan haciéndonos creer en tales realidades. No puede haber leyes científicas relativas a un mundo físico objetivo y permanente. Tales leyes significan solamente síntesis de sensaciones. Según Hume el hombre no puede obtener verdades. El pensamiento de Hume anulaba tanto los resultados de la ciencia y de las matemáticas como la validez de la propia razón. No es de extrañar que la mayoría de los científicos de la época estuviera en contra de las ideas de Hume. Había que refutarlas. Immanuel Kant (1724-1804) en su obra *Crítica de la razón pura* (1781) afirmó que todos los axiomas y teoremas de la física eran verdades. ¿Por qué, se preguntaba Kant a sí mismo, estaba él dispuesto a aceptar tales verdades?. Su respuesta era que nuestras mentes poseen las formas del espacio y el tiempo. El espacio y el tiempo son modos de percepción - Kant los llamó intuiciones - en términos de los cuales la mente considera la experiencia. Puesto que la intuición del espacio tiene su origen en la mente, ésta acepta automáticamente ciertas propiedades de ese espacio. Principios tales como que "una recta es el camino más corto entre dos puntos", que "tres puntos determinan un plano", así como el postulado de las paralelas, que Kant llamaba verdades sintéticas *a priori*, forman parte de nuestro equipamiento mental. La ciencia de la geometría no hace más que explorar las consecuencias lógicas de esos principios.

Gauss pensó que sus ideas acerca de la existencia de una geometría "antieuclídea" entrarían en contradicción con las doctrinas filosóficas imperantes en la época y que las mismas podrían llegar a suscitar grandes polémicas. Es posible que por este motivo no se atreviera a hacer público el resultado de sus investigaciones en este terreno. Efectivamente, el descubrimiento de la existencia de una geometría no euclídea alcanzaba un alto significado no sólo científico, si no también filosófico en orden al llamado problema del espacio, ya que contradecía la doctrina de los filósofos idealistas que, junto con Kant, no dudaban acerca del carácter apriorístico de la geometría euclídea.

A Nikolai Ivanovich Lobachevski (1793-1856) le corresponde el mérito de haber sido el primero en dar a conocer públicamente el descubrimiento de un sistema geométrico distinto al formulado por Euclides. En una sesión de la Facultad de Física y Matemáticas de la Universidad de Kazan - una universidad alejada de los centros de producción matemática - celebrada el dia 11 de febrero de 1826, Lobachevski leyó una memoria titulada *Expositión succinte des principes de la Geómetrie avec une démonstration rigoureuse du théorème des parallèles*, en la que se exponían los principios de la nueva geometría y las ecuaciones que en la misma relacionaban los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo. Tres años más tarde, en 1829, Lobachevski publicó en la revista "El Mensajero de Kazan", considerada como el órgano oficial de la Universidad, una memoria titulada "Acerca de los principios de geometría" en la que, además de recoger los resultados presentados en la *Expositión succinte .....* , dio a conocer una nueva presentación rigurosa de toda la teoría de las paralelas. En esa época, nadie comprendió en Rusia ni la memoria ni las obras ulteriores de Lobachevski. Por el contrario, dichos trabajos fueron objeto de violentas críticas, entre las que hay que destacar las formuladas por M. Ostrogradski (1801-1862), el matemático ruso de mayor prestigio en su tiempo.

A lo largo de la historia algunos de los comentadores de Euclides se plantearon la tarea de demostrar el postulado de las paralelas como el objetivo principal de su vida, consagrándole muchos años de trabajo. Hubo quien llegó a caer en un agnosticismo místico y otros incluso perdieron la razón. Así se explica el apasionado escrito que dirigió el matemático húngaro Wolfgang Bolyai, amigo de Gauss, a su hijo Janos Bolyai (1802-1860), que desempeñaba el cargo de oficial del ejército austrohúngaro destinado en Transilvania, al enterarse de que éste estaba intentando demostrar el V Postulado, en el que le decía:

> Te suplico, no trates de intentar conseguir la demostración de la teoría de las paralelas. Perderás en ello todo tu tiempo y, con todo lo que tu eres, no llegarás a demostrar esa proposición. No busques la razón de esa teoría ni por el procedimiento que me comunicas, ni por ningún otro. He explorado a fondo todas las vías posibles: no he dejado ni una sola sin estudiar. He atravesado esa noche negra y en ella he enterrado todos los goces de la vida. Por el amor de Dios, te lo suplico, abandona ese tema, témale tanto como a las pasiones, porque puede sustraerte todo tu tiempo, tu salud, tu tranquilidad, toda la felicidad de tu vida, ...

Es posible que en 1820 J. Bolyai ya supiera que era imposible demostrar el V Postulado y que empezara a considerar la posibilidad de la existencia de un sistema geométrico al margen del mismo. En 1823 envió a su padre un manuscrito titulado *Appendix Scientiam Spatii Absolute Veram Exhibens* ("La ciencia del espacio absoluto") en el que desarrollaba un sistema geométrico distinto al de Euclides, asegurándole que en el mismo había "descubrimientos tan maravillosos que estoy totalmente asombrado". Este trabajo no fue publicado hasta 1832 como un apéndice del tratado escrito por su padre Wolfgang titulado *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos Purae Introducendi.*

Gauss conoció el trabajo de J. Bolyai el mismo año de ser publicado y tuvo noticia del descubrimiento de Lobachevski en 1840 a través de un folleto publicado por éste en Berlín titulado *Geometrisch e Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* ("Investigaciones geométricas de la teoría de las paralelas"), en el que sólo se contemplaban los principios de la nueva geometría expuestos, por otra parte, de tal forma que una persona suficientemente versada en matemáticas y decidida a realizar cierto esfuerzo pudiera asimilar sus ideas. A pesar de ello, Gauss silenció los resultados que ambos habían obtenido. Aunque no le comunicó a Bolyai la existencia del trabajo de Lobachevski, parece ser que aquél tuvo conocimiento de la existencia del mismo en 1848; pero Lobachevski no llegó a saber nunca que su geometría tenía un co-descubridor.

Tanto Lobachevski como Bolyai siguieron en sus razonamientos el método propuesto por Saccheri. Así, Lobachevski después de asumir las definiciones, axiomas y postulados que constituyen las 27 primeras proposiciones euclídeas, tomó como tesis contraria la hipótesis de que "por un punto exterior a una recta se pueden trazar no una si no al menos dos rectas paraleas a la dada"; pero a partir de ella no detectó ninguna contradicción, con lo que concluyó, en primer lugar que el V Postulado no se puede demostrar y, en segundo lugar, que sustituyendo el postulado de las paralelas por una hipótesis contraria se puede desarrollar una nueva geometría lógicamente posible a la que llamó "imaginaria".

