

# Todo un mundo en la esfera

por

**José Ignacio Extremiana, Luis Javier Hernández y María Teresa Rivas, Universidad de la Rioja**

Bajo una mirada geométrica y topológica, en este trabajo proponemos explorar una parte del riquísimo mundo de la esfera bidimensional, protagonista importante no sólo de nuestros juegos infantiles, sino también de la cultura artística y científica a lo largo de la historia.

Este maravilloso objeto matemático posee la magia capaz de crear las geometrías planas euclídeas y no euclídeas e incluso hacer que diferentes modelos para la sorprendente geometría hiperbólica se puedan transformar unos en otros. Insuflada de geometría y topología, la esfera puede convertirse en una multitud de esferas poliedrales, celulares o fractales para hacer su aparición desde las teorías más antiguas sobre la construcción del universo hasta las investigaciones más actuales en campos tan diversos como el estudio de estructuras moleculares, la clasificación de virus o el análisis topológico de sistemas dinámicos.

## 1. La esfera y las geometrías no euclídeas

Formalmente solemos describir la esfera, o más correctamente la 2-esfera unidad  $S^2$ , como el subconjunto del espacio euclídeo tridimensional de los puntos cuya distancia al origen es 1:

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

A continuación veremos cómo este objeto geométrico, además de divertirnos cuando, bajo la forma de un simple balón, jugamos con él como hace la niña de la Figura 1, tiene un papel estratégico en la matemática y sus propiedades hacen que aparezcan relaciones muy interesantes con las geometrías planas, especialmente con la llamada geometría hiperbólica.



Figura 1: “Acróbata con balón” (1904), de P. Picasso

### 1.1. La asombrosa geometría hiperbólica

En nuestra opinión, uno de los avances más espectaculares que se han realizado durante el segundo milenio de nuestra era en el pensamiento matemático ha sido el *descubrimiento de las geometrías no euclídeas*.

Este descubrimiento, tan costoso que duró más de 2.000 años, tiene su raíz en el último de los cinco famosos postulados (afirmaciones que se admiten como axiomas o principios incuestionables, cuya veracidad no necesita demostración) que Euclides (aprox. 300 a. C.) propone, en el libro I de los trece que componen los *Elementos* [15,16] (ver Figura 2), para el desarrollo de la geometría plana, que hoy en día llamamos geometría euclídea o euclidiana.



Figura 2: Representación de Euclides con regla y compás y partes de distintos ejemplares de los *Elementos* en versiones griega y latina. El del medio se encuentra en la biblioteca del monasterio de Yuso de La Rioja [6], considerado cuna del castellano y del euskera

Recordamos a continuación los *postulados* que, junto con las definiciones básicas y las nociones comunes, forman los pilares “elementales” sobre los que Euclides desarrolla deductivamente la geometría plana:

1. Postúlese el trazar una línea recta desde un punto cualquiera hasta un punto cualquiera.

2. Y el prolongar continuamente una línea finita en línea recta.
3. Y el describir un círculo con cualquier centro o distancia.
4. Y el ser todos los ángulos rectos iguales entre sí.
5. Y que si una recta, al incidir sobre dos rectas, hace que los ángulos internos del mismo lado sean menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos (ver Figura 3).

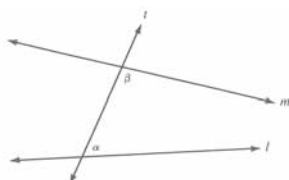


Figura 3: Quinto Postulado

El quinto postulado suele llamarse popularmente “*El Axioma de las Paralelas*” porque puede formularse equivalentemente en estos términos: “Dada una recta y un punto que no esté en ella, entonces existe una única recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada” (ver Figura 4).



Figura 4: El Axioma de las Paralelas

Poco a poco se fueron descubriendo lagunas en el sistema de postulados de Euclides, que han sido subsanadas mediante la introducción a finales del siglo XIX de sistemas axiomáticos más perfeccionados. Quizás el más popular de ellos es el que David Hilbert (1862-1943)(ver Figura 5) publicó en 1899 en su obra *Los Fundamentos de la Geometría* [30]. Este tratamiento axiomático, completado y perfeccionado hasta 1933 por el propio Hilbert y por su colaborador P. Bernays, tiene dos objetos primitivos que no necesitan ser definidos: punto y recta, y tres relaciones primitivas: incidencia, intermediación y congruencia. Suele presentarse en cinco grupos axiomáticos: I Axiomas de incidencia (3), II Axiomas de orden o intermediación (4), III Axiomas de congruencia (6), IV Axiomas de continuidad (2) y el V grupo formado sólo por un *Axioma de paralelismo*: “Dada una recta y un punto que no esté en ella, entonces existe a lo más una recta que pasa por el punto y es paralela a la recta dada”, que es equivalente al axioma de paralelismo citado anteriormente, pues, suponiendo el resto de axiomas, se sabe que al menos una paralela existe.

Parece ser que el mismo Euclides no estaba muy seguro de si su quinto postulado era o no demostrable a partir de los anteriores, pues, además de tener una redacción



Figura 5: D. Hilbert

mucho menos simple que los otros, pospuso su utilización todo lo que le fue posible: en los Elementos hay numerosas proposiciones cuya demostración no exige el uso del quinto postulado y que conducen a lo que hoy en día se suele llamar geometría neutral.

La demostrabilidad del quinto postulado fue cuestionada no sólo en tiempos de Euclides, sino mucho tiempo después. Durante más de veinte siglos, algunos de los mejores matemáticos del mundo, de distintos países, culturas y religiones, intentaron probar sin éxito (aunque haciendo de paso grandes aportaciones científicas) el axioma de las paralelas a partir de los cuatro primeros postulados. Uno de los métodos empleados era la reducción al absurdo: negar el quinto postulado en presencia de los otros cuatro y llegar a una contradicción.

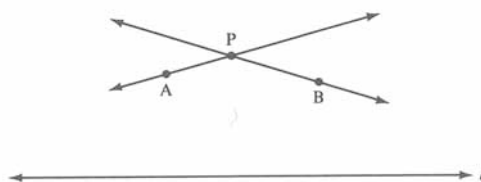


Figura 6: Negación del V Postulado de Euclides

En ese intento fracasado muchos científicos encontrarían, pero muy pocos reconocerían, una nueva geometría: la *geometría hiperbólica*, aquella que se desprende de suponer los cuatro primeros postulados de Euclides y la negación del de las paralelas.

Un análisis detallado de los científicos que con sus correspondientes aportaciones intervinieron en ese proceso tan largo puede verse en [5, 11, 26, 27]. Aquí señalaremos brevemente sólo algunos nombres cercanos al momento del descubrimiento de la nueva geometría, como G. Saccheri (1667-1733), J. H. Lambert (1728-1777), A. M. Legendre (1752-1833), F. C. Schweikart (1780-1859), F. A. Taurinus (1794-1874) o W. Bolyai (1775-1856), ver las Figuras 7 y 8.

Todos ellos realizaron enormes esfuerzos, descubrieron maravillosas propiedades de esa geometría no euclídea, pero, y quizás por el asombro en muchos casos, esto

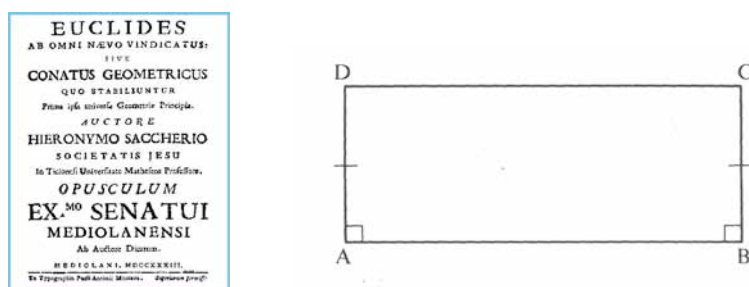


Figura 7: Libro de G. Saccheri y cuadrilátero de Saccheri en el que suponía las tres hipótesis del ángulo: obtuso, recto, agudo

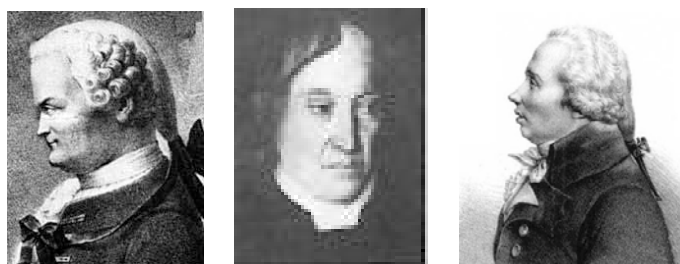


Figura 8: Lambert, W. Bolyai y Legendre

no les llevó a creer en ella, como sí creyeron los que hoy en día se considera que son los verdaderos descubridores [41](casi de forma simultánea e independiente) de la geometría hiperbólica: C. F. Gauss (1777-1855), N. I. Lobachevski (1793-1856) y J. Bolyai (1802-1860), ver la Figura 9.



Figura 9: C. F. Gauss, J. Bolyai y N. I. Lobachevski

Damos a continuación unas breves pinceladas de algunos de los maravillosos resultados que se producen en esta nueva geometría y que contrastan con resultados que todos conocemos de la geometría euclídea:

Dados una recta  $l$  y un punto  $P$  que no está en ella, se tiene no sólo que pasan por  $P$  dos rectas paralelas a  $l$  distintas, sino algo más asombroso: si  $Q$  es el pie de la perpendicular por  $P$  a  $l$ , existen dos rayos (semirrectas)  $PX$  y  $PX'$ , situados simétricamente respecto a la recta  $PQ$ , tales que dado cualquier otro rayo  $PY$ ,

éste corta a  $l$  si y sólo si está entre los rayos  $PX$  y  $PX'$ . Esto da una clasificación completa de las paralelas por  $P$  a  $l$ . Al rayo  $PX$  (y análogamente al  $PX'$ ) se le denomina *rayo paralelo límite* por  $P$  a  $l$  y se dice que la recta  $PX$  es una paralela límite o paralela asintótica de la recta  $l$ .

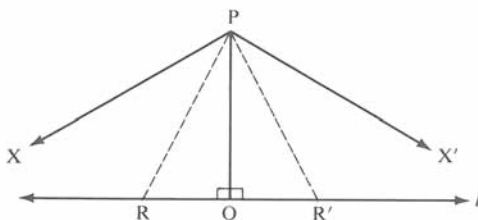


Figura 10: Rayos paralelos límite a una recta por un punto dado

Al ángulo  $\widehat{QPX}$ , y por comodidad a la medida  $\alpha < \frac{\pi}{2}$  del mismo, se le llama *ángulo de paralelismo*, y si  $d$  denota la longitud del segmento  $PQ$ , se tiene la siguiente relación:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = e^{-\frac{d}{k}}$$

donde  $k > 0$  es una constante (llamada la *constante de Gauss*). Puede fijarse esa constante como se desee, eso depende del segmento que se haya elegido como unidad de medida para la longitud (en ángulos, se asigna el valor  $\frac{\pi}{2}$  para la medida de un recto y esto fija la medida de los ángulos, pero en segmentos no hay uno privilegiado y hay que decidir cuál será la unidad), y, fijada la  $k$ , el ángulo de paralelismo  $\alpha$  aumenta cuando la distancia  $d$  disminuye.

