Algoritmos matemáticos y afinación musical*

April 8, 2002

Vicente Liern Carrión[1]
Departamento de Economía Financiera y Matemática, Universitat de València, 46010-València, España.

RESUMEN

La intención del presente trabajo es dar una visión matemática de la afinación musical introducida por Pitágoras. Para ello se justifica brevemente cómo surgió tal afinación, y se hace una "traducción" matemática de las ideas básicas que la definen. Además, se muestra que afinar no es más que fijar un algoritmo para elegir una cantidad finita de puntos en el intervalo [1,2[, y que esta elección debe estar sujeta a ciertas propiedades numéricas. Por último, se da el algoritmo y algunos ejemplos que permiten hacer uso práctico de las ideas expuestas.

*Publicado en EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Vol. 6, No. 2. Agosto 1994. Grupo Editorial Iberoamérica. México.
[1]**E–mail:** Vicente.Liern @ uv.es

“La música se ocupa de los números sonoros”
G. Zarlino, compositor y teórico italiano (1517 – 1590)

1 Introducción

En ocasiones, cuando se rastrea el origen de cualquier disciplina científica, aparece un pasado turbio en el que las Antiguas Civilizaciones identificaban ciencia, arte, técnica o religión. Esto ha hecho que en muchos casos resulte difícil conocer bien la cronología de los hechos. Sin embargo, en materia de Música, parece indudable que el arte se anticipó a la ciencia, y mucho antes de que existiera construcción teórica alguna, los músicos ya habían establecido una afinación que identificaban de oído.

Por afinación, o más precisamente por **sistema de afinación**, entendemos el conjunto de los sonidos que utiliza la Música; es decir, en el conjunto de las frecuencias de todos los sonidos, $\mathbb{R}^+$, tenemos que elegir aquellos que *“ sirven para hacer música”* y descartar el resto. Los sonidos admitidos por el sistema de afinación se denominarán *sonidos afinados o notas musicales.*

En este trabajo veremos que el criterio de afinación que estableció Pitágoras (que perdura hasta nuestros días), constituye un método matemático que permite elegir de entre todos los sonidos existentes una pequeña cantidad (finita) a utilizar por la música. Es decir, se trata de un algoritmo de elección de puntos en el intervalo $[1, 2[$.

Además, mostraremos las propiedades matemáticas que rigen este modo de afinar, haciendo al mismo tiempo un intento por recuperar esa zona común del saber que ocupa la música y las matemáticas.

Notas históricas

Al menos desde la Antigua Mesopotamia (milenios IV y III a. de C.) el hombre se plantea con qué criterio la música admite unos sonidos y rechaza otros. Las teorías más arcaicas justificaron esta elección con razonamientos meramente religiosos o estéticos, consiguiendo con ello que durante muchos siglos la afinación fuese considerada una criba “ caprichosa”.

Ya en el primer milenio antes de Cristo, los **caldeos** relacionaron muy estrechamente la música con la astrología y las matemáticas. Así, quienes estudiaban las estrellas explicaban el destino de los hombres y la armonía del Universo entrelazando la especulación matemática con los simbolismos. Esto dio lugar a que numerosos fenómenos cósmicos fuesen representados por la comparación entre las longitudes de cuerdas tirantes. De este modo aparecieron cuatro relaciones que, por su importancia, tomaron nombres propios. Estas son[2]:

$$\frac{1}{1} \text{ (unísono)}, \ \frac{2}{1} \text{ (octava)}, \ \frac{3}{2} \text{ (quinta)}, \ \frac{4}{3} \text{ (cuarta)}.$$

Se sabe que para los caldeos, el estudio de las propiedades de los números resultó fundamental en la predicción de sucesos, y en este sentido destacaron fundamentalmente el 4 y el 7, siendo este último, probablemente, el número de notas de la antigua escala caldea.

Aunque el conocimiento de tales materias nos ha llegado por varios autores clásicos (Filón y Plutarco entre otros), hay poderosas razones para creer que **Pitágoras de Samos** (580 – 500 a. de C.), tras un largo período de estudio en las escuelas mesopotámicas[3], llevó las teorías de la música y los principios de la afinación a Grecia.

