

TEXTO  
VICENTE MEAVILLA SEGUI

DIBUJOS  
JOSE A. CANTERAS ALONSO

VIAJE GRAFICO  
POR EL MUNDO  
DE LAS MATEMATICAS

2

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION  
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
1985

INTRODUCCIÓN  
UNAS PALABRAS JUSTIFICATIVAS

SÓLO HAN TRANSCURRIDO POCO MÁS DE SEIS MESES DESDE QUE NACIERA NUESTRO "VIAJE GRÁFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS 1" CON LA ESPERANZA DE QUE SU LECTURA SIRVIERA A LOS ALUMNOS QUE — EN SU ANDADURA POR EL CAMINO, EN OCASIONES ÁRIDO, DE LA MATEMÁTICA — HUBIERAN PERDIDO EL NORTE.

EL INTERÉS CON QUE HA SIDO ACOGIDO NUESTRO "PRIMER VIAJE", LAS NUMEROSAS PRUEBAS DE ALIENTO RECIBIDAS, LAS CRÍTICAS FAVORABLES AL ENFOQUE QUE DIMOS AL PRIMER "ITINERARIO" Y — POR QUE NO DECIRLO — LA ILUSIÓN DE LLEGAR A COMPLETAR EN SU DÍA UNA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA HAN SIDO MOTIVOS SUFICIENTES PARA QUE NOS HAYAMOS AVENTURADO A PROYECTAR ESTA SEGUNDA EXCURSIÓN QUE DENTRO DE POCO INICIARÁ USTED EN NUESTRA COMPAÑÍA.

ESPERAMOS QUE LAS SENDAS Y ATAJOS QUE VAMOS A SEGUIR NO RESULTEN EXCESIVAMENTE TORTUOSOS Y LE DESEAMOS UN FELIZ VIAJE DE TODO CORAZÓN.

*Vicente Aneariña*

MOLINA DE ARAGÓN, NOVIEMBRE DE 1984.

## PRÓLOGO

LA MATEMÁTICA GRIEGA, JUNTO CON SU HERMANA GEMELA LA FILOSOFÍA GRIEGA, A LA QUE ESTA ESTRECHAMENTE UNIDA DESDE SUS MISMÍSIMOS ORÍGENES COMUNES HASTA SU CULMINACIÓN, CONSTITUYE SIN DUDA UNA DE LAS AVENTURAS INTELECTUALES MÁS IMPRESIONANTES DE LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD.

DE AMBAS, MATEMÁTICA GRIEGA Y FILOSOFÍA GRIEGA, ES HEREDERO DIRECTO, HASTA A LA FUERZA, INEVITABLEMENTE, EL HOMBRE OCCIDENTAL, A PESAR DE LA GRAN DISTANCIA EN EL TIEMPO QUE NOS SEPARA, Y NO PARECE POSIBLE PREVER NINGÚN CAMBIO ESENCIAL EN EL FUTURO. PENSAMOS EN FILOSOFÍA Y EN LA MATEMÁTICA TAL COMO LO HACEMOS POR SER DISCÍPULOS LEJANOS DE LOS GRIEGOS (LAS OTRAS DOS BASES DE LA CULTURA OCCIDENTAL SON, EVIDENTEMENTE, EL DERECHO HEREDADO DE LOS ROMANOS Y LA RELIGIÓN DE LOS JUDÍOS).

LOS MATEMÁTICOS Y LOS FILÓSOFOS GRIEGOS SON LOS PRIMEROS EN LA HISTORIA QUE NO SE NOS PRESENTAN YA COMO UNOS PENSADORES "PRIMITIVOS" CUYAS IDEAS Y CONOCIMIENTOS ESTÉN DEFINITIVAMENTE SUPERADOS, SINO COMO, USANDO LA BELLA IMAGEN DE HARDY: "UNOS COLEGAS DE OTRA UNIVERSIDAD", CUYOS PENSAMIENTOS ENTENDEMOS Y NOS INTERESAN.