Por otra parte, en geometría hiperbólica, si  $T$  denota un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$  y  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$  las medidas de sus ángulos, se verifica que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < \pi$  y se dice que *def*  $T = \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) > 0$  es el *defecto del triángulo*  $T$ .

El área en geometría euclídea se basa en unidades cuadradas, y de ahí la fórmula del área de un triángulo que todos conocemos, pero en geometría hiperbólica *no existen los rectángulos*, y el área de los triángulos tiene la siguiente fórmula:

$$\text{área } T = k^2 \cdot \text{def } T$$

Así que el área de un triángulo sólo depende de su defecto. En geometría euclídea, dado un triángulo cualquiera pueden construirse triángulos similares a él (es decir con ángulos iguales a los suyos), pero no congruentes, de área tan grande como se desee; pero esto no ocurre en geometría hiperbólica, donde si dos triángulos son similares, entonces son congruentes. Además, el área de todos los triángulos está acotada por  $k^2\pi$ , que es precisamente el área de lo que se denomina un triángulo triplemente asintótico (región conformada por tres rectas tales que cada dos son paralelas límite).

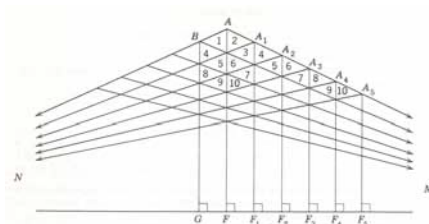


Figura 11: El área de un triángulo asintótico está acotada

Notemos que en triángulos de área pequeña el defecto es pequeño y la suma de sus ángulos está más próxima a  $\pi$ , luego se parecen más a los triángulos euclídeos. Es por ello que algunos de los matemáticos que trabajaron en esta nueva geometría, como Schweikart, la llamaron “geometría astral”, porque su diferencia con la euclídea podría ser contrastada en regiones interestelares, como la de la Figura 12.



Figura 12: Galaxia

Otros resultados interesantes se refieren a la *trigonometría hiperbólica*; es decir, a las relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo en un plano hiperbólico.

Todos recordamos bien las fórmulas más básicas de la trigonometría euclídea: La ley del coseno, el teorema de Pitágoras, etc.; en ellas intervienen las funciones trigonométricas circulares:  $\text{sen } x$ ,  $\text{cos } x$ ,  $\text{tg } x$ , etc.

En la trigonometría hiperbólica intervienen de un modo fundamental, además de las anteriores, las funciones trigonométricas hiperbólicas:  $\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\text{th } x$ , etc.

Al igual que ocurre con la geometría euclídea, la fórmula básica en la trigonometría de la geometría hiperbólica es la *ley del coseno*, que en este caso dice que si tenemos un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$  y  $a, b, c$  son las longitudes de los lados opuestos a los vértices  $A, B, C$  respectivamente, entonces:

$$(1) \quad \text{ch}\left(\frac{a}{k}\right) = \text{ch}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \text{ch}\left(\frac{c}{k}\right) - \text{sh}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{c}{k}\right) \cdot \cos \hat{A}$$

Si tenemos un triángulo  $\triangle ABC$  con el ángulo en  $C$  recto, de (1) se deduce el equivalente hiperbólico al teorema de Pitágoras y al cálculo del seno y coseno de

un ángulo agudo:

$$(2) \operatorname{ch}\left(\frac{c}{k}\right) = \operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right) \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{b}{k}\right), \quad (3) \operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)}, \quad (4) \operatorname{cos} \hat{A} = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{b}{k}\right)}{\operatorname{th}\left(\frac{c}{k}\right)}$$

Con lo anterior, de nuevo para un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$ , se obtiene la ley de los senos:

$$(5) \frac{\operatorname{sen} \hat{A}}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{k}\right)} = \frac{\operatorname{sen} \hat{B}}{\operatorname{sh}\left(\frac{b}{k}\right)} = \frac{\operatorname{sen} \hat{C}}{\operatorname{sh}\left(\frac{c}{k}\right)}$$

Y además una fórmula que nos dice que los lados de un triángulo cualquiera están completamente determinados por los ángulos de dicho triángulo (para la cual, obviamente, no hay análoga euclídea):

$$(6) \operatorname{cos} \hat{A} = -\operatorname{cos} \hat{B} \cdot \operatorname{cos} \hat{C} + \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \cdot \operatorname{ch}\left(\frac{a}{k}\right)$$

## 1.2. La esfera y su mágica creación de geometrías

Veremos a continuación cómo la esfera y su propia geometría es la fuente de la que, con un poquito de magia matemática (y toda magia tiene su truco), llegan a manar esas dos geometrías contrapuestas: la hiperbólica y la euclídea.

Consideremos una esfera de radio un número real  $k > 0$  y su geometría esférica, donde los puntos son los puntos de la esfera y las rectas son los círculos máximos. Así que en esta geometría no existen las rectas paralelas, es una geometría de tipo proyectivo (de la que se obtiene la geometría proyectiva plana tomando como puntos las parejas de puntos antipodales), de una naturaleza por tanto muy diferente a la euclídea y a la hiperbólica (las cuales comparten todos los principios fundamentales excepto uno: la euclídea añade el axioma de las paralelas y la hiperbólica la negación del mismo).

Son resultados bien conocidos de la *geometría esférica* que, si consideramos un triángulo esférico cualquiera  $T = \triangle ABC$ , se tiene que la suma de las medidas de sus ángulos  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$  es mayor que  $\pi$  y por tanto  $T$  tiene defecto negativo,  $\operatorname{def} T = \pi - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) < 0$ , o lo que es lo mismo, exceso  $\operatorname{exc} T = -\operatorname{def} T > 0$ . El área de dicho triángulo viene dada por la fórmula:

$$\operatorname{área} T = k^2 \cdot \operatorname{exc} T = -k^2 \cdot \operatorname{def} T.$$

Además, la fórmula básica de la trigonometría esférica es la ley del coseno, que dice que si tenemos un triángulo cualquiera  $\triangle ABC$  y  $a, b, c$  son las longitudes de los lados opuestos a los vértices  $A, B, C$  respectivamente, entonces:

$$(1_{esf}) \operatorname{cos}\left(\frac{a}{k}\right) = \operatorname{cos}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \operatorname{cos}\left(\frac{c}{k}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{c}{k}\right) \cdot \operatorname{cos} \hat{A}$$



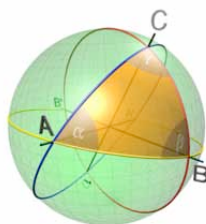


Figura 13: Triángulo en la esfera

Ahora, siguiendo los pasos de Lambert y Taurinos, cambiemos el radio real  $k$  de nuestra esfera por el radio imaginario  $ik$  (donde  $i$  es la unidad imaginaria  $i \in \mathcal{C}, i^2 = -1$ ) y sustituyamos en la fórmula anterior ( $1_{esf}$ ) el valor  $k$  por  $ik$ . Entonces, teniendo en cuenta que  $\text{ch } x = \cos(ix)$  y que  $i \text{ sh } x = \text{sen}(ix)$ , aparece la fórmula básica de la *geometría hiperbólica*:

$$(1) \quad \text{ch}\left(\frac{a}{k}\right) = \text{ch}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \text{ch}\left(\frac{c}{k}\right) - \text{sh}\left(\frac{b}{k}\right) \cdot \text{sh}\left(\frac{c}{k}\right) \cdot \cos \hat{A}$$

Por último, siguiendo a Gauss, hagamos  $k = \infty$  en la fórmula hiperbólica (1). Un sencillo cálculo de límites hará que ésta se convierta en la fórmula básica (ley del coseno) de la *geometría euclídea*:

$$(1_{eu}) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Así que todas las geometrías planas podrían verse como la geometría de una esfera: La proyectiva como la de una esfera de radio real con identificación de antípodas, la hiperbólica como la de una esfera de radio imaginario, y la euclídea como la de una esfera imaginaria con radio infinito. ¡Maravilloso!

### 1.3. El papel de la esfera en la consistencia de la geometría hiperbólica

Uno de los problemas que tiene cualquier teoría matemática es el de su *consistencia*; es decir, la seguridad de que el desarrollo de la teoría no conduzca a la larga a una contradicción.

Es notable el hecho de que un genio reconocido como Gauss no publicara en vida nada de su enorme trabajo y sus grandes hallazgos en la nueva geometría, lo que sí hicieron J. Bolyai y Lobachevski. sta es la razón por la cuál la publicación del descubrimiento por parte de J. Bolyai en 1831 como un *Apéndice* del libro *Tentamen...* [4] de su padre F. Bolyai y por parte de Lobachevski en la memoria *Sobre los fundamentos de la Geometría* [36] que fue publicada entre los años 1829 y 1830 en la revista de su universidad “Boletín de Kazán”, son anteriores a la publicación de los trabajos de Gauss.

Por lo que hoy se sabe a través de las cartas que Gauss dirigió a un reducido número de matemáticos interesados por sus ideas, a los que dio a conocer parte de sus descubrimientos en geometría hiperbólica, parece que el impedir que su obra en esta materia se publicara mientras él estuviera vivo se debió no sólo al intento de evitar enfrentamientos con la mayoría de la comunidad matemática, impregnada en ese momento de ideas Kantianas [32] e imposibilitada por tanto para admitir una geometría no euclídea, sino a que estaba preocupado por no tener todavía la prueba clara de su consistencia.

Afortunadamente, unos años después, grandes matemáticos, como H. Poincaré, E. Beltrami, F. Klein, etc., se interesaron por esta materia, creando “*modelos euclídeos para la geometría hiperbólica*” (esto es, partiendo de un plano euclídeo llegar a obtener un modelo de plano hiperbólico). Así demostraron que si la geometría euclídea es consistente, entonces también lo es la hiperbólica; o lo que es lo mismo, *si se cree que la geometría euclídea existe, entonces es incuestionable la existencia también de la geometría no euclídea.*



Figura 14: Poincaré, Beltrami y Klein

Los modelos más populares son los llamados: (1) Modelo del disco de Poincaré, (2) Modelo del disco de Beltrami-Klein y (3) Modelo del semiplano de Poincaré (a los que vamos a denotar por  $MDP$ ,  $MDBK$  y  $MSP$  respectivamente y cuya descripción completa puede verse, por ejemplo, en [26]).