Bolyai después de constatar que el postulado de las paralelas era indemostrable, estableció una teoría absoluta del espacio aplicando el método deductivo aunque sin decidir "a priori" sobre la falsedad o la certeza del V Postulado.

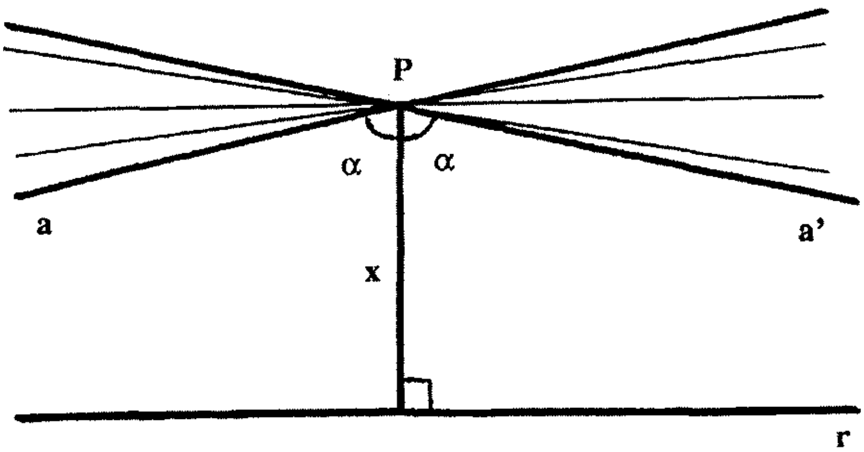
Mientras que Lobachevski dio un mayor desarrollo a la geometría imaginaria, especialmente desde el punto de vista analítico, Bolyai trató en profundidad la cuestión de la dependencia o no de las proposiciones geométricas con respecto al postulado de Euclides. Es decir, el primero aspiró, principalmente, a construir un sistema geométrico basado en la negación del postulado en cuestión y el segundo puso el acento en las proposiciones y construcciones que en la geometría de Euclides no dependen del V Postulado, a las que denominó absolutamente verdaderas.

Al aceptar el postulado de Lobachevski se llega necesariamente a la siguiente proposición: "cualesquiera que sean dados una recta y un punto que no le pertenece, por este punto pasa un conjunto infinito de rectas que no cortan la recta dada". A diferencia de la definición de Euclides, de acuerdo con Lobachevski son paralelas a una recta dada sólo algunas rectas particulares de aquellas que no tienen puntos comunes con la dada. Según Lobachevski, "la recta a' se dice paralela a la recta r, si en el conjunto de las rectas que pasan por algún punto de a' y no cortan a la recta r, la recta a' resulta ser frontera". Se demuestra que por cada punto del plano pasa exactamente una recta paralela a otra dada en una dirección determinada, a "derecha" y a "izquierda". En el caso de que dos rectas no se corten ni sean paralelas entonces se llaman divergentes. Así, en la geometría de Lobachevski "por cada punto del plano pasan dos rectas paralelas a una recta dada, y un número infinito de rectas divergentes con ella".

Uno de los conceptos más interesantes que se encuentran en la geometría de Lobachevski es el de ángulo de paralelismo. Sean una recta r y un punto no perteneciente a ella P. Las dos rectas paralelas a la recta r trazadas por P determinan ángulos iguales con la perpendicular bajada desde el punto P a la recta r. El ángulo agudo que determina cualquiera de las dos rectas paralelas a r con dicha perpendicular recibe el nombre de "ángulo de paralelismo en el punto P respecto a la recta r".

Se demuestra que "el ángulo de paralelismo α queda totalmente determinado por la distancia del punto P a la recta r". Es decir, el ángulo α es función de la distancia x, $\alpha = \Pi(x)$. Esta función tiene una importancia fundamental en la geometría de Lobachevski. Sus propiedades fundamentales son: a) está definida para todo x positivo; b) es monótona decreciente y continua; c) toma todos los valores comprendidos entre 0 y $\pi/2$; y d) $\Pi(x) \to \pi/2$ cuando $x \to 0$, y $\Pi(x) \to 0$ cuando $x \to \infty$. Del primer aserto se desprende que en regiones pequeñas del espacio la geometría de Lobachevski difiere muy poco de la euclídea, ya que para valores de x muy pequeños el ángulo de paralelismo se aproxima a un ángulo recto (Fig. 2).

La dependencia entre las magnitudes lineales y las angulares, establecida por la función $\alpha = \Pi(x)$, confiere un carácter muy peculiar a la geometría de Lobachevski. Así, por ejemplo, en esta geometría no existe la semejanza entre figuras. Esto es fácil de preveer: como las magnitudes lineales y las angulares están relacionadas por



$\alpha = \Pi\,(x)$

Figura 2

ecuaciones, entonces, si se dan los ángulos de un triángulo quedarán determinados sus lados, y triángulos con ángulos respectivamente iguales resultarán iguales entre sí. Siguiendo este camino Lobachevski dedujo fórmulas (trigonometría hiperbólica) que expresan los lados de un triángulo en función de sus ángulos.

Otra de las peculiaridades de la geometría de Lobachevski consiste en que en la misma existen tres clases distintas de circunferencias: a) los "ciclos" o circunferencias propiamente dichas, con centro real y con eje ideal; b) los "oriciclos", con centro y eje ideal; y c) las "curvas equidistantes" o "hiperciclos" o curvas determinadas por el lugar geométrico de los puntos situados a un mismo lado de una recta a distancias iguales de ella.

6 La difusión de las geometrías no euclídeas. La geometría de Riemann

El hecho de que el nuevo sistema geométrico fuera descubierto por dos personajes que podríamos calificar como de marginales en el seno de la comunidad matemática internacional explica que sus trabajos no tuvieran, en un principio, ninguna repercusión. Recordemos que Lobachevski dio a conocer su geometría imaginaria en una boletín de su Universidad y que las ideas de Bolyai estaban contenidas en un apéndice de un tratado de matemáticas destinado a los estudiantes escrito por su padre.

A pesar de que Lobachevski, como ya se ha indicado, intentó divulgar su descubrimiento mediante un folleto que publicó en alemán en 1840, lo cierto es que muy pocos matemáticos de la época llegaron a sentirse interesados por sus ideas.