Pitágoras fue, sin duda, el primer pensador occidental que atribuyó a la música, y al resto de las cosas, un carácter numérico. Dedujo que un sonido musical producido por una cuerda vibrante varía en razón inversa a su longitud, esto es: " cuanto más corta sea la cuerda, tanto más aguda será la nota producida". Con ello fijó matemáticamente el concepto de **octava** que los músicos venían usando en los siguientes términos:

> " un sonido es una octava más alto que otro si la cuerda que lo produce es la mitad de larga que la del primero";

y estos sonidos no sólo reciben el mismo nombre, sino que a todos los efectos se considera que son equivalentes.

Traducido a un lenguaje actual, el sistema de afinación pitagórico se fundamentaba en tres principios:

a) La música se basa en 7 notas. El hecho de que sean siete los sonidos fundamentales no representa una originalidad pitagórica, puesto que los caldeos ya lo consideraban así. Sin embargo, la novedad está en

[2]En *Historia General de la Música* de A. Robertson y D. Stevens, ed. alpuerto s.a. (1988), se justifica cómo relacionaban estas cuatro fracciones con las estaciones del año.

[3]Esta hipótesis se puede encontrar, por ejemplo, en la referencia [2]

utilizar este número para reforzar la idea de la armonía de las esferas celestes[4].

b) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 3 el número de veces que se quiera. Es decir, que la longitud de las cuerdas puede ser multiplicada o dividida por 3 cualquier número de veces.

c) La frecuencia de una nota puede ser multiplicada o dividida por 2 cualquier número de veces. Con esto lo que haríamos es ir subiendo o bajando octavas respectivamente.

Con estos tres axiomas se dispone de suficiente criterio para determinar las notas musicales.

2 Sonido patrón: el diapasón

Hemos visto que dada una cuerda de longitud ℓ que produce una frecuencia f, los sonidos obtenidos al multiplicar ℓ por 3^n y 2^m $(n, m \in \mathbb{Z})$ son también sonidos afinados dentro del sistema pitagórico.

Sin duda, esto provoca un serio inconveniente:

> “ La cuerda inicial puede tener cualquier longitud $\ell \in \mathbb{R}^+$. Entonces, cualquier sonido s puede obtenerse si elegimos la cuerda con una longitud ℓ_o de modo que para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$, el producto $2^n.3^m.\ell_o$ produzca el sonido s ”.

Evidentemente, esto significaría que el sitema de afinación que hemos descrito no sería un auténtico criterio de selección, puesto que no haría ninguna elección de los sonidos que se consideran afinados, sino que podrían considerarse afinados todos los sonidos.

Los pitagóricos, conocedores de esta inconveniencia, resolvieron el problema tal y como lo venían haciendo los músicos: impusieron condiciones a la longitud inicial de la cuerda. Se consideró un sonido que era patrón (el que

[4]Según afirma F. Vera en [7], los tonos de la armonía universal están relacionados con las distancias interplanetarias de la forma siguiente: las distancias Mercurio–Venus, Luna–Marte y Marte–Júpiter son de $\frac{1}{2}$ tono; las de Venus–Sol, Júpiter–Saturno y Saturno–Zodíaco son de $1 + \frac{1}{2}$ tonos; y la distancia Tierra–Luna es de 1 tono. Si se suman todas ellas se obtienen los siete tonos.

da el diapasón) y se exigió que la longitud ℓ de la cuerda fuese aquella que, para algunos $n, m \in \mathbb{Z}$ el producto $3^n.2^m.\ell$ produjese el sonido patrón.

Poco se sabe acerca de cuál fue la nota que los pitagóricos fijaron para el diapasón, pero en la actualidad se toma el sonido[5] 440 Hz, y éste será el patrón que nosotros usaremos. Con ello, las cuerdas a las que hagamos referencia a lo largo de todo el trabajo, se les exigirá la siguiente condición:

> *Una cuerda de longitud ℓ será válida en música si $\exists n, m \in \mathbb{Z}$ tales que $3^n.2^m.\ell$ produce el sonido de 440 Hz.*

3 Notación

Si en los trabajos de matemáticas suele haber necesidad de aclarar la notación, en este caso aún es más necesario puesto que la *musica* y las *matemáticas* manejan lenguajes diferentes.