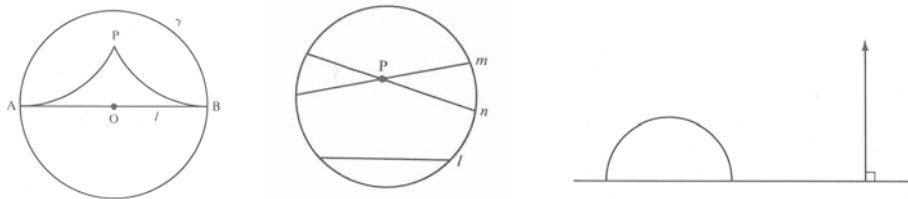


Figura 15: Modelos del plano hiperbólico: de izquierda a derecha  $MDP$ ,  $MDBK$  y  $MSP$

En el primero y segundo se parte de un disco en un plano euclídeo determinado por una circunferencia  $\Sigma$  cualquiera (por comodidad suele considerarse el disco unidad) y se toman como “puntos” los puntos del interior del disco y como “rectas”

se toman en el primero la parte interior de las “circunferencias” (esto es, rectas o circunferencias) ortogonales a  $\Sigma$  y en el segundo la parte interior de las cuerdas del disco. En el tercer modelo se parte de un semiplano determinado por una recta  $l$  cualquiera en un plano euclídeo (por comodidad suele considerarse el semiplano superior correspondiente al eje de abscisas) y se toman como “puntos” los puntos de dicho semiplano abierto (es decir, los que no están en  $l$ ) y como “rectas” la parte de las “circunferencias” ortogonales a  $l$  contenida en el semiplano abierto. En el primer y tercer modelo los ángulos se miden directamente de modo euclídeo sin distorsionar su medida, mientras que en el segundo modelo se distorsiona la medida euclídea de los ángulos; las medidas de segmentos se distorsionan en los tres modelos respecto a las longitudes euclídeas correspondientes, y, en base a la medida, se establecen las relaciones de congruencia para segmentos y ángulos en los tres modelos. La relación de orden o intermediación de puntos es en los tres modelos la misma que la euclídea.

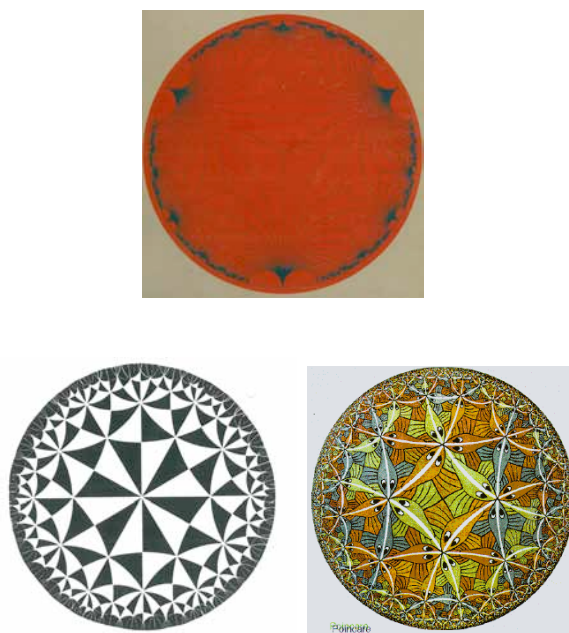


Figura 16: Arriba, Modelo del disco de Poincaré teselado por triángulos asintóticos que aparece en la portada de una edición de un libro de Greenberg [26]. Debajo, otra teselación diferente del mismo modelo de un libro de Coxeter [7] en la que se inspiró Escher [14] para su famosa obra “Peces” que aparece a la derecha

Hay muchas maneras de comprobar que los tres modelos para la geometría hiperbólica señalados anteriormente son isomorfos. Aquí vamos a resaltar cómo *a través de la esfera* podemos visualizar de una forma geométrica muy atractiva

isomorfismos entre los modelos  $MDP$ ,  $MDBK$  y  $MSP$ .

Para ello se utilizará la proyección estereográfica; esto es, la biyección que permite pensar la esfera unidad sin un punto como el plano  $\mathbb{R}^2$  y viceversa. Geométricamente, si consideramos el polo norte  $N$  de la esfera unidad  $S^2$  y  $\mathbb{R}^2$  como su plano ecuatorial, la proyección estereográfica desde el polo norte es la aplicación  $f_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que a cada punto  $Q \in S^2 \setminus \{N\}$  le hace corresponder el punto  $f_N(Q)$  en el que la recta  $NQ$  corta al plano ecuatorial, ver la Figura 17. Su inversa  $f_N^{-1}$  suele llamarse también proyección estereográfica del plano ecuatorial sobre la esfera sin el polo norte. Análogamente, puede definirse la proyección estereográfica desde cualquier otro punto de la esfera en otros planos.

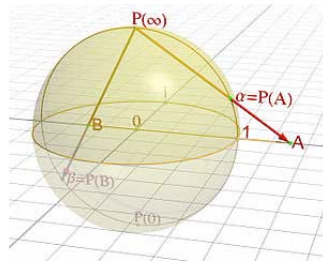


Figura 17: Proyección estereográfica

Ahora, podemos ver un isomorfismo  $F : MDP \rightarrow MDBK$  sin más que considerar una proyección estereográfica desde el polo norte  $N$  del disco  $MDP$  en el hemisferio sur  $\mathcal{H}$  de la esfera, seguida de una simple proyección ortogonal de  $\mathcal{H}$  en el disco  $MDBK$ , ver la Figura 18.



Figura 18: La esfera y el isomorfismo entre los modelos  $MDP$  y  $MDBK$

Si deseamos ver un isomorfismo  $G : MDP \rightarrow MSP$  sólo tenemos que realizar como antes una proyección estereográfica desde el polo norte  $N$  del disco  $MDP$  en el hemisferio sur  $\mathcal{H}$  de la esfera y continuar con otra proyección estereográfica desde el punto  $E$  de la esfera, del hemisferio sur  $\mathcal{H}$  en el plano tangente por  $W$  para obtener  $MSP$ , como indica la Figura 19.

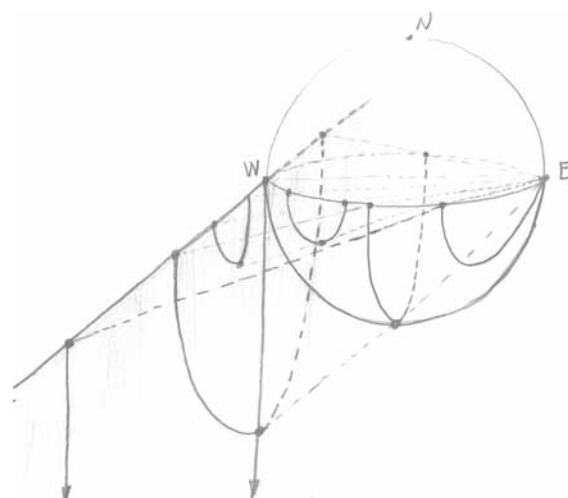


Figura 19: La esfera y el isomorfismo entre los modelos MDP y MSP

Por otra parte, notemos que si consideramos la biyección  $\mathbb{R}^2 \cong \mathcal{C}$ , entonces (vía la proyección estereográfica ampliada, donde  $f_N(N) = \infty$ ) podemos pensar *la esfera como el plano ampliado por un punto del infinito*:

$$S^2 \cong \mathcal{C} \cup \{\infty\}.$$

Las aplicaciones de la forma  $h : \mathcal{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  dadas por  $h(z) = w$  con  $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  (para  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathcal{C}$  tales que  $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ ), forman con la composición un grupo destacable, el llamado grupo de las transformaciones de Moebius  $\mathcal{M}$ , y tienen la virtud geométrica de transformar “circunferencias” en “circunferencias” sin alterar el ángulo de intersección entre ellas y preservan la razón doble de cuatro puntos  $(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}$ .

Pensada la esfera como el plano ampliado, el papel que juega el grupo  $\mathcal{M}$  en la geometría hiperbólica es muy importante: Si tomamos un disco abierto de radio  $r > 0$ ,  $D_r = \{z \in \mathcal{C} \mid |z| < r\}$ , el subgrupo de  $\mathcal{M}$  formado por aquellas aplicaciones que transforman el disco  $D_r$  en sí mismo:

$$\mathcal{D}_r = \left\{ L \in \mathcal{M} \mid L(z) = \mu \frac{z - \alpha}{\gamma^2 - \bar{\alpha}z}, |\alpha| < r, |\mu| = r^2 \right\}$$

(donde para  $z = x + iy \in \mathcal{C}$ ,  $\bar{z} = x - iy$  denota su conjugado), puede interpretarse, siguiendo la filosofía de Klein, como *el grupo de los movimientos del plano hiperbólico*; es decir las transformaciones biyectivas del plano hiperbólico en sí mismo que transforman puntos en puntos, rectas en rectas y preservan la incidencia, el orden y la congruencia. Para ello basta pensar en el modelo del disco de Poincaré *MDP* y se tiene que dos subconjuntos son congruentes  $E_1 \sim E_2$  si y sólo si existe  $L \in \mathcal{D}_r$  tal que  $L(E_1) = L(E_2)$  o  $L(E_1) = \bar{E}_2$ ; lo que, por ejemplo, para dos segmentos

$ab$  y  $a'b'$  significa que su longitud hiperbólica es la misma  $d(ab) = d(a'b')$ , siendo  $d(ab) = \log(a, b, t, s)$  donde  $t$  y  $s$  son los puntos de corte de la “circunferencia” determinada por  $a$  y  $b$  con la circunferencia borde del disco  $D_r$ .

## 2. Las esferas poliedrales, entre la geometría y la topología

### 2.1. Muchos poliedros y una sola esfera

En el ámbito de la *Geometría*, un polígono es, en lenguaje coloquial, una región del plano euclídeo delimitada por un número finito de segmentos no colineales (lados o aristas, a cuyos extremos llamamos vértices). Se dice que es regular si todos sus lados son iguales y los ángulos determinados por ellos en los vértices también lo son, y que es convexo si es una región convexa (lo que significa que el segmento determinado por dos puntos cualesquiera de la región también está contenido en ella). De manera análoga, situándonos en el espacio euclídeo tridimensional, se dice que un *poliedro* es una región del mismo delimitada por un número finito de polígonos no coplanarios (a los que llamamos caras). Se le llama regular si todas sus caras son polígonos regulares iguales y convexo si es una región convexa. De forma parecida, considerando dimensiones sucesivamente mayores, se definen los llamados politopos, politopos regulares, etc. [8].

Desde la antigüedad se conoce que existen solamente cinco poliedros regulares convexos, los llamados Sólidos Platónicos: el tetraedro (cuatro caras triangulares), el cubo o hexaedro (seis caras cuadradas), el octaedro (ocho caras triangulares), el dodecaedro (doce caras pentagonales) y el icosaedro (veinte caras triangulares).