ESTE TIPO DE VALORACIÓN DE LA CULTURA Y DE LA CIENCIA GRIEGA NO RESULTA HOY CHOCANTE A CASI NADIE. SE ADMITE SIN RESERVAS ENTRE GENTE DE FORMACIÓN CULTURAL MEDIA, PERO ¿ SOBRE QUE BASES SE APOYA? EN LA INMENSA MAYORÍA DE LOS CASOS EN UNA SIMPLE RAZÓN DE AUTORIDAD QUE SE SANCIONA POR INCANSABLE REPETICIÓN, PERO QUE CARECE DE SOPORTE EN UN CONOCIMIENTO CONCRETO Y DIRECTO DE CÓMO SE ORIGINARON Y EVOLUCIONARON LAS IDEAS EN ESE MUNDO CULTURAL, Y POR LO TANTO CARECE DE VIDA PROPIA. "LOS ESPECIALISTAS EN ESTOS ABSTRUSOS CONOCIMIENTOS NOS LO ASEGURAN."

ESTE CONOCIMIENTO "DE PRESTADO" YA NO BASTA; PROBABLEMENTE EN MUCHOS CASOS ES PEOR QUE INÚTIL. HAY QUE ACERCARSE A LA REALIDAD Y CONOCERLA; A FIN DE CUENTAS ESA REALIDAD CASI NUNCA RESULTA SER TAN ABSTRUSA SINO INTELIGIBLE Y, DESDE LLUEGO, "LA BELLEZA HAY QUE VERLA". LOS RESULTADOS DEL ESFUERZO PAGARÁN CON CRECES.

DESPUÉS DE ESTE DISCURSO UN TANTO MORALIZANTE (Y, POR LO TANTO, DE EFICACIA MÁS QUE DUDOSA), VOLVAMOS AL TEMA CONCRETO DE LA MATEMÁTICA GRIEGA Y DE SUS CREADORES, QUE

LOS PROFESORES MEAVILLA Y CANTERAS VAN A IR HACIENDO DESFILAR ANTE NUESTRA MENTE Y NUESTROS OJOS AL MISMO TIEMPO EN LAS PÁGINAS SIGUIENTES.

DURANTE MUCHO TIEMPO PRÁCTICAMENTE SE IDENTIFICÓ LA MATEMÁTICA GRIEGA CON LA OBRA DE LOS MATEMÁTICOS QUE REPRESENTAN SU CULMINACIÓN, SU CUMBRE MÁS ALTA Y SU FORMA MÁS LOGRADA, QUE SE NOS PRESENTA DE PRONTO COMO DEFINITIVA Y A LA VEZ COMO CAÍDA DEL CIELO. SIN EMBARGO, ESTA IMAGEN ERA ESCANDALOSAMENTE INCOMPLETA, Y ELLA MISMA DELATABA A LAS CLARAS ESTE CARÁCTER INCOMPLETO A CUALQUIERA QUE SE APROXIMASE A ELLA CON UNA MENTALIDAD HISTÓRICA. SI EUCLIDES NOS PARECE YA ESENCIALMENTE UN MATEMÁTICO "MODERNO", Y MÁS AÚN SUS SUCESORES INMEDIATOS ARQUÍMEDES, APOLONIO, ETC., MIENTRAS QUE LA MATEMÁTICA EGIPCIA Y BABILÓNICA (TERRENO EN EL QUE ECHÓ SUS RAÍCES LA MATEMÁTICA GRIEGA) ES PARA NOSOTROS IRREMEDIABLEMENTE "ARCAICA", ¿QUÉ HA OCURRIDO ENTONCES ENTRE AMBOS HECHOS HISTÓRICOS? LA RESPUESTA VIENE A DARLA LA RECONSTRUCCIÓN DEL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA GRIEGA PRE-EUCLÍDEA, QUE HAN IDO HACIENDO LABORIOSAMENTE HISTORIADORES, FILÓLOGOS Y FILÓSOFOS DURANTE LOS ÚLTIMOS CIENTO AÑOS, TRABAJANDO LAS MÁS DE LAS VECES SOBRE MATERIALES E INFORMACIONES INDIRECTAS Y BIEN ESCASAS, PERO CON MENTALIDAD CRÍTICA, CONSIGUIENDO ALGUNAS EXPLICACIONES COHERENTES Y MUY VEROSÍMILES QUE ILUMINAN EL DESARROLLO DE LAS IDEAS A LO LARGO DE ESTA "ÉPOCA OSCURA" QUE VA DESDE EL 600 A. C. APROXIMADAMENTE HASTA EL 350 A. C., DE LA QUE, POR DESGRACIA, NO HA LLEGADO HASTA NOSOTROS PRÁCTICAMENTE NINGÚN DOCUMENTO ORIGINAL PURAMENTE MATEMÁTICO.