a) Las siete notas fundamentales, a partir de las cuales se obtienen todas las demás, reciben en música los nombres *do, re, mi , fa, sol, la, si*[6]. En nuestro trabajo las vamos a numerar en este orden: Do=0, Re=1, Mi=2, Fa=3, Sol=4, La=5, Si=6.

b) El resto de notas se obtienen mediante las "alteraciones" de las fundamentales. Pueden ser de dos tipos:

b.1) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más **alta** que la de r, esta alteración se llama sostenido, y se representa por $\sharp$.

b.2) Si la alteración de una nota r produce una nota s distinta de las fundamentales, de modo que la frecuencia de s es más **baja** que la de r, esta alteración se llama bemol, y se representa por $\flat$.

[5] A partir de 1700 el diapasón no ha cesado de subir. Por ello, la mayor parte de las obras corales y vocales de los maestros clásicos resultan en la actualidad de difícil ejecución. En 1950 se llevó a cabo un referéndum entre físicos y músicos franceses con el fin de bajar la nota patrón a 432 Hz. Sin embargo, a pesar de que muchos apoyaron esta idea, no se ha hecho nada al respecto.

[6] La manera de nombrar las notas no es única, por ejemplo en los países de lengua inglesa se nombran con las primeras letras del abecedario del modo siguiente: la=A, si=B, do=C, re=D, mi=E, fa=F, sol=G.

Aunque más adelante precisaremos en que consisten las alteraciones, debemos dejar claro que un sonido puede estar afectado por varias alteraciones del mismo nombre, es decir, varios sostenidos o varios bemoles.

4 Algoritmo

Antes de modelizar matemáticamente el método pitagórico de afinación, será muy útil que construyamos un algoritmo que permita ver fácilmente cómo se obtienen las notas:

Primer paso:

Escribimos los números enteros como una matriz de infinitas filas y siete columnas de la forma siguiente:

$$7 * k + r, \qquad k \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq r \leq 6,$$

tal y como se hace en Figura 1.

Segundo paso:

A partir del número 3, es decir 7∗0+3, vamos contando sucesivamente 4 "lugares" (en sentido creciente y decreciente) y marcamos los números así obtenidos. (Ver Fig. 2).

Tercer paso:

Con el paso 2 han aparecido cajas de 4 filas en las que hemos marcado las mismas cifras. Numeramos las cajas tal y como se hace en la Fig. 3.

ALGORITMO DE LA AFINACIÓN

PRIMER PASO

7.(-3)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(-2)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(-1)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(+0)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(+1)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(+2)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(+3)+	0	1	2	3	4	5	6
7.(+4)+	0	1	2	3	4	5	6

Figura 1

SEGUNDO PASO

7.(-3)+	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6
7.(-2)+	0	$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6
7.(-1)+	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$
7.(+0)+	0	1	2	$\boxed{\boxed{3}}$	4	5	6
7.(+1)+	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6
7.(+2)+	0	$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6
7.(+3)+	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$

Figura 2

TERCER PASO

...	...								
7.(-5)+	...	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	C_{-2}
7.(-4)+	...	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	
7.(-3)+	...	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	C_{-1}
7.(-2)+	...	0	$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	
7.(-1)+	...	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	
7.(+0)+	...	0	1	2	$\boxed{\boxed{3}}$	4	5	6	
7.(+1)+	...	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	C_0
7.(+2)+	...	0	$\boxed{1}$	2	3	4	$\boxed{5}$	6	
7.(+3)+	...	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5	$\boxed{6}$	
7.(+4)+	...	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	
7.(+5)+	...	$\boxed{0}$	1	2	3	$\boxed{4}$	5	6	C_1
...	...								

Figura 3

Interpretación:

a) Los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 que hemos marcado representan los nombres de las notas tal y como se ha dicho en el epígrafe 4.

b) El subíndice de las cajas representa el número de alteraciones que afecta a la nota. Si es positivo, las alteraciones serán sostenidos, y si es negativo rerán bemoles.

c) Cada vez que hemos contado cuatro lugares en sentido ascendente (y hemos marcado un número) significa que hemos dividido la longitud de la cuerda entre 3. Si se cuenta en sentido descendente significa que la longitud de la cuerda se multiplica por 3.

Ejemplo: Si al vibrar una cuerda de longitud ℓ produce un $re^\flat$, ¿cuánto tendría que medir la cuerda para producir un *sol*?