El interés por éstos y por otras clases de poliedros donde se rebajan las condiciones de regularidad o convexidad ha sido constante a lo largo de la historia. En el *Timeo* de Platón [43] se utilizan para explicar la construcción del universo asociándolos a los elementos de los que está compuesto: átomos de fuego (tetraedro), tierra (cubo), aire (octaedro) y agua (icosaedro); el universo se asocia con el dodecaedro, ver la Figura 20.

Además de la esfera (el libro de N. Copérnico (1473-1543) *De las revoluciones de las esferas celestes* suele considerarse el punto inicial de la astronomía moderna por proponer un modelo heliocéntrico del sistema solar), los sólidos anteriores y otros poliedros han sido utilizados por J. Kepler (1571-1630) (seguidor, junto con Galileo (1564-1642), de la teoría heliocéntrica de Copérnico) y otros científicos astrónomos para comprender la estructura del universo y las leyes que lo rigen, enunciando diversas teorías cosmológicas [33, 34], ver la Figura 21.

Geniales artistas, como Leonardo, Durero, Dalí, Picasso y muchísimos otros, también han estudiado, utilizado y se han inspirado en poliedros para construir sus obras desde el Renacimiento hasta nuestros días [22, 40, 42], como muestra la Figura 22, donde puede verse en la parte superior un poliedro vaciado de Leonar-



Figura 20: A la izquierda, piedras del neolítico (aprox. 2000 a. C.) encontradas en Escocia, y, a la derecha, dibujos de Kepler sobre los elementos y Cuerpos Platónicos

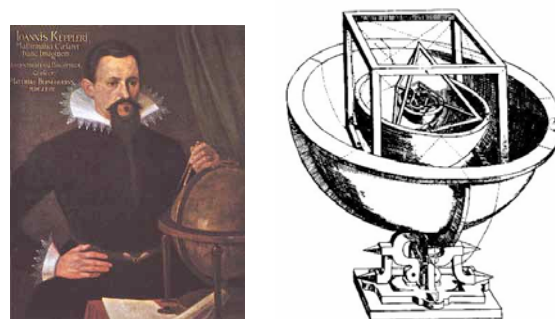


Figura 21: Kepler y uno de sus Modelos C3smicos

do y el grabado *Melancolía* de Durero, y, en la inferior, las pinturas *Un mundo* (1929) de A. Santos y *Dalí desnudo, en contemplación ante cinco cuerpos regulares metamorfoseados en corpúsculos, ...* (1954) de S. Dalí.

Numerosos matemáticos de todas las épocas, como Euclides, Arquímedes, Gauss, Cauchy, Catalan, Coxeter, Skilling, Johnson o Zalgaller entre otros (ver referencias bibliográficas detalladas en [19]), han contribuido con su apasionado estudio a descubrir y analizar nuevas clases de poliedros donde se rebajan las condiciones de regularidad o convexidad de los sólidos platónicos, ver la Figura 23.

Si ahora entramos en el ámbito de la *Topología* y a los atractivos objetos anteriores les aplicamos el punto de vista topológico más básico, obtendremos que todos los poliedros que existen son topológicamente lo mismo: un disco tridimensional; y su borde, cuya configuración poligonal determina por completo el poliedro, es *siempre una esfera* como la de la Figura 24.

Esta mirada topológica tan simple puede sernos útil en muchas ocasiones, pero tiene como contrapartida una pérdida de la riqueza estructural anteriormente descrita en esos objetos.

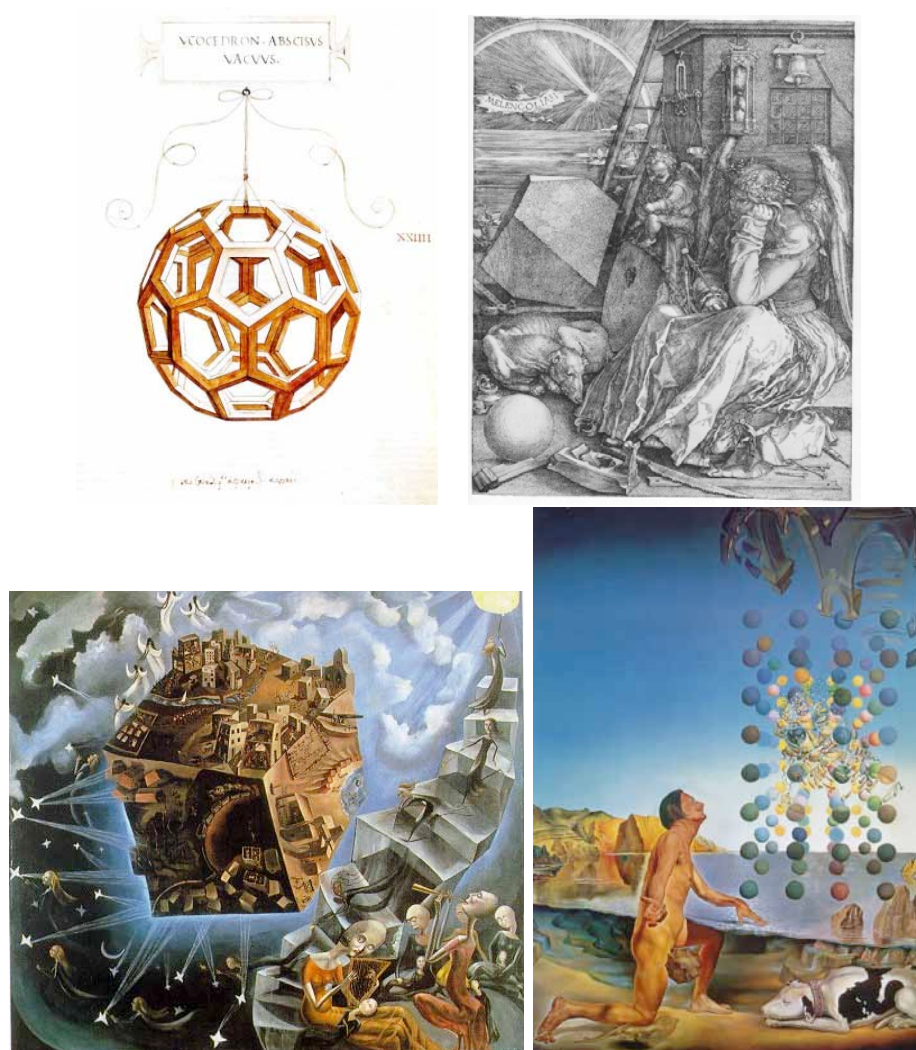


Figura 22: Poliedros en el arte

Afortunadamente, si el punto de vista topológico es un poco más avanzado, existe una *noción híbrida topológico-geométrica* con la que, manteniendo un proceso constructivo de tipo poliedral, podemos relajar la rigidez geométrica para ganar la elasticidad topológica. Esta noción, debida a J. H. C. Whitehead, es la de CW-complejo o espacio o complejo celular [52]. Un *complejo celular* (o, más informalmente, un *poliedro topológico* o espacio poliedral) es un espacio topológico construido con piezas sencillas, de diversas dimensiones, llamadas celdas (copias topológicas de discos de la dimensión correspondiente). Se forman a partir de un espacio discreto de puntos (0-celdas o vértices), al que se le van pegando sucesivamente una colección (quizás vacía) de celdas de dimensión cada vez mayor, por los bordes de éstas. Estos objetos pueden tener un número finito o infinito de celdas,



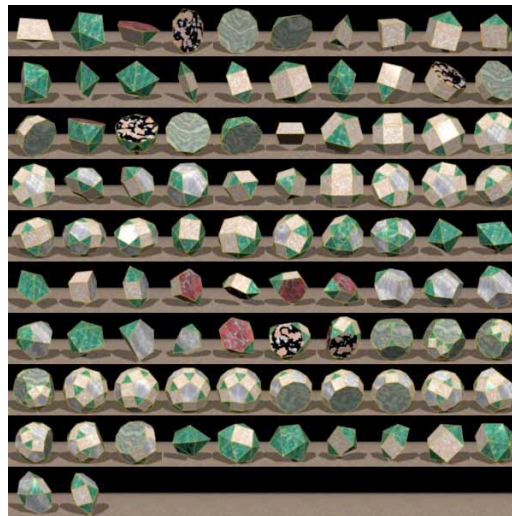


Figura 23: Galería de poliedros



Figura 24: Esfera

y, en este último caso, ser su dimensión finita o infinita. Lo interesante es que un espacio celular no es sólo un espacio topológico construido de esta forma, sino también la estructura celular fijada para construirlo. Muchos objetos matemáticos que se estudian, no sólo en Geometría y Topología, sino en diversas ramas científicas y tecnológicas, tienen esta estructura celular y sirven para modelar numerosos fenómenos y poder realizar cálculos gracias a su estructura (basta pensar que algo tan útil como un grafo es sencillamente un espacio celular de dimensión uno). También podemos encontrarlos en la naturaleza, ver la Figuras 25 y 26 [1], y en numerosas obras técnicas y artísticas.

Utilizando la noción anterior de espacio celular o poliedro topológico, podemos considerar en la esfera, como en la Figura 27, múltiples estructuras celulares, incluyendo los poliedros geométricos señalados al comienzo.

Así, en lugar de tener una sola esfera, si a ésta le añadimos diferentes trajes celulares, podemos obtener tantas *esferas poliedrales* como deseemos. De esta forma, la esfera se convierte en un objeto matemático que gana en versatilidad a la hora de ser aplicado para *modelar y analizar multitud de fenómenos* en distintas



Figura 25: Escama. Heliozoos. Camaleón. Tortuga

áreas de trabajo.

## 2.2. Dos escenarios para las esferas poliedrales

A continuación, para ilustrar lo anterior, vamos a mostrar brevemente dos escenarios diferentes donde la esfera hace su aparición vestida con diferentes trajes poliedrales.

El primero de ellos está en el ámbito de la *Virología*, uno de los campos de investigación más interesantes de la actualidad, debido a que numerosas enfermedades humanas, de animales y de plantas son causadas por *virus*. El estudio de éstos como ciencia es bastante reciente y tuvo avances muy rápidos a partir de los años cincuenta del siglo pasado en paralelo con los de la biogenética y biología molecular.

La clasificación de los virus tiene en cuenta dos aspectos importantes: La naturaleza de su material genético y la simetría y composición de su *cápside*. El ácido nucleico, que lleva la información genética propia de cada virus, va anudado dentro de una capa proteica llamada cápside, la cuál está compuesta por numerosas unidades sujetas a ciertas simetrías que hacen que esta capa adquiera una *estructura poliedral óptima*, que varía de unos virus a otros, capaz de formar un sello que envuelva al ácido (pueden verse referencias detalladas en [19]).