ESTE SEGUNDO VOLUMEN DEL "VIAJE GRÁFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS" SE CENTRA EN LA ÉPOCA QUE CUBRE APROXIMADAMENTE LOS CINCUENTA AÑOS EN TORNO A MEDIADOS DEL SIGLO V A. C. ESTE SIGLO (EL DE PERICLES) FUE TESTIGO DE LA CULMINACIÓN DE LA CULTURA GRIEGA EN SU LITERATURA Y SU ARTE; LA FILOSOFÍA, AUN SIENDO YA MUY IMPORTANTE EN ESTA ÉPOCA, COMO VIENE A DEMOSTRAR EL HECHO DE QUE LA MAYOR PARTE DE LOS PERSONAJES QUE APARECEN EN ESTE LIBRO SEAN EN PRIMER LUGAR FILÓSOFOS: DEMÓCRITO, ZENÓN, ANAXÁGORAS, HIPAS, ETC., ALCANZARÁ SU APOGEO EL SIGLO SIGUIENTE CON PLATÓN Y ARISTÓTELES, Y LA MATEMÁTICA GRIEGA LLEGARÁ A SU CENIT CASI OTRO SIGLO MÁS TARDE, CON EUCLIDES, ARQUÍMEDES Y APOLONIO. ESTE PANORAMA PARECE SUGERIR QUE LA MATEMÁTICA DEL SIGLO IV A. C. EN GRECIA DEBIO TENER ESCASA IMPORTANCIA; EN DEFINITIVA EL ÚNICO MATEMÁTICO "PROFESIONAL" QUE NOS VAMOS A ENCONTRAR EN LAS PÁGINAS SIGUIENTES (ESTE DE PRIMERA FILA, ESO SÍ) ES HIPÓCRATES DE QUIOS, MIENTRAS QUE SUS PREDECESORES MÁS CERCANOS EN EL TIEMPO LOS CONOCEMOS CASI SÓLO POR EL NOMBRE, GENÉRICO QUE LES APLICA ARISTÓTELES EN VARIAS OCASIONES: "LOS

LLAMADOS PITAGÓRICOS", CON LOS QUE FINALIZABA EL TOMO I DE ESTA OBRA Y QUE CONTINUAN DESGRANÁNDOSE A LO LARGO DE CASI TODO EL SIGLO V, DESDE LA MUERTE DE PITÁGORAS MISMO.

SIN EMBARGO, TAL IMPRESIÓN ACERCA DE LA MATEMÁTICA GRIEGA DE MEDIADOS DEL SIGLO V A. C. NO PUEDE ESTAR MÁS LEJOS DE LA VERDAD. SI BIEN LOS GRANDES DESARROLLOS TÉCNICOS, QUE TAN "MODERNOS" NOS PARECEN, SE LOGRARON A FINALES DEL SIGLO III Y A LO LARGO DEL III A. C., NO ES MENOS CIERTO QUE LA MATEMÁTICA TOMÓ SU FORMA DEFINITIVA (Y TAN "MODERNA" QUE ES LA NUESTRA YA) 150 AÑOS ANTES APROXIMADAMENTE, ES DECIR, A MEDIADOS DE ESTE NOTABLE SIGLO V, DE LA MANO DE LA "PRIMERA CRISIS DE FUNDAMENTOS" DE SU HISTORIA (LA SEGUNDA, Y ÚLTIMA HASTA AHORA, SE PRODUJO UNOS 2350 AÑOS MÁS TARDE, A FINALES DEL SIGLO XIX), QUE TUVO COMO PROTAGONISTAS A LOS PITAGÓRICOS TARDÍOS, ENTRE ELLOS HIPASO, A ZENÓN, PROBABLEMENTE A HIPÓCRATES, ENTRE OTROS. ESTA CRISIS PROVOCÓ QUE LOS FILÓSOFOS Y MATEMÁTICOS SE PLANTEARAN POR PRIMERA VEZ INTERROGANTES TAN PROFUNDOS COMO LOS DE "¿QUÉ SON, DE QUÉ ESTÁN HECHOS LOS OBJETOS MATEMÁTICOS, NÚMEROS Y FIGURAS GEOMÉTRICAS?" Y "¿QUÉ MÉTODO DE INVESTIGACIÓN NOS PUEDE OFRECER LA SEGURIDAD DE QUE NOS CONDUZCA A PROPIEDADES NECESARIAMENTE VERDADERAS DE ESTOS OBJETOS?"