Fue a partir de 1854, año en el que Bernhard Riemann (1826-1866) dio a conocer -en presencia de Gauss que formaba parte del tribunal que debía concederle la habilitación en la Universidad de Gotinga- un nuevo sistema geométrico a través de su disertación "Sobre las hipótesis que sirven de base a la geometría", cuando empezó a despertarse el interés hacia las geometrías no euclídeas.

Para establecer su geometría Riemann partió de la hipótesis del ángulo obtuso, complementándola con la idea de que el espacio fuera ilimitado, más que infinito. Puede resultar de interés hacer referencia a la forma como distinguía Riemann tales conceptos. "Aquella -la ilimitación- es propia de las relaciones de extensión, ésta -la infinitud- lo es de las relaciones métricas", afirmaba. Aclarando que "la ilimitación del espacio posee una evidencia empírica superior a cualquier otra experiencia referida al mundo exterior. Pero de aquí en modo alguno puede deducirse la infinitud; antes bien el espacio sería, si se ..... le atribuyese una medida de curvatura, necesariamente infinito ..... ". En la geometría elíptica, que es como llamó Riemann a su sistema geométrico para ditinguirlo de la geometría hiperbólica o de Lobachevski-Bolyai y de la geometría parabólica o de Euclides, se tiene que:

"La recta es ilimitada aunque no infinita en longitud".

"No hay rectas paralelas".

"Todas las rectas tienen la misma longitud finita".

"Cada dos rectas se cortan en dos puntos".

"Todas las rectas perpendiculares a otra se cortan en un punto".

"La suma de los ángulos de un triángulo es mayor que 180° pero disminuye y se aproxima a 180° cuando el área del triángulo tiende a cero".

"Dos triángulos semejantes son necesariamente congruentes".

....

La verdadera difusión de las geometrías no euclídeas no se produjo hasta 1866, es decir bastantes años después de la muerte de algunos de sus descubridores. Kagan considera que algo tuvo que ver en este asunto la publicación, en 1863, del quinto tomo de la correspondencia mantenida por Gauss con el astrónomo danés H. C. Schumacher (1780-1850) en donde aquél vierte valoraciones muy positivas acerca del trabajo de Lobachevski. Puede decirse que la publicación en 1866 de la traducción francesa de las "Investigaciones geométricas ...." de Lobachevski realizada por Guillaume Jules Hoüel (1823-1886), un profesor de matemáticas de la Universidad de Burdeos, contribuyó eficazmente en dar a conocer la validez y la importancia de la obra de Lobachevski. En 1867 Hoüel publicó el folleto titulado "Ensayo crítico de los principios de la geometría", donde expuso con detalle las ideas esenciales de la nueva teoría. Otros divulgadores de la geometría de Lobachevski fueron el alemán Richard Baltzer y el italiano G. Battaglini (1826-1894). El primero analizó los trabajos de Legendre y explicó brevemente la esencia de las ideas de Lobachevski, indicando la bibliografía correspondiente, en la segunda edición de sus "Elementos de matemáticas" publicado en 1867. El segundo tradujo en 1867 la "Pangeometria" e incluso dio a conocer una deducción original de la trigonometría no euclídea.

La memoria póstuma de Riemann basada en su disertación de 1854 en la que estableció su nuevo sistema geométrico no fue publicada hasta 1867 por R. Dedekind (1831-1916).

Según J. L. Richards, a partir de la década de los 60 de la pasada centuria B. Riemann y H. von Helmholtz (1821-1894) introdujeron una nueva forma de estudiar e investigar las geometrías no euclídeas. Con este enfoque dio comienzo la que B. Russell ha denominado "etapa métrica" al referirse a las investigaciones que tuvieron lugar durante el siglo XIX sobre los fundamentos de la geometría. Por primera vez los matemáticos trataron de acercarse a la geometría en forma distinta a la de Euclides. Con la difusión de los descubrimientos de Gauss, Lobachevski y Bolyai, que también tuvo lugar durante dicha década, se retomó la investigación "sintética" o "proyectiva" de las geometrías no euclídeas. En las décadas siguientes del siglo no se siguió ni la línea sintética ni la métrica, sino que las investigaciones se orientaron a examinar la posibilidad de definir una métrica en un espacio proyectivo. A. Cayley (1821-1895) fue el primero, en 1859, que intentó "generar" un "espacio euclídeo" a partir de un "espacio proyectivo". Entre 1871 y 1873 F. Klein (1849-1925) demostró que el método de Cayley podía generalizarse para generar, a partir del espacio proyectivo, tanto espacios euclídeos como "espacios no euclídeos". En un principio, esta nueva forma de enfocar tales estudios tuvo una mayor acogida que la vía "diferencial" propuesta por Riemann. En 1872, con el denominado "programa de Erlangen", Klein, apoyándose en la teoría de grupos, estableció cada geometría como la teoría de los invariantes correspondiente a un grupo particular de transformaciones.

La difusión tardía, aunque muy rápida, de las ideas de Lobachevski, entre 1866 y 1872, no es más que uno de los episodios relativos a un periodo decisivo en la historia de las matemáticas, el que viene marcado por el florecimiento de una diversidad de nuevas ideas que condujeron a una renovación del conjunto del edificio de las matemáticas, es decir, a un cambio de paradigma.

La recepción de las geometrías no euclídeas en España

Hasta el momento se llevan localizadas, entre 1874 y 1910, más de noventa citas, alusiones o textos debidos a autores españoles que, de una forma u otra, están relacionados con las geometrías no euclídeas. Dichas aportaciones se pueden agrupar en cuatro secciones: "miscelánea", "fundamentos de geometría', "filosofía e historia" y "aportaciones originales". El 48 % de las contribuciones pertenecen a la primera de dichas secciones, en la que se recogen notas breves, noticias, referencias, citas bibliográficas y biográficas, ... Le sigue en importancia cuantitativa, con el 30 %, la parte denominada "fundamentos de geometría", constituida por aquellos textos de cierta extensión en los que se describen y se examinan, desde el punto de vista doctrinal, los conceptos y resultados principales relacionados con las geometrías no euclídeas. Se debe advertir, sin embargo, que estos escritos tienen un carácter divulgativo y que, en ningún caso, puede hablarse de contribuciones originales. La sección dedicada a "filosofía e historia" está constituída, en su mayor parte, por artículos de carácter biográfico en los que se glosa la vida y las actividades llevadas a cabo por los creadores de dichas geometrías. En este apartado, que contiene el 18 % de todas las aportaciones, también están incluidos aquellos párrafos o secciones de algunos libros de texto que contemplan las geometrías no euclídeas desde el punto de vista epistemológico. Finalmente, se encuentran las contribuciones originales, que suponen, solamente, el 4% del total.