Según hemos dicho, el $re^\flat$ está representado en la tabla por el número 1 de la caja C_{-1} (porque tiene un bemol y re=1).

La nota *sol* está representada por el número 4 de la caja C_0 (porque no tiene alteraciones). Para saber cuántas veces hemos dividido la longitud de la cuerda por 3, miramos en la **Fig. 2** cuántos "saltos" de cuatro lugares hemos hecho entre el $re^\flat$ y el *sol*, y comprobamos que han sido 6 en sentido ascendente, por tanto, la cuerda deberá medir $\ell/3^6$.

NOTA:

En el algoritmo, por respetar cómo se ideó la afinación, se hace referencia a la longitud de las cuerdas y no a la frecuencia de los sonidos. Sin embargo, como en toda la bibliografía se prefiere hablar de las frecuencias así lo haremos a partir de ahora.

Si se prefiere pensar en longitudes no tiene más que tener en cuenta que la longitud de la cuerda y la frecuencia son magnitudes inversas. Así, cada vez que se multiplique por 3 la frecuencia se está dividiendo por 3 la longitud y viceversa.

5 Modelización matemática

Si lo que se pretende es utilizar la idea pitagórica de afinación para elegir sonidos, lo cierto es que no resulta demasiado complejo desde un punto de vista matemático. Sin embargo, si además se intenta que la construcción matemática se corresponda biunívocamente con la afinación manejada por los músicos, la empresa es más laboriosa, según veremos.

El concepto de octava (dado en el epígrafe 2) nos permite definir en $\mathbb{R}^+$ (el conjunto de las frecuencias de todos los sonidos) una relación binaria de equivalencia $\mathcal{R}$ como sigue:

> " Dos sonidos de frecuencias f_1, f_2 están relacionados si existe un número entero, n, de modo que $f_1 = 2^n f_2$".

Con esto, en lugar de estudiar todo $\mathbb{R}^+$, podemos estudiar el conjunto cociente $\mathbb{R}^+/\mathcal{R}$. Si, como hemos dicho anteriormente, fijamos una nota patrón $f_0 = 440Hz$, el conjunto $\mathbb{R}^+/\mathcal{R}$ se reduce al intervalo $[f_0, 2f_0[$. O, si así se quiere, podemos trabajar directamente en el intervalo $[1, 2[$ sin más que dividir por f_0 todas las frecuencias.

Así tenemos que un sistema de afinación, como dijimos en la Introducción, es una elección de puntos de $[1, 2[$.

La idea de conseguir con sucesivas multiplicaciones o divisiones por 3 las frecuencias afinadas se expresa fácilmente con la sucesión

$$3^n, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Y si ésta quiere llevarse al intervalo $[1, 2[$ no hay más que multiplicar por una potencia de 2 adecuada, es decir,

$$a_n = \frac{3^n}{2^{E[\log_2 3^n]}}, \ \ n \in \mathbb{Z}$$

donde $E[x]$ representa la parte entera por defecto de x.

Matemáticamente hablando, tenemos resuelto el problema de elegir sonidos. Sin embargo, esta forma de expresar la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ no es apropiada, porque no refleja la idea de siete notas fundamentales, y tampoco sabemos con que nota se corresponde cada término de la sucesión.

Admitiendo que partimos de la nota 3 (tal y como hacíamos en el algoritmo), el término a_0 produce un fa, y con ello podemos obtener el resto de notas sin más que efectuar los cálculos siguientes[7] [8]:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n = \dfrac{3^n}{2^{E(\log_2 3^n)}}, \quad n \in \mathbb{Z} \\[2ex] N(n) = 4n + 3 - 7\,E[\dfrac{4n+3}{7}] = \text{número de la nota} \\[2ex] A(n) = E[\dfrac{n}{7}] = \text{número de alteraciones} \end{array}}$$

Ejemplo: ¿Qué notas se obtendrían con los términos a_5 y a_{-8}?