REMONTÁNDONOS UN POCO MÁS ATRÁS EN EL TIEMPO, LA CRISIS SE PRODUJO CON EL DESCUBRIMIENTO DE LAS MAGNITUDES INCONMESURABLES, DE MÚLTIPLES E IMPREVISIBLES CONSECUENCIAS, ENTRE LAS QUE LA PRIMERA SUPONÍA LA DESTRUCCIÓN DE LA GEOMETRÍA "ARITMÉTICA" DE LOS PITAGÓRICOS PARA, EN SEGUNDO LUGAR, Y JUNTOS CON LAS "APORÍAS" DE ZENÓN, NO OFRECER NINGUNA RESPUESTA A LA PRIMERA DE LAS DOS PREGUNTAS ANTERIORES PARA EL CASO DE LOS OBJETOS GEOMÉTRICOS. LA PREGUNTA "¿DE QUÉ ESTÁ HECHO EL CONTINUO ESPACIAL O TEMPORAL?" PARECÍA NO TENER, SORPRENDENTEMENTE, NINGUNA RESPUESTA SATISFACTORIA.

EN SEGUNDO LUGAR, EL DESCUBRIMIENTO DE QUE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS PRESENTAN A VECES PROPIEDADES QUE PARECEN A LA INTUICIÓN EVIDENTEMENTE FALSAS PERO QUE SON VERDADERAS, COMO LO ES EL HECHO DE QUE DOS MAGNITUDES SEAN INCONMESURABLES, DIÓ LUGAR A UNA SITUACIÓN DE DUDA SISTEMÁTICA ACERCA DEL MÉTODO DE "DEMOSTRACIÓN VISUAL", EMPÍRICO, QUE ERA HASTA ENTONCES, Y DESDE SU INVENTOR EL VIEJO THALES, EL MÉTODO MATEMÁTICO GENERAL, AL IGUAL QUE EL FILOSÓFICO. LA RESPUESTA GENIAL DADA POR LOS ANÓNIMOS MATEMÁTICOS GRIEGOS DE MEDIADOS DEL SIGLO V A LA SEGUNDA DE LAS DOS PREGUNTAS ANTERIORES, LA DE LA BÚSQUEDA DE UN MÉTODO "SEGURO", FUE NADA MÁS Y NADA MENOS QUE LA INVENCION DEL MÉTODO AXIOMÁTICO-DEDUCTIVO, QUE SERÁ YA EL ÚNICO ACEPTABLE PARA EUCLIDES Y, POR SUPUESTO, EL NUESTRO.

CIERTAMENTE, COMO DICE BOYER, NUNCA ANTES NI DESPUÉS SE ENCONTRARON LOS MATEMÁTICOS ENFRENTADOS A TAN SERIOS Y TAN PROFUNDOS PROBLEMAS (ALGUNOS AÚN SIN RESOLVER SATISFACTORIAMENTE HASTA HOY) CON TAN ESCASAS HERRAMIENTAS. PERO FUE ESTA ÉPOCA REALMENTE "HERÓICA" LA QUE HIZO A LA VEZ POSIBLE Y NECESARIO EL DESARROLLO DE LA MATEMÁTICA DE EUCLIDES, DE ARQUÍMEDES Y DE APOLOONIO EN UNA FORMA QUE YA ES TAN "FAMILIAR" PARA NOSOTROS. NI MÁS NI MENOS.