Al contabilizar las contribuciones por autores, se observa que el más prolífico de todos ellos fue Zoel García de Galdeano (1846-1924), con el 30 %. Le sigue Ventura Reyes y Prósper (1863- 1922) con el 16 %, mientras que el 26 % de las aportaciones se debe a diferentes autores. La mayoría de los sueltos recogidos en la sección denominada "miscelánea", aunque vienen sin firma, deben atribuirse, en la mayoría de los casos, a los directores de las revistas matemáticas españolas existentes durante los años del cambio de siglo, quienes los incluían en sus publicaciones. Es decir, a Zoel García de Galdeano (*El Progreso Matemático*), Luis G. Gascó (*El Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas*), José Rius y Casas (*Revista Trimestral* *de Matemáticas*), Angel Bozal (*Gaceta de Matemáticas Elementales-Gaceta de Matemáticas*), ...

Los escritos de García de Galdeano son variados, tanto en extensión como en contenidos. Puede decirse que responden a las inquietudes manifestadas por el autor a lo largo de toda su obra, que ha sido estudiada casi exhaustivamente por M. Hormigón.

Aproximadamente la mitad de las contribuciones de Reyes y Prósper están recogidas en la *Bibliography of Non-Euclidean Geometry*, de Sommerville. Se trata de las escasas aportaciones originales realizadas por los matemáticos españoles al tema y fueron publicadas en diferentes revistas internacionales. En la prestigiosa *Matematische Annalen*, publicó, cuando tenía 24 o 25 años, dos breves notas en francés que, en sentido estricto, no pertenecen al cuerpo de doctrina de las geometrías no euclídeas propiamente dichas, sino más bien a la denominada geometría descriptiva en el sentido de Pasch y Whitehead, que Coxeter define como "being high school geometry with congruence and parallelism left out". Los artículos que publicó en las revistas matemáticas españolas tratan de cuestiones de tipo histórico, filosófico, biográfico, bibliográfico, ... La importancia de las aportaciones originales de Reyes y Prósper, desde el punto de vista de la historia de las matemáticas en España, fue cuestionada por J. Rey Pastor. En su discurso de contestación al de ingreso en la Academia de Ciencias de R. San Juan, Rey Pastor se refería a Reyes y Prósper en estos términos: "La generosa exhuberancia hispánica, disculpable por la patriótica sed que todos sufrimos de compatriotas famosos, se apresurará a calificar de genio a este matemático precursor, calificativo que haría sonreir a cualquier profesor ultrapirenaico al medir fríamente el valor absoluto de las ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano". Poco se podía imaginar Rey Pastor que tales "notas elementales" siguen siendo vigentes en nuestros días al ser citadas por autores como Coxeter y Millman & Parker (1982, p. 226).

Los restantes autores españoles a los que, de una u otra forma, se les pueden contabilizar aportaciones al tema hasta la fecha de publicación del libro de Sommerville (1911) son, por orden alfabético: J. M. Bartrina y Capella, A. Bozal, J. Castro Pulido, L. Clariana, J. Doménech y Estapá, J. J. Durán y Lóriga, V. Fabra, E. Jiménez, C. Jiménez Rueda, S. Moliné, R. Martínez Campos, M. Ortega y Sala, S. Mundi y Giró, J. A. Pérez del Pulgar, A. Ruiz Tapiador, G. Silván, A. Thibinger y M. Vegas. En dicho colectivo se pueden identificar a profesionales de la enseñanza, en su condición de catedráticos de Universidad o de Institutos de Segunda Enseñanza, (Bartrina, Bozal, Castro, Clariana, Doménech, Jiménez, Jiménez Rueda, Mundi, Ruiz Tapiador, Silván, y Vegas); a religiosos (el jesuita Pérez del Pulgar y el marianista Thibinger) o a militares (Ortega, Durán). Algunos de ellos se mostraron hostiles a las nuevas geometrías (Clariana) o no llegaron a comprender su significado (Castro, Martínez Campos, Ortega, Silván).

7 El problema de la consistencia. Modelos

A pesar de que muchos de los resultados obtenidos al desarrollar los nuevos sistemas geométricos contradecían claramente las ideas convencionales que se poseían acerca de las propiedades de las rectas, lo cierto es que resultaba imposible descubrir algún error, desde el punto de vista del rigor lógico, en los caminos seguidos para obtenerlos. Todo lo contrario, las geometrías no euclídeas se presentaban como teorías lógicamente muy elegantes.

Sin embargo, ¿quién garantizaba que dichas geometrías no condujeran a contradicciones lógicas al seguir desarrollándolas?. El propio Lobachevski comprendió perfectamente que para demostrar la independencia del V Postulado de los demás postulados geométricos, no bastaba con limitarse a exhibir un grupo de teoremas obtenidos siguiendo la hipótesis de que el postulado de las paralelas no era cierto y remitirse a la ausencia de contradicciones lógicas en ese grupo. Lobachevski estaba convencido de que era del todo imprescindible encontrar algún tipo de razonamiento que demostrara que las premisas aceptadas por él nunca conducirían a una contradicción. Es decir, que la demostración del postulado de Euclides por el método de reducción al absurdo era imposible.

En otras palabras, pretendió demostrar que su geometría era consistente o, lo que es lo mismo, que en su desarrollo no podían encontrarse contradicciones. Con este fin, después de haber obtenido las ecuaciones básicas de su geometría, dio una interpretación analítica de las mismas, con lo que, en principio, creyó haber demostrado su consistencia.

A finales del siglo XIX, cuando se fueron consolidando las ideas que permitían atribuir conceptos lo suficientemente amplios de los objetos y de los axiomas geométricos, se pudo demostrar de forma rigurosa y, a la par, extremadamente sencilla la consistencia de las geometrías no euclídeas.

La idea general de la resolución del problema vino sugerida por la nueva concepción de los axiomas geométricos. En efecto, al introducir los objetos geométricos - puntos, rectas, planos - no tiene porque hacerse alusión a la descripción de los mismos, basta únicamente con suponer la existencia de algunos objetos que se denominan con dichas palabras. Seguidamente se hace referencia al hecho de que entre tales objetos existen ciertas relaciones, sin que sea necesario hacer una descripción de las mismas, basta con suponer que poseen algunas, muy escasas, propiedades que reciben el nombre de axiomas.

