Topología en el balón de fútbol

por

Jose Ignacio Royo Prieto, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

La curiosidad y el placer de comprender son inherentes al quehacer matemático. Se ha dicho, y es cierto, que los matemáticos vemos la realidad con otros ojos, de otra manera. No es raro que, donde otros ven un balón de fútbol, a nosotros nos llame la atención la geometría de las piezas de cuero que conforman su cubierta. Bajo estas estructuras aparecen hermosas configuraciones de pentágonos, triángulos, cuadrados y hexágonos que se juntan según la simetría de cubos, icosaedros y dodecaedros. El elemento esencial del fútbol se convierte así en una excusa para analizar los poliedros.

El mundo de los poliedros es una de las joyitas de las matemáticas[1]. Son lo suficientemente sencillos y bellos como para atraer a personas de todo tipo, y a su vez, su estudio es lo suficientemente útil y profundo como para aparecer en multitud de campos de investigación de las matemáticas. Uno de los teoremas más hermosos de la historia de las matemáticas (si no el que más, permítaseme la debilidad) es el siguiente teorema sobre poliedros, donde aparece la *fórmula de Euler*:

Teorema de Euler: Para todo poliedro homeomorfo a una esfera que tenga V vértices, A aristas y C caras, se cumple la igualdad $V - A + C = 2$.

En la primera parte de estas notas, hablaremos de los poliedros que han ido apareciendo en los balones de fútbol a través de la historia. A finales del siglo XIX y principios del XX, la cubierta de cuero de los balones se componía de tiras alargadas cuyos extremos se juntaban, por entendernos, en los polos norte y sur de una esfera.

[1]Para todas las propiedades y nociones referentes a poliedros que aparecen en este artículo, recomendamos el excelente tratado [3]

Algo similar a los actuales balones de baloncesto. Pronto se realizó una transición a otras configuraciones poliédricas con las que conseguir mejores aproximaciones a la esfera: cubos, variaciones cúbicas, icosaedros truncados… Veremos cómo la búsqueda de la eficiencia (y en eso las matemáticas han demostrado ser muy útiles) guió la evolución de los patrones de los balones. Los balones modernos no tienen esa necesidad, dado que los tratamientos industriales modernos permiten producir piezas que son, directamente, parte de la superficie de una esfera. No obstante, como veremos, siguen utilizando motivos poliédricos.

En una segunda parte, a modo de divertimento, analizaremos varias ilustraciones de presuntos balones de fútbol en logotipos y motivos publicitarios. Algunas de ellas son disparatadas, en el sentido de que las configuraciones poliédricas que muestran son incorrectas, cuando no imposibles. Para ser capaces de realizar estas aseveraciones con un poco de rigor, tenemos que echar mano de la topología. En particular, utilizaremos un teorema topológico: la fórmula de Euler que hemos mencionado antes.

Parte de estos contenidos, en especial los que se refieren al logotipo de la Liga de Campeones, han sido publicados recientemente en [5]. El reportaje del programa Teknopolis [7] ha sido, así mismo, motivado por esta charla.

1. Balones reales

1.1. Balones con estructura cúbica

Una de las primeras configuraciones poliédricas de los balones de fútbol, utilizada ya desde el siglo XIX, es la estructura cúbica con doce piezas. Dos piezas rectangulares de dimensiones 2×1 se juntan para formar un cuadrado, y esos seis cuadrados forman un cubo. Existe una variante de esta configuración usando dieciocho piezas, juntándose previamente de tres en tres para formar los cuadrados del cubo. Los balones de configuración cúbica han permanecido como la imagen por antonomasia del balón antiguo, y de hecho aparecen en los escudos de muchos equipos antiguos de fútbol. Algunos modelos buscaban una mayor redondez dentando el borde de los rectángulos de partida (ver Figura 1).

Un innovador modelo con 30 piezas en forma de letra “T” fue utilizado en el primer mundial de fútbol, en 1930, en Uruguay. Esta nueva configuración está relacionada con el anterior modelo cúbico de 18 piezas tal y como se muestra en la Figura 2.

En las décadas de los 50 y los 60, se utilizaron otras configuraciones de tipo cúbico con piezas distintas. En el balón de la Figura 4, por ejemplo, se aprecia una configuración muy ingeniosa, en la que la posición de los octógonos convexos es la de las seis caras de un cubo, mientras que cada octógono alargado y cóncavo corresponde a una de las aristas del mismo cubo.

Figura 1: Balón de 12 piezas, 1934

Figura 2: Balón cúbico de 18 piezas rectangulares. Se ha superpuesto el dibujo de una pieza en forma de "T"

Figura 3: Balón con piezas en forma de "T"

1.2. En busca de la redondez

En el mundial de México de 1970 se usó un innovador diseño poliédrico que acabó convirtiendose en el arquetipo de todos los balones de fútbol. Se trata de un poliedro formado por doce pentágonos regulares y veinte hexágonos regulares. La configuración se puede describir mediante una regla muy simple: en cada vértice se juntan dos hexágonos y un pentágono. El poliedro en cuestión es un poliedro arquimediano llamado *icosaedro truncado*.

El modelo *Telstar* de Adidas, con pentágonos negros y hexágonos blancos, acabó triunfando entre todos los balones conocidos hasta entonces. Uno de los principales motivos de su éxito era su redondez. Cuando hablamos de poliedros, podemos medir su redondez de la siguiente manera: consideramos la esfera a la que pertenecen sus vértices (esta propiedad no es trivial, pero la satisfacen todos los poliedros platónicos y arquimedianos, por ejemplo), y calculamos qué porcentaje del volumen de esa esfera es ocupado por el volumen de nuestro poliedro. Es claro que podemos conseguir una redondez cercana al 100 % partiendo de una triangulación de la esfera tan fina como queramos. Eso sí, lo haríamos a costa de una gran complicación técnica: tener que coser muchas piezas de pequeñísimo tamaño. Por

Figura 4: Balón de piezas octogonales

lo tanto, no sólo es interesante tener en cuenta la redondez de un poliedro, sino también el número de aristas del mismo, para minimizar el número de costuras. En la siguiente tabla se compara el número de aristas y caras de algunos poliedros, así como su redondez.