La teoría sobre la estructura poliedral de la cápside de los virus fue iniciada por F. Crick y J. Watson en 1957 y, a raíz de posteriores investigaciones, universalmente aceptada (cabe señalar que recibieron en 1962, junto a M. Wilkins, el premio Nobel de Medicina por sus estudios sobre la estructura del ADN, ver la Figura 29).

La determinación de la estructura poliedral de la cápside es importante. Los



Figura 26: Mineral. Jirafas. Panal de abejas



Figura 27: Esferas poliedrales deportivas

virus están obligados, debido al proceso de reproducción, a ser parásitos intracelulares; necesitan una célula hospedadora donde replicar su ácido nucleico y tomar la maquinaria sintética para reproducirse completamente y transmitirse a otras células. En este proceso, en el cuál el metabolismo del organismo afectado se perturba, la cápside protege al virus del exterior, pero a la vez es una parte importante que el organismo invadido puede reconocer para crear anticuerpos.

En la gran mayoría de los virus estudiados, la cápside tiene forma esférica y una morfología con protuberancias y hendiduras que la dota de una estructura de espacio celular, haciendo con ello que entren en escena las correspondientes *esferas poliedrales*, ver la Figura 30.

El segundo de los escenarios que vamos a contemplar es el de la *Química*, donde

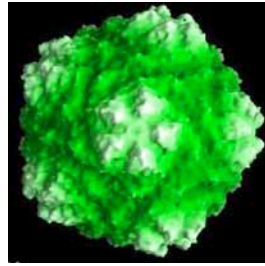


Figura 28: Cápside de un virus

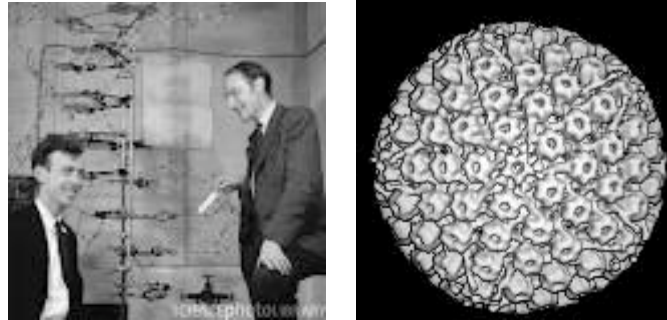


Figura 29: Crick y Watson mostrando un esquema de una molécula de ADN. A la derecha, cápside de un virus

es habitual establecer diversos criterios para asociar una estructura poliedral, o incluso una familia de ellas, a cada molécula o sustancia, de manera que algunas propiedades químicas o físicas a analizar queden reflejadas por esa estructura (puede verse bibliografía detallada en [19, 2]).

Un campo de la Química, especialmente rico en investigación, en el que se usan mucho estas técnicas es el de los *Fullerenos* [9, 12]: moléculas constituidas exclusivamente por átomos de carbono, como ocurre con el diamante y el grafito de la Figura 32.

Esta rama se inició con el descubrimiento que en 1985 hicieron los investigadores

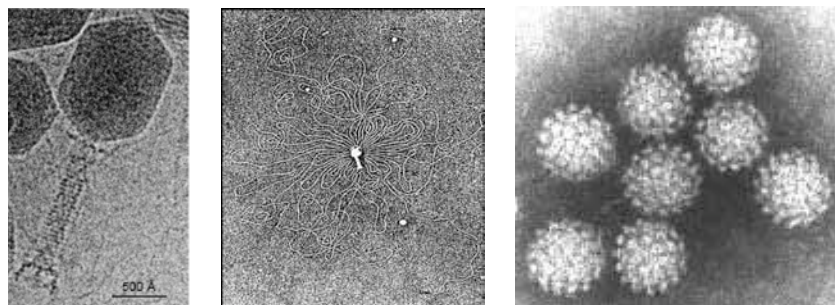


Figura 30: A la izquierda, ADN dentro y fuera de un virus bacteriófago. A la derecha, cápsides de virus

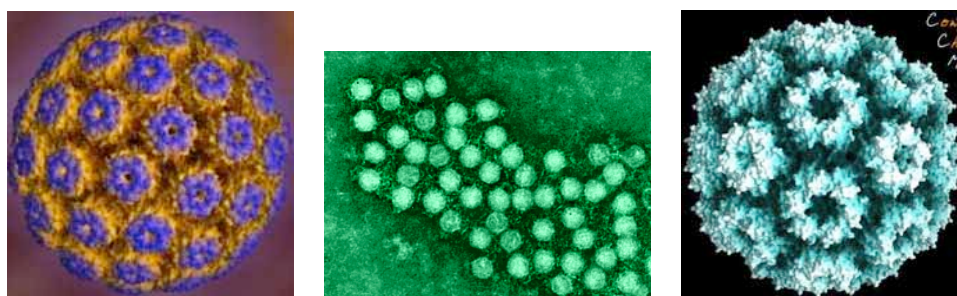


Figura 31: Virus esféricos. A la derecha, el virus CCMV, que tiene la forma de un icosaedro truncado

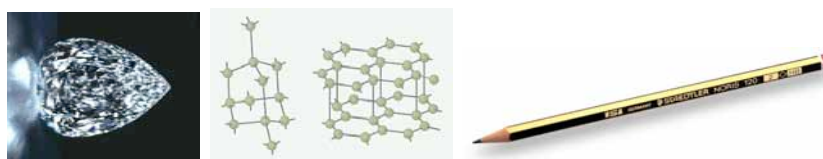


Figura 32: A la izquierda diamante y a la derecha grafito

H. Kroto, R. Smalley y R. Curl de la *molécula C60* [35] (por lo que recibieron el premio Nobel de Química en 1996), ver la Figura 33.

El descubrimiento se produjo cuando el astroquímico Kroto colaboró con los otros dos químicos para reproducir en laboratorio la atmósfera de las estrellas gigantes rojas, ricas en agregados de carbono, buscando una explicación sobre su formación y el modo de mantenerse unidos durante el viaje interestelar. Cuando, al obtener espectros de agrupaciones de 60 átomos de carbono, se plantearon cuál sería la forma en la que los átomos se entrelazaban para formar una cadena estable, descubrieron que ésta era la de una jaula esférica conformada por 12 pentágonos y 20 hexágonos.

Así que la molécula C60, llamada por muchos “la más bella molécula”, se presentaba como una “esfera poliedral con un bellissimo traje”, la estructura de un icosaedro truncado. Sus descubridores llamaron a esta molécula buckminsterfullereno, abreviadamente fullereno o buckybola, en honor de R. Bunckminster Fuller, pues les recordaba las cúpulas esféricas poliedrales diseñadas por el famoso arquitecto, ver la Figura 34.

Posteriormente, cuando las técnicas avanzaron y se logró obtener grandes cantidades de C60 y de otros fullerenos con distinto número de átomos, se produjo una explosión de investigación sobre este tema y sus posibles aplicaciones tanto a nivel teórico como práctico en diversos ámbitos, que hoy en día sigue muy activa.

A la hora de crear fullerenos es frecuente tener ciertas condiciones adicionales sobre su estructura poliedral; entre ellas, la de que las caras sean pentagonales, hexagonales o heptagonales. Intercalando pentágonos o heptágonos entre los hexágonos obtenidos de láminas planas de grafito se consiguen zonas de curvatura

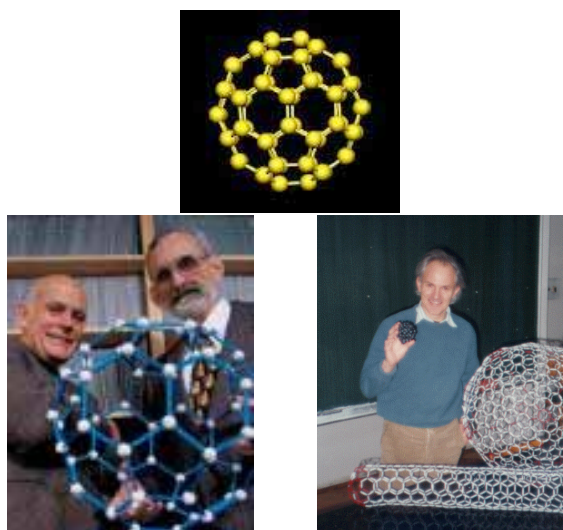


Figura 33: C60 y debajo, de izquierda a derecha, sus descubridores: Smalley, Curl y Kroto con modelos de algunos fullerenos



Figura 34: Dibujos de Fuller y el pabellón de EEUU que diseñó para la Exposición Mundial de Montreal en 1967

positiva o negativa, respectivamente.

Si lo que se desea obtener son fullerenos de tipo esférico, el uso de un invariante topológico como la característica de Euler (fórmula que da la diferencia entre el número total de celdas de dimensión par y el número total de celdas de dimensión impar en un espacio celular finito), nos dice que para todas las esferas poliedrales su *característica de Euler es 2*, y esto proporciona la *regla básica* teórica para la construcción de todos los posibles *fullerenos esféricos* [53].

De éstos, los que tienen una forma redondeada más parecida a un balón suelen denominarse también buckybolos y los que tienen una forma más alargada buckytubos o nanotubos; estos últimos son parecidos a finísimos hilos que en muchos casos contienen más de un millón de átomos de carbono, ver la Figura 35. Además

de sus numerosas aplicaciones [13, 31, 39, 47, 48] en muchas áreas como la ingeniería, química, astrofísica o informática, se utilizan para la creación de nuevos materiales, injertos o fármacos.

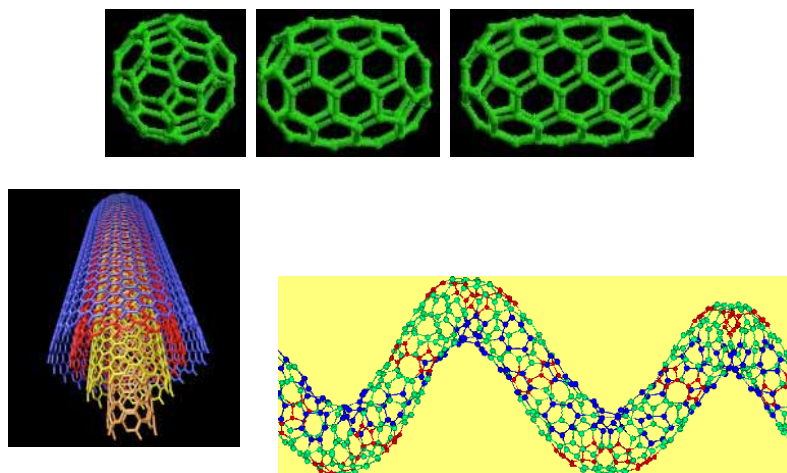


Figura 35: Fullerenos esféricos y fullerenos tubulares seccionados

Así que las múltiples esferas poliedrales en las que puede convertirse la sencilla esfera  $S^2$  son, además de bonitas, ¡realmente interesantes!