Eligiendo determinados objetos cuyas relaciones satisfagan el sistema dado de axiomas, se obtiene un modelo del sistema abstracto determinado por tales axiomas. Es decir, un modelo de una geometría constituye una representación completa de su estructura. En sentido amplio, un modelo es un diccionario que nos enseña un lenguaje nuevo por medio de la traducción de los objetos a palabras o imágenes con las que estamos familiarizados. Así, la demostración de la consistencia de los sistemas geométricos no euclídeos consiste, precisamente, en la construcción de modelos euclídeos de los mismos.

El matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900) observó en 1868 que V Postulado de la geometría elíptica se verifica en la superficie de la esfera, a condición de que las "rectas elípticas" sean interpretadas como círculos máximos sobre la esfera, es decir, circulos cuyo centro coincide con el centro de la esfera y que quedan determinados por la intersección de la esfera y un plano que pasa por su centro; y de que convengamos en "identificar" los puntos diametralmente opuestos de la esfera como un objeto único, que llamaremos "punto" en la geometría riemanniana. Admitida la interpretación de una recta como circulo máximo se comprueba que la misma junto con los "pares" de puntos diametralmente opuestos de la esfera satisfacen los axiomas de la geometría de Riemann (Fig. 3).

Una vez efectuada esta comprobación, entonces la consistencia de la geometría de Riemann se establece como sigue: si hubiera teoremas contradictorios en la geometría elíptica, entonces también los habría en la geometría sobre la esfera. Ahora bien, la esfera es parte de la geometría de Euclides. Por lo tanto, si la geometría euclídea es consistente, entonces la geometría elíptica también lo es. ¿Cómo se demuestra la consistencia de la geometría euclídea?. Es una cuestión que se deja abierta recordando la célebre sentencia formulada por Hermann Weyl (1855-1955) referida a la aritmética: "Dios existe porque la aritmética es consistente, pero el diablo también existe porque no podemos *demostrar* su consistencia".

La mayoría de los modelos de geometría hiperbólica fueron establecidos entre 1868 y 1881. O sea, al cabo de más de cuarenta años del descubrimiento de dicha geometría. Se puede afirmar que los mismos contribuyeron a la difusión de la geometría de Lobachevski-Bolyai.

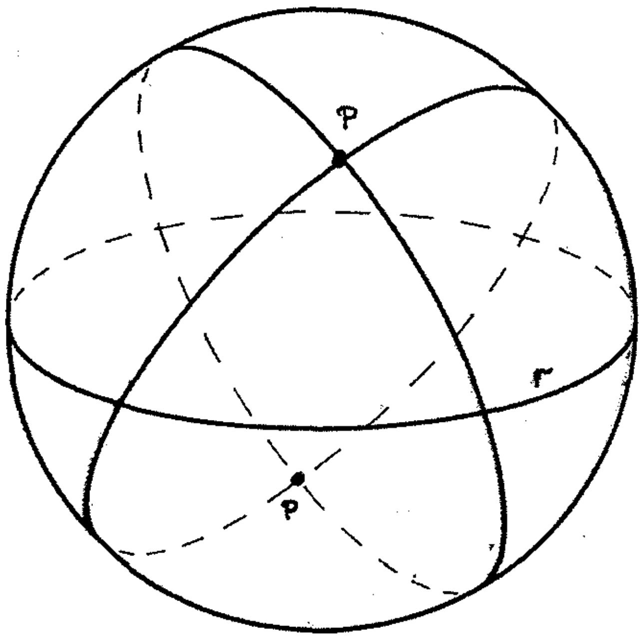


Figura 3

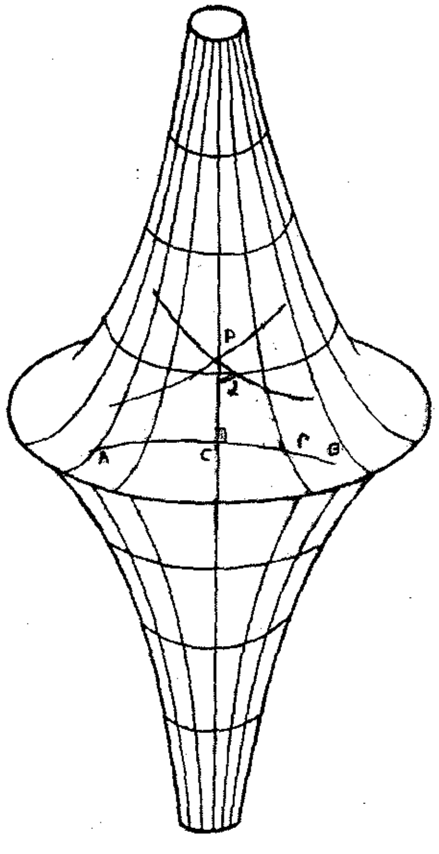


Figura 4

El primer modelo de geometría hiperbólica se debe a E. Beltrami, quien lo obtuvo en 1868 al considerar la superficie engendrada por la rotación de una curva llamada tractriz alrededor de su asíntota. La tractriz es una curva que tiene la propiedad de que la longitud de los segmentos de las rectas tangentes en cada uno de sus puntos que tienen el otro extremo en un punto de la asíntota es siempre la misma. La superficie así engendrada recibe el nombre de pseudoesfera, ya que respecto de la geometría hipérbólica desempeña el mismo papel que la esfera para la geometría elíptica. Identificando los puntos de la pseudoesfera con los "puntos hiperbólicos" y las geodésicas (curvas que determinan la mínima distancia entre dos puntos de una superficie) con las "rectas hiperbólicas" se obtiene un modelo de la geometría hiperbólica en dicha superficie, ya que en una región de la misma se verifica el postulado de Lobachevski (Fig. 4). La pseudoesfera es una superficie de curvatura constante negativa. Resulta preciso poner el acento en el hecho de que la pseudoesfera no determina un modelo completo de la geometría de Lobachevski. En 1901 David Hilbert (1862-1943) demostró que no existe en el espacio ordinario ninguna superficie de curvatura constante negativa que determine un modelo completo de la geometría hiperbólica. Por lo tanto, el modelo propuesto por Beltrami mediante la pseudoesfera no demuestra la consistencia de dicha geometría, a pesar de que desempeñó un importante papel en el proceso de difusión y divulgación de la misma.