1) $N(5) = 4 * 5 + 3 - 7\,E[\dfrac{4 * 5 + 3}{7}] = 2.$

$A(5) = E[\dfrac{5}{7}] = 0$

Por tanto es la nota 2 sin ninguna alteración, es decir

$$a_5 = mi$$

2) $N(-8) = 4\,(-8) + 3 - 7\,E[\dfrac{4\,(-8) + 3}{7}] = 6.$

[7] Si en lugar de iniciar el algoritmo con $a_o = 3$ lo hubiésemos hecho con b_o, $0 \leq b_o \leq 6$, el nombre de la nota b_n podría obtenerse mediante

$$\tilde{N}(n) = 4n + b_o - 7\,E[\frac{4n + b_o}{7}].$$

Sin embargo, si queremos saber el número de alteraciones que afectan a la nota, debemos compararla con la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Así, si $b_o = a_{k_o}$ el número de alteraciones vendrá dado por

$$\tilde{A}(n) = A(n + k_o).$$

[8] En realidad $N(n)$ es equivalente a expresar la sucesión $\{4n + 3\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $\mathbb{Z}/7\,\mathbb{Z}$.

$A(-8) = E[\frac{-8}{7}] = -2$

Por tanto es la nota 6 con dos alteraciones que, por ser negativas, se trata de bemoles. Entonces,

$$a_{-8} = si^{\flat\flat}$$

6 La cuestión del infinito

En lo tratado hasta ahora, no hemos impuesto en ningún momento que la cantidad de frecuencias afinadas del intervalo $[f_0, 2f_0[$ fuese finita. De hecho, tanto el algoritmo como la sucesión generan una cantidad infinita (numerable) de sonidos. Sin embargo, parece lógico imponer una condición de finitud al cardinal de las notas musicales, puesto que no tiene sentido suponer instrumentos que sean capaces de producir infinitos sonidos, y por otro lado el oído humano no sería capaz de distinguirlos.

Los músicos proporcionan una forma de abordar el problema:

> *Supuesto que las siete notas fundamentales deben estar en la música, la cantidad de sonidos distintos vendrá determinada por el número de alteraciones de estas notas que se precisen.*

En realidad, es rara la música occidental en la que aparecen notas con más de 1 alteración, es decir, un sostenido o un bemol; y en la música oriental tampoco aparecen más de dos o tres alteraciones.

Sin embargo, los músicos de siglos pasados no podían preveer la aparición de **sintetizadores** capaces de producir sonidos como los instrumentos de cuerda, y que, por tanto, deberían afinar con el sistema de Pitágoras. Estos instrumentos electrónicos han posibilitado la creación de composiciones musicales en las que aparecen notas con muchas alteraciones, y esto ha supuesto un problema que los músicos todavía no han podido resolver con una teoría estrictamente musical.

Probaremos que la cantidad de notas viene determinada por la convergencia de la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Para estudiar la convergencia de la sucesión, resulta más conveniente expresarla con subíndices naturales que con enteros, no sólo porque así tenemos los términos ordenados de la forma habitual, sino porque, además, este cambio nos permite desglosar $\{a_n\}$ en tres subconjuntos:

$$\mathcal{F} = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{3^2}{2^3}, \frac{3^3}{2^4}, \frac{3^4}{2^6}, \frac{3^5}{2^7}, \frac{3^6}{2^9}\right\}$$

$$s_k = \frac{3^{6+k}}{2^{E(\log_2 3^{6+k})}}, \quad k \geq 1$$

$$b_k = \frac{3^{-k}}{2^{E(\log_2 3^{-k})}} \quad k \geq 1$$

Claramente el conjunto $\mathcal{F}$ contiene las siete notas fundamentales, la sucesión $\{s_k\}_{k\geq 1}$ contiene todos los sostenidos y la sucesión $\{b_k\}_{k\geq 1}$ todos los bemoles.

Por razones de comodidad definimos la sucesión $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$ como sigue:

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} s_k & \text{si} \quad n = 2k-1 \\ b_k & \text{si} \quad n = 2k \end{cases}$$

en la que hemos eliminado los siete términos de la sucesión $\{a_n\}_{n\geq 1}$ que corresponden a las notas fundamentales. No es necesario ir "arrastrando" estos sonidos porque no intervienen en la cantidad de alteraciones que afectan a las notas.

Es fácil comprobar que la sucesión $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$ no es convergente, por esto necesitamos recurrir a un concepto de convergencia más general (ver la referencia [6]):

Definición: Sea $\{c_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales. Para cada $k \in \mathbb{N}$ se puede definir el conjunto $m_k = inf\{c_n : n \in \mathbb{N},\ n \geq k\}$.