### 3. Esferas fractales y sistemas dinámicos

#### 3.1. Esferas en nuestro camino

Vamos a dedicar esta sección a comentar cómo la esfera y una parte de su gran riqueza matemática nos ha ayudado al equipo de investigación del que formamos parte los autores de este trabajo en una de las líneas de investigación que estamos desarrollando en la actualidad.

Para enmarcar esta línea, señalaremos que inicialmente la investigación de nuestro equipo se produjo durante varios años, dentro de la Topología Algebraica, en el campo de la llamada *Teoría de Homotopía Propia* [17, 18 y 46], donde, en lugar de trabajar con espacios topológicos y aplicaciones continuas entre ellos (como se hace en la Teoría de Homotopía clásica), se sustituyen éstas por las denominadas aplicaciones propias. Hablando coloquialmente, una aplicación propia es una aplicación continua que también lo es en el infinito (más rigurosamente, tal que la preimagen de todo compacto cerrado es un compacto). El cambio a este tipo de aplicaciones para el estudio de muchos problemas en variedades no compactas fue propuesto en 1969 por el matemático L. C. Siebenmann [49] a raíz de obtener relevantes resultados en este tema.

A pesar del interés que tiene la categoría propia, ésta tiene un problema: no es



Figura 36: Siebenmann

posible desarrollar en ella algunas construcciones homotópicas habituales (lazos, fibras homotópicas, etc.) debido a que no tiene suficientes límites y colímites. Una reciente solución a este problema ha consistido en ampliar el marco de la teoría de homotopía propia introduciendo la noción de “espacio exterior”. Un espacio exterior es un espacio topológico junto con la selección de una subfamilia concreta de abiertos (a la que llamamos *externología* y a sus elementos abiertos exteriores) sujeta a unas reglas de tipo filtro. Entre este tipo de espacios se consideran las denominadas aplicaciones exteriores (aplicaciones continuas tales que la preimagen de todo abierto exterior es un abierto exterior) y se obtiene con esto la categoría exterior, que contiene a la categoría propia como subcategoría plena, pero con la ventaja de que ahora sí se dispone de todos los límites y colímites necesarios para desarrollar bien teoría de homotopía en ella [23]. Así que estos últimos años nuestro equipo se ha centrado en el desarrollo de la *Teoría de Homotopía Exterior*, su conexión con otras teorías y su posible aplicación en otros ámbitos [20, 10]. Obviamente, a los *objetos básicos* en la teoría de homotopía clásica (*esferas*  $n$ -dimensionales  $S^n$ , para todo  $n \geq 0$ ) se añaden otro tipo de “*esferas*” más sofisticadas para crear los grupos de homotopía adecuados, tanto en homotopía propia como exterior.

Uno de los campos en los que actualmente estamos explorando la aplicabilidad de las herramientas que proporciona la teoría de los espacios exteriores, es el estudio topológico de *Sistemas Dinámicos*. Los sistemas dinámicos (flujos) son objetos matemáticos de un enorme interés, pues tienen aplicación directa en gran cantidad de áreas científicas y tecnológicas, y su estudio ha sido abordado desde muchas perspectivas, continuando muy activo en el momento actual. En el ámbito de la Topología, los trabajos pioneros de Poincaré [44,45] a finales del siglo XIX y los posteriores de [3] a principios del XX ya indicaron que el estudio de propiedades topológicas en los flujos podía resultar interesante para el análisis de su dinámica.

Así que últimamente estamos dedicados al estudio y desarrollo de lo que llamamos *sistemas dinámicos exteriores* [24, 25, 28], unos objetos matemáticos híbridos creados a partir de la noción clásica de flujo y de la noción de espacio exterior, con la idea de aplicar las construcciones y propiedades de los espacios exteriores (espacios límite, puntos finales, herramientas homotópicas, etc.) al estudio de la



dinámica de los flujos, tanto continuos como discretos.

Si nos centramos en los flujos discretos, y más concretamente en semiflujos discretos exteriores en espacios métricos, con estas técnicas se puede asociar a un semiflujo discreto dado otros de tipo exterior con los que analizar y relacionar aspectos dinámicos importantes (puntos fijos, periódicos, límites, cuencas de atracción, etc.). En particular, hemos estudiado semiflujos discretos asociados a funciones racionales complejas y es aquí donde la “sencilla” esfera  $S^2$  a la que estamos dedicando este trabajo interviene del modo que comentaremos a continuación.

### 3.2. Fracturando un semiflujo discreto

En la sección anterior, hemos recordado cómo la esfera y los cinco poliedros regulares fueron en un principio utilizados para entender el universo como una “creación perfecta y ordenada”. De hecho, la admisión por parte de Kepler de que la Tierra era un “mundo imperfecto asolado por las guerras” hizo que abandonara la idea del “mundo perfecto del círculo” para pasar a enunciar su famosa teoría de órbitas elípticas para el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Y, a lo largo de toda la historia de la ciencia, la necesidad de *avanzar en la explicación de muchos fenómenos* ha hecho que aparezcan nuevos objetos matemáticos más complejos, y con ellos teorías mucho más sofisticadas, que los objetos geométricos anteriores (un ejemplo muy simple de esto serían las esferas poliedrales ya comentadas).

En 1982, el matemático B. Mandelbrot (1924-2010) [37,38](ver la Figura 37), en su obra *The fractal geometry of nature*, parte del supuesto de que “... el universo está regido por una especie de compleja irregularidad controlada, ya que en numerosos fenómenos de la Naturaleza impera una curiosa “complejidad armónica” que está representada por los “fractales”...”, unos nuevos objetos matemáticos con los que se dio forma inicial a la famosa Teoría del Caos.

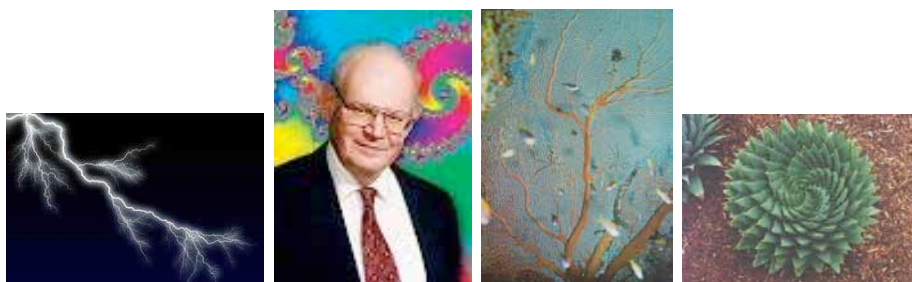


Figura 37: Fractales en la naturaleza: rayos, corales y cactus. Entre ellos, Mandelbrot

Con la palabra *Fractal* (del latín “fractus”: fracturado, roto, irregular), introducida en 1975 por Mandelbrot, éste denominaba aquellas figuras geométricas que son generadas y agrupadas por un proceso de repetición, de tal modo que la figura

geométrica final resultante se caracteriza por tener a toda escala el mismo detalle de su figura básica, por tener longitud infinita hacia lo microscópico y lo macroscópico, por no ser diferenciable en las partes que la componen y por exhibir una dimensión fraccionaria. Hoy en día hay diversas nociones de fractal más generales que la de Mandelbrot y estos objetos han pasado a ser muy populares por su belleza y de un enorme interés científico. La llamada “geometría fractal” [21] es una nueva herramienta matemática con la que abordar estudios que tratan de explicar nuevos modelos ideales de la realidad.

Si pensamos ahora en los sistemas dinámicos más simples, los semiflujos discretos  $X = (X, f)$  (donde  $X$  es un espacio topológico y  $f: X \rightarrow X$  una aplicación continua, o lo que es lo mismo, una acción  $\mathcal{N} \times X \rightarrow X$ ), podemos ver en ellos un punto en común con los fractales, puesto que la trayectoria de un punto cualquiera  $x \in X$  se genera por un proceso de repetición:  $(f^n(x))_{n \in \mathcal{N}} = (x = f^0(x), f(x), f^2(x) = f(f(x)), \dots)$ . Si  $f(x) = x$ , se dice que el punto  $x$  es un punto fijo y si existe un  $n \in \mathcal{N}$ ,  $n \neq 0$ , tal que  $f^n(x) = x$  se dice que es periódico.

En el caso de ser  $X$  un espacio métrico, ciertas nociones correspondientes a la teoría de espacios y flujos exteriores que pueden ser aplicadas para estudiar su dinámica, se pueden interpretar de un modo más simple a través de la métrica  $d$  del espacio. Por ejemplo, se define el espacio de puntos finales del semiflujo discreto  $X$  como el conjunto cociente:

$$\Pi(X) = \frac{\{(f^n(x))_{n \in \mathcal{N}} \mid x \in X\}}{\sim}$$

(donde para  $x, y \in X$ ,  $(f^n(x)) \sim (f^n(y))$  si y sólo si  $(d(f^n(x), f^n(y))) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ) y todo elemento  $a = [(f^n(x))] \in \Pi(X)$  se denomina punto final de  $X$  (así que todo punto fijo  $x$  puede interpretarse como un punto final  $[(x)] = [(x, x, \dots)] \in \Pi(X)$ ). La aplicación natural

$$\omega: X \rightarrow \Pi(X)$$

(dada por  $\omega(x) = [(f^n(x))] = [(x, f(x), f^2(x), \dots)]$ ) permite *descomponer* o *fracturar* el semiflujo discreto  $X$  como una reunión de *cuenca*s de puntos finales:

$$X = \bigsqcup_{a \in \Pi(X)} X_a,$$

(donde se denomina cuenca del punto final  $a \in \Pi(X)$  al subespacio invariante  $X_a = \omega^{-1}(a)$ ).

### 3.3. Funciones racionales en la esfera

Supongamos que tenemos una función  $h: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  de la forma  $h(u) = a \frac{P(u)}{Q(u)}$ , donde  $u, a \in \mathbb{C}$ ,  $a \neq 0$ ,  $P(u) = (u - z_1) \cdots (u - z_p)$  y  $Q(u) = (u - l_1) \cdots (u - l_q)$  tales

que  $\{z_1, \dots, z_p\} \cap \{l_1, \dots, l_q\} = \emptyset$  (así que el conjunto de ceros de  $h$  es  $\{z_1, \dots, z_p\}$  y el conjunto de polos de  $h$  es  $\{l_1, \dots, l_q\}$ ).