El primer modelo del plano hiperbólico propiamente dicho fue establecido independientemente en 1871 por Beltrami y Klein, al que se conoce actualmente con el nombre de *Modelo de Beltrami-Cayley-Klein.* Se fija una circunferencia cualquiera en el plano euclídeo. Se identifican como "puntos hiperbólicos" los puntos del plano euclídeo que pertenecen al circulo limitado por dicha circunferencia, y como "rectas hiperbólicas" las cuerdas subtendidas en la circunferencia (incluyendo los diámetros) (Fig. 5). Existen algunos aspectos del modelo que pueden resultar inquietantes. ¿Qué ocurre con el segundo postulado ("toda recta contiene un segmento -finito- tan grande como se quiera")?. Esta dificultad se resuelve si se tiene en cuenta que la "distancia hiperbólica" entre dos puntos es distinta a la distancia euclídea. Aquella se define como una cantidad proporcional al logaritmo de la razón doble de los segmentos determinados por los dos puntos y los extremos de la cuerda que los contiene. Otra dificultad que presenta el modelo es que en el mismo la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°, por lo que resulta preciso establecer una nueva definición de ángulo en dicho modelo. Este último problema fue el que impulsó al matemático y físico francés Henri Poincaré (1854- 1912) a establecer dos nuevos modelos del plano de Lobachevski.

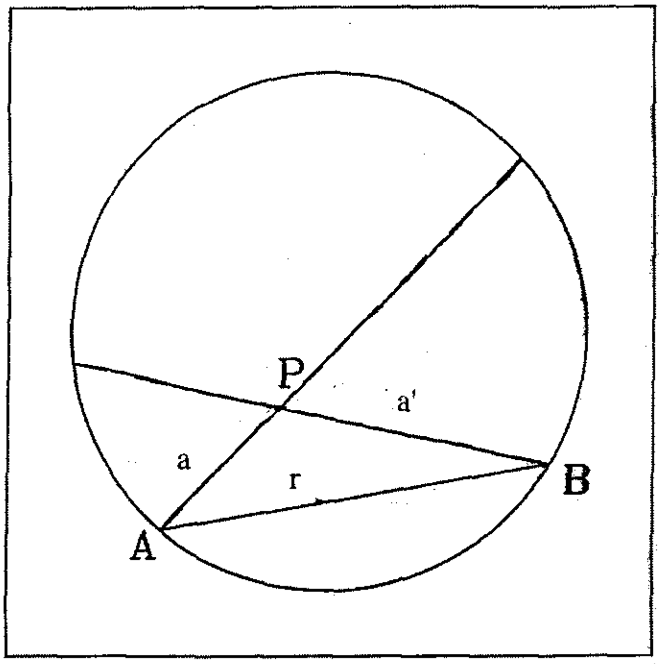


Figura 5

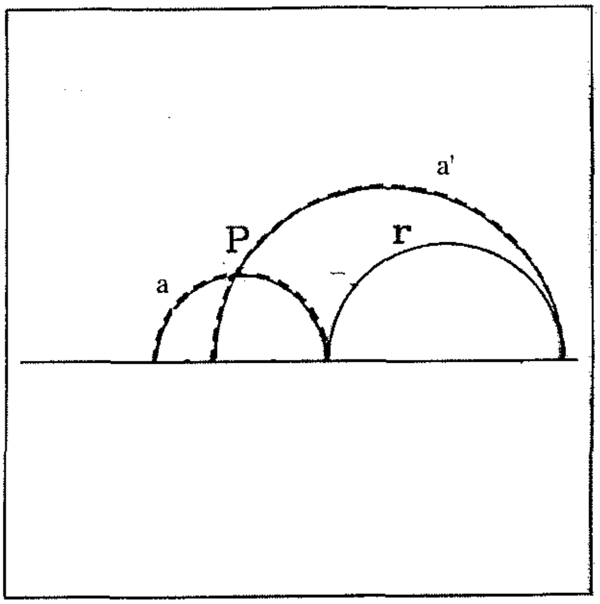


Figura 6

Modelo semiplanar de Poincaré. Sea en el plano euclídeo una recta r, que, por comodidad, se supone que ocupa la posición horizontal. La recta r divide al plano en dos semiplanos. Se identifican como "puntos hiperbólicos" a los puntos pertencientes al semiplano superior (sin incluir los puntos de la recta r), y como "rectas hiperbólicas" a las semicircunferencias contenidas en el semiplano superior que son ortogonales a la recta r (es decir, con centro en la recta r), así como a las semirrectas del semiplano superior que tienen su origen en r y son perpendiculares a ella (por convenio, se denominan semicircunferencias de radio infinitamente grande) (Fig. 6).

Después de establecer entre estos objetos determinadas relaciones de tal forma que se verifiquen los axiomas de la geometría absoluta, se comprueba que el sistema de objetos así construido verifica el axioma de las paralelas de Lobachevski. Por *lo tanto este sistema determina un modelo euclídeo de la geometría hiperbólica.* Entonces a cada teorema de la nueva geometría le corresponde un teorema euclídeo determinado. Por lo tanto si hubiera contradicciones en la geometría de Lobachevski también las habría en la euclídea. Así que, la consistencia de la geometría de Lobachevski se sigue de la consistencia de la de Euclides. Con el establecimiento del modelo también se demuestra que el postulado de las paralelas no puede ser deducido de los supuestos de la geometría absoluta. En efecto, en el modelo semiplanar se verifican todos los axiomas de la geometría absoluta, pero en lugar del postulado Euclides tiene lugar el de Lobachevski. Por consiguiente, el V Postulado no puede ser deducido de las premisas de la geometría absoluta.

Modelo circular de Poincaré. Sea una circunferencia cualquiera K en el plano euclídeo. Se identifican como "puntos hiperbólicos" a los puntos del plano euclídeo que pertenecen al circulo limitado por dicha circunferencia, y como "rectas hiperbólicas" a los arcos de circunferencias ortogonales a K (incluyendo los diámetros) contenidos en el circulo limitado por K (Fig. 7). Se pueden establecer las relaciones entre estos objetos propias a su significado euclídeo. Se observa que tales objetos junto con las relaciones definidas entre ellos satisfacen los axiomas de la geometría absoluta. Se comprueba que también se verifica el postulado de Lobachevski.

Uno de los hechos más sorprendentes que se presentan a la vista al tranformar mediante un movimiento una figura del plano hiperbólico es que en el modelo, desde el punto de vista euclídeo, parece que ambas, la figura y su transformada, tengan distinto tamaño, mientras que para un ser bidimensional cuyo "habitat" natural fuera el plano hiperbólico "vería" que las dos son iguales. Una magnífica ilustración de este hecho se encuentra en los cuadros que pintó en 1958 el holandés Maurits Escher (1898-1972) en los que tuvo como fuente de inspiración el modelo circular de Poincaré. Así, las figuras que están situadas cerca de la frontera aparecen, a nuestros ojos, como más pequeñas que las que están en las proximidades del centro. Cuando en realidad, para los habitantes de este universo lobachevskiano, ambas tienen el mismo tamaño (Fig. 8).