Sea $m = \lim_{k\to\infty} m_k \quad (-\infty \leq m \leq \infty)$. Al número m se le llama **límite inferior** de $\{c_n\}_{n\geq 1}$ y se denota por $m = \varliminf_{n\to\infty} c_n$

Nuestro interés es demostrar que la sucesión $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$ verifica $\varliminf_{n\to\infty} \tilde{a}_n = 1$, para lo cual necesitamos introducir algunos resultados de fracciones continuas:

6.1 Algunos resultados de fracciones continuas

Dada $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ una sucesión de números naturales donde $a_i \neq 0, \quad i > 0$. Denotamos

$$[a_0] = a_0,$$

$$[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1},$$

$$[a_0, a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}},$$

$$[a_0, a_1, a_2, a_3] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3}}},$$

....

En general hemos definido el número racional $[a_0, a_1, ..., a_n]$ que es no nulo si $n \geq 1$. Una definición formal dada por recurrencia de derecha a izquierda, es la siguiente:

$$x_0 = a_n, \quad x_{i+1} = a_{n-1-i} + \frac{1}{x_i}, \quad [a_0, ..., a_n] = x_n.$$

Llamaremos $r_n = [a_0, ..., a_n] = \frac{p_n}{q_n}$, donde p_n y q_n son números naturales primos entre sí (convenimos que si $a_0 = 0$, entonces $p_0 = 0$, $q_0 = 1$).

La sucesión r_n se llama *fracción continua* determinada por la sucesión $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Los números racionales r_n se llaman *convergentes* de la fracción continua.

Los resultados que citaré a continuación se pueden encontrar en [1]:

Lema 1: Con la notación anterior:

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1,$$

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \quad q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Lema 2: Con la notación anterior,

$$p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = (-1)^{n+1},$$

o lo que es lo mismo:

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}}.$$

Lema 3: Con la notación anterior, existe un único número real $\alpha > 0$ tal que

$$0 \leq r_0 < r_2 < r_4 < r_6 ... \alpha ... < r_7 < r_5 < r_3 < r_1.$$

Escribiremos $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$

Lema 4: Sea α un número real positivo.

a) Si α es racional, entonces $\alpha = [a_0, a_1, ..., a_n]$ para ciertos números naturales.

b) Si α es irracional, entonces $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ...]$ para ciertos números naturales.

   Además el desarrollo es único.

Utilizando estos lemas podemos demostrar la siguiente propiedad:

Teorema: Si α es un número real arbitrario, entonces

$$\varliminf_{n\to\infty} (n\,\alpha - E[n\,\alpha]) = 0.$$

donde $E[x]$ es la parte entera por defecto de x, y $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ es el límite inferior de la sucesión $\{a_n\}$.

Demostración:

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que α es un número irracional positivo. Sea $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ la sucesión de los convergentes de α descrita anteriormente. Por el Lema 2 tenemos que

$$r_n - r_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n+1}},$$

para todo n, y por el Lema 3 el número α se encuentra entre ambos convergentes, luego

$$|\,\alpha - r_n\,| < \frac{1}{q_n\,q_{n+1}}.$$

Como consecuencia del Lema 1 tenemos que $q_n < q_{n+1}$, luego

$$|\,\alpha - r_n\,| < \frac{1}{q_n^2}.$$

Por el Lema 3 tenemos, además, que $\dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} < \alpha$, luego podemos quitar el módulo y queda

$$0 < \alpha\, q_{2n} - p_{2n} < \frac{1}{q_{2n}} < 1.$$

Esto implica que $p_{2n} = [\alpha\, q_{2n}]$, luego se tiene que

$$0 < \alpha\, q_{2n} - [\alpha\, q_{2n}] < \frac{1}{q_{2n}},$$

y como la sucesión $\{q_{2n}\}_{n\geq 0}$ es monótona creciente,

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha\, q_{2n} - E[\alpha\, q_{2n}]) = 0,$$

y por tanto $\underline{\lim}_{n\to\infty} (n\,\alpha - E[n\,\alpha]) = 0$.