Entonces, la función racional compleja  $h$  induce una aplicación extensión

$$h^+ : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

definiendo  $h^+(l_i) = \infty$  y  $h^+(\infty) = \infty$  si  $q < p$ ,  $h^+(\infty) = 0$  si  $q > p$  y  $h^+(\infty) = a$  si  $q = p$ . Y tenemos la correspondiente aplicación

$$\omega : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \Pi(\mathbb{C} \cup \{\infty\}).$$

Notemos que  $h^+$  puede interpretarse, vía la proyección estereográfica, como una función racional en la esfera  $S^2$ . Así, teniendo en cuenta la estructura diferenciable 2-dimensional habitual en la esfera y su estructura compleja 1-dimensional, las biyecciones  $S^2 \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong P^1(\mathbb{C})$  (donde  $P^1(\mathbb{C})$  es la recta proyectiva compleja) nos han permitido elaborar diversos *algoritmos computacionales* para el estudio de la dinámica del semiflujo discreto generado por la función racional [29]. Por ejemplo, utilizando estos algoritmos podemos tener una visualización gráfica completa en la esfera de las cuencas de atracción de puntos fijos que intervienen en la descomposición inducida por la aplicación canónica  $\omega : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow \Pi(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ . De este modo se generan *fractales en la esfera* que, además de tener la belleza propia de este tipo de objetos, pueden aplicarse al estudio de problemas que aparecen en otros contextos, como veremos a continuación.

### 3.4. Esferas fractales asociadas a procesos iterativos numéricos

El siguiente ejemplo (ver Figura 38) muestra la descomposición de la esfera correspondiente a la función racional  $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $h(z) = F(z)/G(z)$ , donde  $F(z) = 1 + 4z^5$  y  $G(z) = 5z^4$ . En este caso, la aplicación inducida  $h^+$  posee seis puntos fijos:  $\infty, p_1 = -0,809017 - 0,587785i, p_2 = -0,809017 + 0,587785i, p_3 = 0,309017 - 0,951057i, p_4 = 0,309017 + 0,951057i, p_5 = 1$ . Por tanto, consideraremos la esfera  $X = S^2$  dividida en siete partes:

$$X = (X \setminus D) \sqcup X_\infty \sqcup X_{a_1} \sqcup X_{a_2} \sqcup X_{a_3} \sqcup X_{a_4} \sqcup X_{a_5}$$

donde  $D = X_\infty \sqcup X_{a_1} \sqcup X_{a_2} \sqcup X_{a_3} \sqcup X_{a_4} \sqcup X_{a_5}$

A cada una se le asocia un color diferente: El color 0 (negro) corresponde a la pieza  $X \setminus D$ , el 1 (marrón) es la cuenca asociada al  $\infty$ . El resto de los colores se corresponde con las cuencas de los puntos finales asociados a los puntos fijos  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ . La imagen de la izquierda corresponde al origen y la figura de la derecha al infinito, además es importante hacer notar que los puntos marrones que son la cuenca de un punto repulsivo ( $\infty$ ) se sitúan en la frontera de las cuencas de los puntos atractivos  $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$  (lo que se observaría mejor sin la limitación

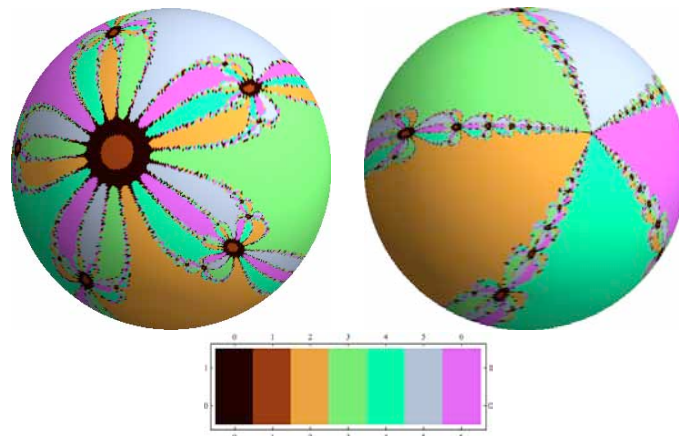


Figura 38: Descomposición de la esfera en cuencas

de precisión y número máximo de iteraciones que hemos prefijado al hacer los dibujos, pues las regiones negra y marrón reducirían su tamaño).

El estudio de la *dinámica compleja* generada por procesos iterativos es un campo de investigación que, desde los trabajos pioneros de P. J. L. Fatou y G. M. Julia (ver Figura 39) popularizados por B. Mandelbrot, se mantiene muy activo. A continuación, daremos una interpretación del ejemplo expuesto para mostrar cómo se pueden utilizar las técnicas indicadas anteriormente en el estudio de *procesos iterativos numéricos* que, como los de tipo Newton, Chebyshev, etc., se aplican en la búsqueda de raíces de polinomios complejos [50, 51].

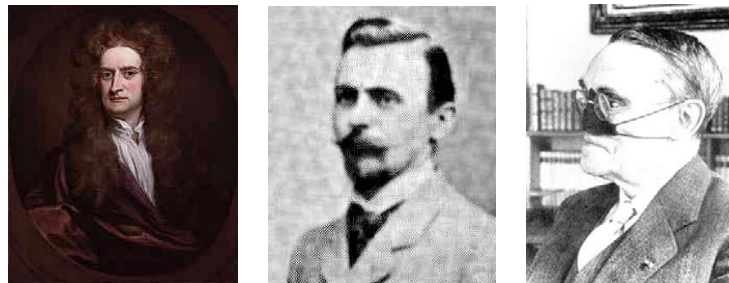


Figura 39: De izquierda a derecha, Newton, Fatou y Julia

Recordemos que el más popular y simple de todos, el conocido como método de Newton o Newton-Raphson (descrito por I. Newton (1643-1727) en su libro “De methodis fluxionum et serierum infinitarum”) puede construirse de un modo rápido así:

Consideremos el desarrollo de Taylor de una función  $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  en un punto  $x_n$ :

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + (f''(x_n)/2)(x - x_n)^2 + \dots$$

Si lo truncamos y evaluamos en  $x_{n+1}$ , obtenemos:

$$f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Si además se acepta que  $x_{n+1}$  tiende a la raíz, entonces:

$$0 \simeq f(x_{n+1}) \simeq f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$

Y obtenemos el algoritmo:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Por tanto, si tenemos del polinomio  $f(z) = z^5 - 1$ , mediante el proceso anterior queda inducida la función racional del ejemplo expuesto al comienzo:

$$N_f(z) = \frac{zf'(z) - f(z)}{f'(z)} = \frac{1 + 4z^5}{5z^4} = h(z).$$

Esto significa que el cálculo de los puntos fijos de la función racional  $h(z) = \frac{1+4z^5}{5z^4}$  es el cálculo de las raíces del polinomio  $f(z) = z^5 - 1$ , y que si  $p$  es una raíz del polinomio  $f(z)$  y un punto  $x$  está en la cuenca del punto final correspondiente a  $p$  en el semiflujo generado, al aplicar al punto  $x$  la función racional  $h$  asociada mediante el método de Newton, estaremos aproximándonos cada vez más a la raíz  $p$  del polinomio primitivo  $f(z)$ ; así que las cuencas de atracción de las raíces del polinomio son cuencas de los puntos finales asociados. Además, los algoritmos computacionales diseñados también permiten evaluar y representar gráficamente la “rapidez” con la que un punto de la cuenca converge a la raíz.

De manera análoga se procede, para un polinomio complejo primitivo  $f(z)$ , con otros métodos numéricos; obteniendo si se quiere una familia de funciones racionales  $h(z)$  asociadas a estos métodos cuyas dinámicas y propiedades topológicas como semiflujos discretos en la esfera son susceptibles de ser analizadas, y comparadas, con las técnicas expuestas y a través de las gráficas de las *esferas fractales* generadas por los algoritmos.

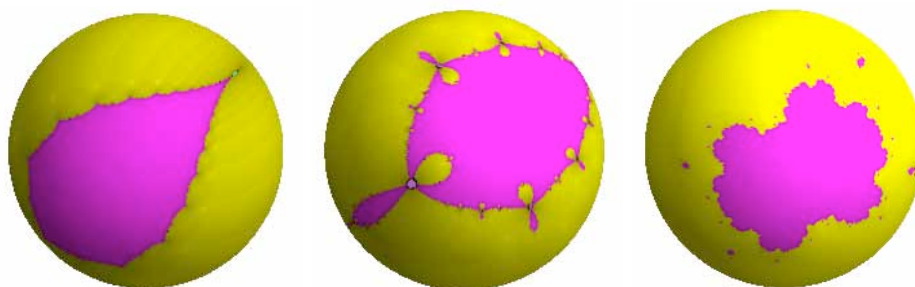


Figura 40: Esferas fractales correspondientes a tres métodos numéricos distintos

Por ejemplo, las imágenes de la Figura 40 muestran una visualización global de cuencas de atracción en la esfera correspondientes a tres métodos diferentes: El método de Newton (izquierda), el de Chebyshev (medio) y el de Chebyshev para raíces múltiples (derecha), aplicados a un polinomio primitivo de la forma  $f(z) = (z - a)^p(z - b)$  para  $p = 2$  vía una transformación de Möebius  $M(z) = \frac{z-a}{z-b}$

que transforma  $a$  (amarillo) en  $0$  y  $b$  (magenta) en  $\infty$ . Estas gráficas permiten hacer algunas consideraciones topológicas sobre los correspondientes conjuntos de Julia: En el método de Newton se observa que el conjunto de Julia es conexo (una componente) y el primer número de Betti es 1 (en el sentido de la teoría de la forma, sus entornos “más próximos” tienen sólo un “lazo esencial”), en el de Chebyshev notamos que el conjunto de Julia podría ser conexo pero con la forma correspondiente al caso de infinitos “lazos”, y, a diferencia de lo que ocurre con los dos métodos anteriores, en el de Chebyshev para raíces múltiples, el conjunto de Julia parece tener una cantidad infinita de componentes pero cada una de éstas con un único “lazo”.

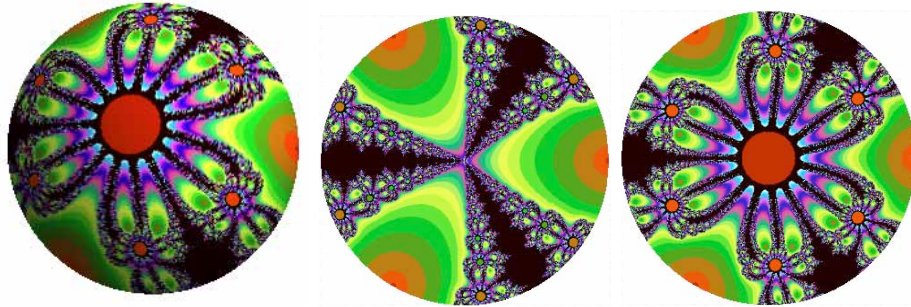


Figura 41: Esfera fractal y discos asociados reflejando la rapidez dinámica del flujo

En otro sentido, las imágenes de la Figura 41 se han obtenido a partir de aplicar el método de Whittaker para obtener las raíces de  $z^3 - 1 = 0$  teniendo en cuenta la rapidez dinámica del semiflujo discreto generado. Con ello resulta una descomposición de la esfera de acuerdo al número de iteraciones que son necesarias para la convergencia de un punto a una raíz. En la primera imagen se muestra la información global en la esfera, y en las dos siguientes se hace utilizando dos discos: el disco unidad y su complementario, módulo la inversión canónica.