Como se acaba de ver, existen distintos modelos para un mismo sistema geométrico según sea la traducción que se haga de los objetos y de las relaciones establecidas entre los mismos. Los modelos son como "laboratorios" en los que se puede experimentar con los sistemas formales. Una de las ventajas que supone el poder disponer de varios modelos de un mismo sistema geométrico reside en el hecho de que se puede alcanzar un supuesto en uno de ellos y no en el otro, con lo que se ofrece un amplio abanico de posibilidades de cara a aplicar su conjunto de axiomas.

8 ¿Cuál es la geometría del espacio físico?

A primera vista, la idea de que alguna de las geometrías no euclídeas pueda competir con la geometría euclídea, e incluso suplantarla, para describir las teorías

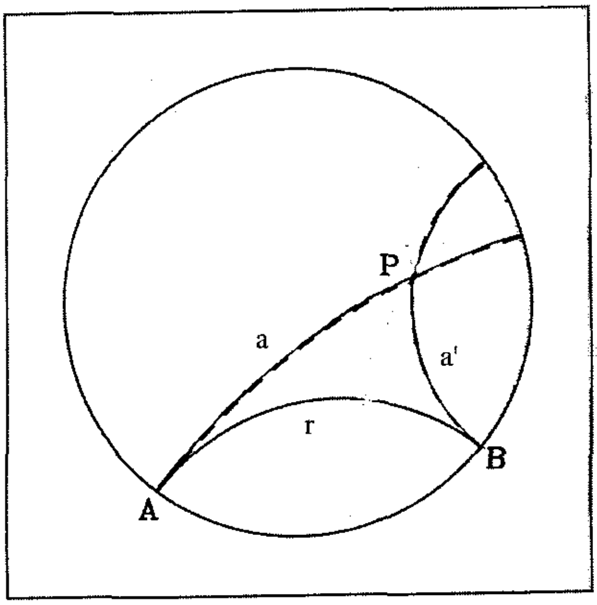


Figura 7

físicas parece absurda. Pero Gauss aceptó esta posibilidad. La creencia de que la geometría de Euclides era la geometría del espacio físico estaba tan arraigada en las mentes que durante muchos años fueron rechazadas las ideas que, como las de Gauss, le eran contrarias. Tanto el conocimiento de los borradores y notas de Gauss, que empezaron a ser accesibles después de su muerte, como la publicación en 1868 del trabajo de Riemann convencieron a los matemáticos de que una geometría no euclídea podía ser la geometría del espacio físico y de que, en adelante, ya no se podía estar seguro de cuál de las geometrías era la geometría verdadera. Los matemáticos se encontraban en la tesitura que describió Mark Twain con la siguiente frase: "El hombre es el único animal religioso. Es el único que posee la religión verdadera, e incluso varias de ellas". La idea de que la geometría euclídea no es necesariamente la geometría del Universo, sino solamente una más entre las varias posibles, es una de las más importantes contribuciones que el descubrimiento de las geometrías no euclídeas ha reportado al pensamiento humano.

Por otra parte, desde que descubrió su geometría "imaginaria", el propio Lobachevski se sintió interesado en conocer cuál era su conexión con el espacio físico. Tuvieron que pasar casi cien años para que el anhelo de Lobachevski se viera satisfecho. En

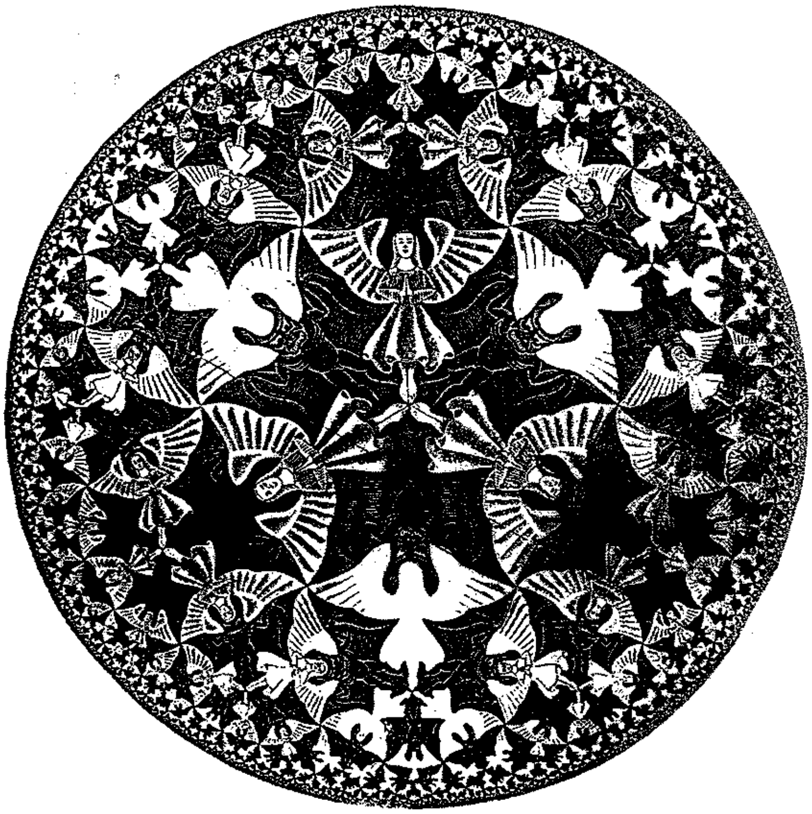


Figura 8

efecto, en la teoría de la relatividad formulada por Albert Einstein (1879-1955) las geometrías no euclídeas juegan un importante papel.

Einstein estableció la teoría de la relatividad restrigida o teoría especial de la relatividad en 1905. En 1908 Hermann Minkowski (1864-1909) desarrolló su contextualización matemática a partir de la consideración del espacio-tiempo como un espacio 4-dimensional en concordancia con la idea de los espacios (o variedades) n-dimensionales formulada por Riemann en su célebre disertación.

La teoría general de la relatividad fue dada a conocer por Einstein en 1916 y la descripción geométrica de la misma encontró su "habitat" natural en la geometría de Riemann.