LOS AUTORES DE ESTE SEGUNDO TOMO DEL "VIAJE GRÁFICO POR EL MUNDO DE LAS MATEMÁTICAS" HAN ABORDADO LA TAREA CARITATIVA (Y POCO AGRADECIDA) DE INTRODUCIR A LOS PROFESORES Y A LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS EN ESTE MUNDO FASCINANTE Y TAN DESCONOCIDO DE CÓMO SE HA IDO HACIENDO LA MATEMÁTICA QUE TENEMOS HOY, DE UNA AVENTURA DE LA HISTORIA DEL HOMBRE, EN FIN. EL MÉTODO SEGUIDO ES EL DE LA DIVULGACIÓN CON AYUDA DE DIBUJOS ILUSTRATIVOS DE LAS DIFERENTES SITUACIONES, Y EL INTERESANTE RESULTADO CONSEGUIDO LO APRECIARÁ EL LECTOR RECORRIENDO LAS PÁGINAS QUE SIGUEN.

UNA OBRA COMO ÉSTA TIENE QUE DEDICAR, PROBABLEMENTE SIN REMEDIO, BUENA PARTE DE SU CONTENIDO A LAS BIOGRAFÍAS MÁS O MENOS ANECDÓTICAS DE LOS PERSONAJES QUE PROTAGONIZAN LA HISTORIA QUE SE VA NARRANDO, ANÉCDOTAS QUE SON MUCHAS VECES DE AUTENTICIDAD MÁS QUE DUDOSA, Y QUE FORMAN PARTE DE LA LEGENDARIA HERENCIA DE TODOS LOS GRANDES HOMBRES. SIN EMBARGO, HAY DOS ASPECTOS CONCRETOS DE ESTE VOLUMEN QUE ME GUSTARÍA COMENTAR Y SUBRAYAR, POR APARTARSE SENSIBLEMENTE DE ESTE TIPO DE BIOGRAFÍA ANECDÓTICA DE LOS GENIOS. ME REFIERO, EN PRIMER LUGAR, A LA PULCRA PRESENTACIÓN DE LAS "PARADOJAS" DE ZENÓN SOBRE EL CONTINUO, QUE HUBIERÁMOS DESEADO QUIZÁS UN POCO MÁS GENEROSA EN COMENTARIOS RELATIVOS TANTO A SU PROFUNDO SIGNIFICADO COMO A LO PEREGRINO Y PALAZ DE TANTAS Y TANTAS PRETENDIDAS REFUTACIONES (MEDIANTE LÍMITES, SERIES Y OTRAS VANIDADES) DE ESTAS DIFICULTADES QUE ENCIERRA LA INTUICIÓN DEL CONTINUO Y QUE SIGUEN TAN VIGENTES HOY COMO HACE 2500 AÑOS.

Y EL SEGUNDO PUNTO AL QUE ME REFERÍA ES AL DEL TRATAMIENTO DE LAS CUADRATURAS DE LAS LÚNULAS POR HIPÓCRATES DE QUIOS, DESARROLLADAS CON UN DETALLE QUE QUIZÁS ES EXCESIVO PARA EL PLANTEAMIENTO DE UNA OBRA COMO ÉSTA. EN CUALQUIER CASO, LA ATENCIÓN DEDICADA A ESTE PROBLEMA REVELA, CREO, QUE LOS AUTORES NO HAN PODIDO RESISTIRSE A LA BELLEZA DE LOS RAZONAMIENTOS Y DE LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS QUE UTILIZA HIPÓCRATES ¡ SEALES PERDONADO, PUES!

SÓLO ME QUEDA FELICITAR A LOS AUTORES, PROFESORES MEAVILLA Y CANTERAS, POR EL RESULTADO CONSEGUIDO, Y DESEAR AL LECTOR UNA GRATA PRIMERA EXCURSIÓN POR ESTA "TERRA INCOGNITA".

MADRID, ENERO 1985.  
MARIANO MARTÍNEZ PÉREZ  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS  
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID.

## AGRADECIMIENTOS

AGRADECEMOS AL DR. MARIANO MARTÍNEZ PÉREZ LA DEFERENCIA QUE HA TENIDO CON NOSOTROS AL PRESTARSE A PROLOGAR NUESTRO TRABAJO, Y A NUESTROS COMPAÑEROS D. DOMINGO SANZ HERRANZ Y JUAN LUIS CORDERO CEBALLOS LAS CORRECCIONES DEL ORIGINAL.

## DEDICATORIA

A NUESTROS HIJOS