#### 4. Mucho por explorar

Para finalizar, señalemos que en este pequeño paseo geométrico-topológico, la esfera, como protagonista principal, ha hecho su aparición con su aspecto más simple o convertida en una diversidad de atractivas esferas poliedrales, celulares o fractales según el paisaje y el ambiente que hemos ido atravesando a lo largo de las distintas secciones. Además de la belleza que la esfera posee bajo cualquiera de estas formas y que numerosas obras de arte continúan capturando, su belleza matemática, sustentada por la enorme potencia estructural que su esencia contiene, hace que, en nuestra opinión, este mundo esférico sea un maravilloso e inagotable terreno científico lleno de interés, utilidad y sorpresas inacabables, en el que ani-

mamos al lector a seguir explorando.

## 5. Un paseo por la geometría

Son muchos los años en los que nuestros compañeros Marta Stadler y Raúl Ibñañez nos han guiado en un fantástico paseo por el mundo matemático.

Precisamente durante la conferencia en la que se presentaba este trabajo se anunció que esta etapa llamada “Un paseo por la geometría” finalizaba.

Queremos agradeceros sinceramente vuestro entusiasmo y esfuerzo divulgador. Como directores de una orquesta, habéis conseguido, durante 15 años, impregnar los auditorios de maravillosa música matemática que permanecerá en el recuerdo de los numerosos estudiantes, profesores y conferenciantes que hemos tenido la suerte de participar en estas apasionantes excursiones.

Deseamos que este final sólo suponga un descanso para que repongáis fuerzas y volváis con renovadas ilusiones a planear y dirigir nuevos paseos por territorios científicos.

## Bibliografía

[1] R. Alvarado, C. Conci, H. Friedel y R. Ringuelet (Directores científicos de la colección), *El mundo de los animales*, Ed. Planeta, 1989.

[2] S. Ardanza-Trevijano, J. Arsuaga, J. A. Crespo, J. I. Extremiana, L. J. Hernández, M. T. Rivas, J. Roca y M. Vázquez, *Invariantes Topológicos en el ADN, los Fullerenos y la teoría de Elección Social*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (2007), Vol. 10, no. 3, 611-632.

[3] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, AMS, Colloquium Publications, vol. 9, 1927.

[4] W. Bolyai (con apéndice de J. Bolyai), *Tentamen Juventutem Studiosam in Elementa Matheseos* (Ensayos sobre elementos de matemáticas para jóvenes estudiosos), 1832.

[5] R. Bonola, *Geometrías no euclidianas*, Espasa Calpe, 1945.

[6] R. Cámara Angulo, *Libros de Matemáticas y Astronomía en la Biblioteca del Monasterio de Yuso de San Millán de la Cogolla*, Instituto de Estudios Riojanos, 1992.

[7] H. S. M. Coxeter, *Fundamentos de Geometría*, Limusa-Wiley, 1971.

[8] H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, Dover, 1963.

[9] R. F. Curl and R. E. Smalley, *Fullerenes*, Scientific American 265, 4, 54-63, Oct 1991.

[10] A. Del Río, L. J. Hernández and M. T. Rivas, *S-Types of Global Towers of Spaces and Exterior Spaces*, Appl. Cat. Struct., vol. 17, nº 3, 287-301, (2009).

[11] A. Dou, *Orígenes de la Geometría no euclidiana: Saccheri, Lambert y*

*Taurinus*, Historia de la Matemática en el siglo XIX, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 43-65, (1992).

[12] M. S. Dresselhaus, G. Dresselhaus and P. Eklund, *Science of Fullerenes and Carbon Nanotubes*, Academic Press, 1996.

[13] A. Elias Zúñiga, *Nanotecnología. Materiales para el nuevo milenio*, Transferencia, Inst. Tecnológico de Monterrey, Año 16, nº 64, Oct. 2003.

[14] B. Ernst, *El espejo mágico de M. C. Escher*, Taschen, 1994.

[15] Euclides, *The Thirteen Books of the Elements*, Dover reprint in three volumes, Thomas L. Heath editor, 1956.

[16] Euclides, *Elementos, Libros I-IV, V-IX, X-XII*, Introducción de Luis Vega. Traducción de María Luisa Puertas Castaños. Editorial Gredos, Biblioteca Clásica Gredos, vol. 191 (1991), 155 (1994) y 228 (1996).

[17] J. I. Extremiana, L. J. Hernández and M. T. Rivas, *An isomorphism Theorem of the Hurewicz Type in the proper homotopy category*, Fund. Math., vol. 132, 195-214 (1989).

[18] J. I. Extremiana, L. J. Hernández and M. T. Rivas, *Sobre el infinito de los espacios*, Proceedings of the Workshop on proper homotopy theory, Univ La Rioja, 23-69, 1993.

[19] J. I. Extremiana, L. J. Hernández and M. T. Rivas, *Poliedros*, Margarita Mathematica en memoria de José Javier (Chicho) Guadalupe Hernández, Servicio de Publicaciones de la Universidad de La Rioja, (2001) 139-166.

[20] J. I. Extremiana, L. J. Hernández and M. T. Rivas, *Postnikov factorizations at infinity*, Top. and its Appl., **153**, 370-393, (2005).

[21] K. Falconer, *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Wiley and Sons, 2003.

[22] J. V. Field, *Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Durer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler*, Archive for History of Exact Sciences **50**, 241-289, (1996).

[23] J. M. García-Calines, M. García-Pinillos and L. J. Hernández, *Closed simplicial model structures for exterior and proper homotopy*, Appl. Cat. Struct. **12**, no. 3, 225-243, (2004).

[24] J. M. García-Calines, M. García-Pinillos and L. J. Hernández, *Limits and functors of dynamical systems via exterior spaces*, arXiv: 1202.1635v1 [math. DS], (2012).

[25] J. M. García-Calines, M. García-Pinillos and L. J. Hernández, *A completion construction for continuous dynamical systems*, arXiv: 1202.6665v1 [math. DS], (2012).

[26] M. J. Greenberg, *Euclidean and non-euclidean geometries*, W. H. Freeman and Company. San Francisco, 1980.

[27] L. J. Hernández, *Sobre los Principios Fundamentales de la Geometría*,



Servicio de Publicaciones de la Univ. de La Rioja, 2001.

[28] L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, *Basins of End Points*, preprint, 2012.

[29] L. J. Hernández, M. Marañón y M. T. Rivas, *lotting basins of end points of rational maps with SAGE*, preprint, 2012.

[30] D. Hilbert, *Fundamentos de la Geometría*, (Introd. de J. M. Sánchez Ron), Tex. Univ. 5. C.S.I.C., 1996.

[31] S. Iglesias-Groth, *Fullerenes and buckyonions in the interstellar medium*, The Astrophysical Journal, vol 608 (2004) L37-L40.

[32] I. Kant, *Crítica de la razón pura*, (Prólogo, Traducción, Notas e índices de Pedro Ribas), Alfaguara, Madrid, 1988.

[33] J. Kepler, *Mysterium Cosmographicum*, 1596.

[34] J. Kepler, *The Harmony of the World*, , 1619. (Traducido al inglés por E. J. Aiton, A. M. Duncan y J. V. Field, 1997, American Philosophical Society.)

[35] H. W. Kroto, J. R. Heath, S. C. O'Brien, R. F. Curl and R. E. Smalley, *C60-Buckminsterfullerene*, Nature 318, 14 Nov. 1985, 162-163.

[36] N. I. Lobachevski, *Sobre los fundamentos de la geometría*, Kasan Bulletin, (1829-1830). Trabajos geométricos de Lobachevski (primera parte, obras publicadas en ruso; segunda parte, obras publicadas en francés y alemán). Kazán (1883-1886), Vol. I, p. 1-67.

[37] B. Mandelbrot, *La Geometría Fractal de la Naturaleza*, Tusquets, 1997.

[38] B. Mandelbrot, *Los objetos fractales. Forma, azar y dimensión*, Tusquets, 1987.

[39] N. Martín León, *Fullerenos: moléculas de carbono con propiedades excepcionales*, Anales de la RSEQ, Sec Investigación química, (1999) 14-24.

[40] A. Martín y P. Casado (coordinación general), *Guía del Museo Nacional Centro de Arte Reina Sofía*, 1994.

[41] J. M. Montesinos, *Las geometrías no euclídeas: Gauss, Lobachevski y Bolyai*, Historia de la Matemática en el siglo XIX, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 65-114 (1992).

[42] G. Néret, *Dalí*, Taschen, 1994.

[43] Platón, *Diálogos*, v. 6, Biblioteca Básica Gredos, Madrid, 1982.

[44] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, J. Math. Pures Appl. 3 (7), 375-422, 1881.

[45] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892-99, (1892).

[46] T. Porter, *Proper homotopy theory*, Handbook of Algebraic Topology (Editor: I. M. James), Chapter 3, pp. 127-167, North Holland, 1995.

[47] A. Ruiz, J. Bretón y J. M. Gómez-Lorente, *Theoretical support for buckyonions as carriers of the UV interstellar extinction feature*, Phys. Rev. Lett. 94

(2005) 105-501.

[48] R. F. Schinazi, R. Sijbesme, G. Srdanov, C. L. Hill and F. Wudl, *Synthesis and virucidal activity of a water-soluble, configurationally stable, derivatized C60 fullerene*, Taschen, Antimicrob Agents Chemother, Aug. 1993, 37(8), 1707-1710.

[49] L. C. Siebenmann, *The obstruction to finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, Ph. D. thesis, Princeton, 1965.

[50] J. F. Traub, *Iterative methods for the solution of equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1964).

[51] J. L. Varona, *Graphic and numerical comparison between iterative methods*, Math. Intelligencer 24 (2002), no. 1, 37-46.

[52] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy I, II*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 213-245, 453-496.

[53] Q. L. Zhang, S. C. O'Brien, J. R. Heath, Y. Liu, R. F. Curl, H. W. Kroto and R. E. Smalley, *Reactivity of large carbon clusters: spheroidal carbon shells and their possible relevance to the formation and morphology of soot*, The Journal of Physical Chemistry, vol. 90, no. 4, Feb. 13, 1986.

**María Teresa Rivas**

Universidad de La Rioja  
Departamento de Matemáticas y Computación,  
Edificio Vives, C/ Luis de Ulloa s/n, 26004,  
Logroño.

e-mail: maria-teresa.rivas@unirioja.es