q.e.d

Utilizando el Teorema anterior se tiene, de forma inmediata, que

Propiedad: La sucesión $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$ verifica que $\underline{\lim}_{n\to\infty} \tilde{a}_n = 1$

6.2 El concepto de comma

Gracias esta propiedad, ya estamos en condiciones de establecer nuestro concepto de precisión o **comma**:

Definición: Dados $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$ y $\epsilon \in \mathbb{R} : 0 \leq \epsilon \leq 1$, consideramos $m_o(\epsilon) \in \mathbb{N}$ el **primer** natural tal que $\tilde{a}_{m_o} < 1 + \epsilon$. Llamamos **notas musicales** con precisión ϵ al conjunto

$$\mathcal{N}_\epsilon = \{\tilde{a}_n : n < m_o(\epsilon)\} \cup \mathcal{F}$$

Al número $1 + \epsilon$ se le llama **comma** del conjunto.

Ejemplos: Damos aquí los dos valores de ϵ que se usan en la música actual para instrumentos convencionales (es decir, no electrónicos).

1) Si $\epsilon = 0.068$, el conjunto de notas afinadas se reduce a las siete notas fundamentales, es decir

$$1 = Fa,\ \ \frac{3}{2} = Do,\ \ \frac{3^2}{2^3} = Sol,\ \ \frac{3^3}{2^4} = Re,\ \ \frac{3^4}{2^6} = La,\ \ \frac{3^5}{2^7} = Mi,\ \ \frac{3^6}{2^9} = Si$$

2) Si $\epsilon = 0.014$, $\mathcal{N}_\epsilon$ tiene 17 elementos, y las notas serían

$$1 = Fa,\ \ \frac{3}{2} = Do,\ \ \frac{3^2}{2^3} = Sol,\ \ \frac{3^3}{2^4} = Re,\ \ \frac{3^4}{2^6} = La,\ \ \frac{3^5}{2^7} = Mi,\ \ \frac{3^6}{2^9} = Si$$

$$\frac{3^7}{2^{11}} = Fa^\sharp,\ \ \frac{3^8}{2^{12}} = Do^\sharp,\ \ \frac{3^9}{2^{14}} = Sol^\sharp,\ \ \frac{3^{10}}{2^{15}} = Re^\sharp,\ \ \frac{3^{11}}{2^{17}} = La^\sharp$$

$$\frac{2^2}{3} = Si^\flat,\ \ \frac{2^4}{3^2} = Mi^\flat,\ \ \frac{2^5}{3^3} = La^\flat,\ \ \frac{2^7}{3^4} = Re^\flat,\ \ \frac{2^8}{3^5} = Sol^\flat$$

Por último, reseñamos una curiosidad que presenta la sucesión $\{\tilde{a}_n\}_{n\geq 1}$. Dado el conjunto de siete notas, para mejorar la precisión, hay que recurrir al de 17 notas, es decir, que los conjuntos de 8, 9 u otra cantidad de notas no mejoran al de 7.

Si queremos seguir reduciendo ϵ, del conjunto de 17 notas tendríamos que pasar a otro de 105 notas (con $\epsilon = 0.002$), y para mejorar éste último habría que manejar 1329 notas. Y, evidentemente esto sólo podría interpretarse con ayuda de instrumentos electrónicos.

8.- BIBLIOGRAFÍA

1 **A. BAKER** *A concise introduction to the theory of numbers*. Ed. Cambridge University Press, 1984.

2 **W.F. BYNUM, E.J. BROWNE, R. PORTER**.*Diccionario de historia de la ciencia*. Ed. HERDER. Barcelona, 1986.

3 **J. CHALLAY, H. CHALLAN**.*Teorie complete de la musique*. Ed. Alphonse Leduc et Cia. EDITIONS MUSICALES, Paris, 1964.

4 **J.J. MATRAS**. *Le son*. Ed. PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE, Paris, 1977.

5 **K.R. STROMBERG**. *An Introduction to Classical Real Analysis*. Ed. WADSWORTH AND BROOKS. Pacific Grove, California, 1981.

6 **R. TATON**. *Historia genral de las Ciencias (Tomo I)*. Ed. DESTINO S.A., Barcelona, 1985.

7 **F. VERA**. *Historia de la Ciencia*. Ed. IBERIA, Barcelona, 1937.