No es este el momento de entrar en el análisis de estos hechos. Es posible que resulte más interesante señalar otro aspecto que quizás sea menos conocido. El mismo aparece en trabajos de Klein, Sommerfeld y Kotelnikov; pero, especialmente, en cuatro artículos publicados por V. Varicak entre 1910 y 1914 sobre las interpretaciones de la teoría de la relatividad restringida según la geometría de Lobachevski. Dichos trabajos fueron recuperados o redescubiertos posteriormente por varios autores. Los mismos se fundamentan en la explotación de la naturaleza hiperbólica del llamado espacio relativista de velocidades de la teoría de la relatividad restringida. Este espacio viene determinado por el conjunto de todos los observadores o de los sistemas de referencia inerciales a los que "están sujetos". Si el estudio se limita al caso bidimensional, entonces cada sistema de referencia inercial o galileano se representa mediante un punto del plano y su posición viene determinada por su velocidad relativa, que según la teoría de la relatividad restringida, no puede exceder a la de la velocidad de la luz, c. Así en el "mapa" (euclídeo) que cada observador traza de los demás, éstos quedan ubicados en el interior de un circulo de radio 1 (= c). Se sobreentiende que se consideran velocidades relativas a la velocidad de la luz. La identificación de esta representación con el modelo circular de Poincaré o con el de Beltrami-Cayley-Klein está servida. En consecuencia el espacio relativista de velocidades o espacio cinemático es un espacio hiperbólico, un espacio no euclídeo. Explotando este hecho se observa que adquieren una mayor transparencia y simplicidad los a veces complicados resultados relativistas cuando se presentan en el lenguaje euclídeo convencional, como, por ejemplo, la famosa ley relativista de composición de velocidades. Además, se dispone de la "artillería" matemática ya establecida por la geometría de Lobachevski, pudiendo resultar muy útil, en particular, la aplicación de la trigonometría hiperbólica.

Otra de las aplicaciones de la geometría hiperbólica se encuentra en la utilización de los modelos para estudiar algunos problemas relacionados con la ingeniería eléctrica. El desarrollo considerable en ingeniería de comunicaciones de los circuitos de microondas condujo al estudio intensivo de los mismos. Los antecedentes de esta aplicación se remontan a trabajos de autores holandeses y alemanes publicados hacia 1946. El arranque principal se halla en los trabajos de G. A. Deschamps realizados en los laboratorios de la ITT en los primeros años de la década de los cincuenta. E. F. Bolinder, durante la misma década también realizó importantes contribuciones a la resolución gráfica de los problemas de los circuitos de microondas mediante la utilización de tales modelos. En este caso se trata del hecho de que en condiciones apropiadas los circuitos de microondas se pueden analizar en términos de *propagación de ondas de voltaje y de corriente como líneas de transmisión* apareciendo, como magnitudes esenciales de las mismas, los conceptos de impedancia (relativa) y de coeficiente de reflexión en cada punto de la línea. El hecho de que el módulo del coeficiente de reflexión sea menor o igual que la unidad indujo a identificar el espacio de los coeficientes de reflexión con el modelo circular de Poincaré o con el modelo de Beltrami-Cayley-Klein. Posteriormente otros investigadores se interesaron por esta fascinante interpretación de los fenómenos y de las medidas en las líneas de transmisión convencionales, entre ellos L. J. Kaplan y D. J. R. Stock, quienes publicaron en los primeros años de la década de los 60 algunos artículos sobre la representación geométrica no euclídea de los circuitos de microondas.

Si teorías tan distintas aparentemente como la teoría de la relatividad restringida de Einstein y la teoría de circuitos de microondas tienen una estructura interna que encuentra su descripción más idónea en una geometría distinta de la euclídea, es de esperar que lo mismo suceda al tratar de formular otros sistemas físicos. Baste con indicar algunos de ellos: las distintas representaciones geométricas utilizadas para describir la polarización de ondas electromagnéticas planas, el análisis de la cinemática clásica de Newton en el plano galileano, la identificación del espacio visual como un espacio hiperbólico de Luneburg, la equivalencia del proceso de obtención de un diagrama de Laue de un cristal mediante Rayos X o difracción de electrones con una homotecia en el plano elíptico, ...

De esta forma resulta que unas geometrías que nacieron de manera puramente especulativa a partir de los intentos de demostración del postulado de las paralelas, se pueden adaptar perfectamente - e imprevisiblemente - para describir algunos fenómenos naturales que, en principio, estaban muy alejados de su marco inicial.

Bibliografía

BONOLA, R. (1923) *Geometrías no euclidianas.* Madrid, Calpe.

COXETER, H. S. M. (1978) *Non-Euclidean Geometry.* Toronto, University of Toronto Press.

DAVIS. D. M. (1993) *The nature and Power of Mathematics.* Princeton, Princeton University Press.

DUBROVSKI, V., SMORODINSKI, Ya., SURKOV, E. (1987) *El mundo relativista.* Moscú, Ed. Mir, Col. "Física al alcance de todos" (1a ed. en ruso, 1984).

EFIMOV, N. V. (1989) *Geometría Superior.* Moscú, Mir.

GRAY, J. (1979) *Ideas of espace euclidean, non-euclidean and relativistic.* Oxford, Clarendon Press.

GREENBERG, M. J. (1980) *Euclidean and Non-Euclidean Geometries.* San Francisco, W. H. Freeman.

KAGAN, V.F. (1984) *Lobachevski.* Moscú, Mir (1 ed. en ruso, 1974).

KLEIN, F. (1968) *Vorlesungen úber nicht-euklidische geometrie.* Berlin, Verlag-Springer

LLOMBART, J. & BERNALTE, A. (1996) "The Effect of the Implantation of Non-Euclidean Geometries on the Change of Paradigm and its Repercussion in Spain". En AUSEJO, E. & HORMIGON, M. (Eds.) *Paradigms and Mathematics.* Madrid, Siglo XXI de España.

MARTIN, G. E. (1975) *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane.* New York, Springer-Verlag.

MILLMAN, R. S. & PARKER, G. D. (1981) *Geometry. A metric Aproach with Models.* New York, Springer-Verlag.

RICHARDS, J. L. (1979) "The reception of a Mathematical Theory: Non-Euclidean Geometry in England, 1863-1883". En BARNES, B. & SHAPIN, S. (eds.) : *Natural order: Historical studies of scientific culture.*

ROSENFELD, B. A. (1988) *A History of Non-Euclidean Geometry.* Nueva york, Springer- Verlag.

VERA, F. (1963) *Breve Historia de la Geometría.* Biblioteca Contemporánea, nº 172. Buenos Aires, Losada.

YAGLOM, I. M. (1979) *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical basis.* New York, Springer-Verlag.