	Icosaedro truncado	icosaedro	dodecaedro	rombicosidodecaedro
Redondez	86,74 %	60,55 %	66,49 %	94,33 %
Aristas	90	30	30	120
Caras	32	20	12	72
Polígonos	Pentágonos y hexágonos	Triángulos	Pentágonos	Pentágonos, cuadrados y triángulos

Figura 5: Tabla de poliedros

Según vemos, un nuevo poliedro arquimediano, el rombicosidodecaedro, muestra una redondez casi perfecta, a costa de un número de costuras y de piezas (aristas y caras) no demasiado elevado. A principios de la década de los 80, en [2] se propuso este poliedro como el balón del futuro, pero hasta la fecha no se ha utilizado para la producción industrial de balones. Parece, pues, que el balance entre redondez y complejidad de fabricación que consigue el icosaedro truncado es óptimo.

1.3. Balones modernos

La estructura de icosaedro truncado se mantuvo en la fabricación de balones hasta el mundial de Alemania de 2006, en el cual se introdujo el balón *Teamgeist*, que usaba catorce piezas de contorno curvo; lógicamente, de mayor tamaño. Aunque estas piezas no sean polígonos regulares, puede decirse que están dispuestas según la estructura de un octaedro truncado. En el mundial de Sudáfrica de 2010 se uti-

Figura 6: Balón modelo *Telstar* de Adidas

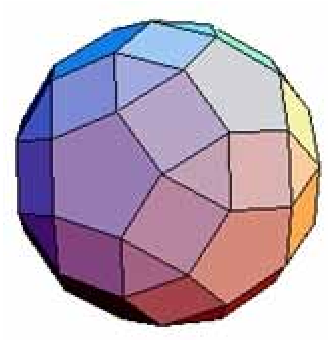

Figura 7: El rombicosidodecaedro es un poliedro arquimediano de una gran redondez

lizó el famoso balón *Jabulani*, que cuenta con menos piezas aún: ocho, dispuestas según la estructura de un tetraedro truncado. Las piezas tampoco tienen la forma de polígonos regulares, y sus bordes son curvos.

Puede parecer paradójico que cada vez se utilicen menos piezas en los diseños de estos balones, y que los poliedros utilizados tengan una redondez teórica inferior a la del icosaedro truncado. En un balón antiguo, con piezas de cuero plano, el uso de piezas grandes conllevaría una enorme pérdida de volumen. Pero en estos balones modernos, las piezas son de materiales orgánicos que se tratan con calor y se moldean, de manera que pasan a ser, antes de ser ensamblados, trozos de una superficie esférica perfecta. Esto hace que la estructura poliédrica deje de tener la importancia que tenía en otros tiempos. No obstante, tal y como se puede observar en el vídeo de fabricación del balón jabulani (ver [1]), las piezas de la cubierta se pegan sobre otra pelota interna que sí es cosida a mano a partir de piezas planas y blandas, lo suficientemente elásticas como para alcanzar una gran redondez tras el inflado (esto no es así con piezas de cuero duro). Estas piezas planas son doce pentágonos regulares, y forman un dodecaedro. En este caso, la es simplicidad de la regla de fabricación (coser las piezas de tres en tres en cada vértice) la que se impone a la hora de optar por uno de los sólidos clásicos.

1.4. Otros poliedros curiosos

Para ilustrar la enorme variedad de poliedros que se pueden encontrar entre los balones de otros deportes, acabaremos esta sección mostrando un par de poliedros curiosos, ambos pertenecientes a la familia de los *sólidos de Catalan*, que son los duales de los arquimedianos. Uno de ellos consta de 24 piezas que se juntan de dos en dos para formar doce rombos de proporción $1 : \sqrt{2}$, que componen un *dodecaedro rómbico*. El otro es dual del icosaedro truncado, y se trata del *pentaquisdodecaedro*, un poliedro que consta de 60 triángulos isósceles.

Figura 8: En alemán *Teamgeist* significa "espíritu de equipo"

Figura 9: El *jabulani* recibió muchas críticas por lo impredecible de su trayectoria cuando el balón alcanzaba grandes velocidades

Figura 10: Dodecaedro rómbico

Figura 11: Pentaquisdodecaedro

2. Balones quiméricos

2.1. El arte de representar fielmente

Central como es el tema del balompié en las historietas de Zipi y Zape (ver Figura 12), no es de extrañar que su dibujante, L. Escobar, ilustrara de manera correcta los balones de fútbol con los que jugaban los hermanos. Lo mismo podemos decir de los balones dibujados por F. Ibáñez, como podemos ver en la Figura 13, lo cual es de agradecer.

Desgraciadamente, no se puede decir lo mismo de muchas otras ilustraciones de balones de fútbol. Es realmente extraño, por ejemplo, que el logotipo de una revista deportiva cuyo nombre es, además, "Don Balón", sea una representación tan incorrecta como la de la Figura 14. La agradable sensación de percibir el pentágono que forman los cinco pentágonos más próximos a un pentágono cualquiera del icosaedro truncado no representaba mucho para quien pergeñó, más bien perpetró, semejante logotipo.

El diseño mejoró mucho en su siguiente versión (Figura 15), mas la coloración

Figura 12: Zipi y Zape juegan con un balón cúbico antiguo de 12 piezas

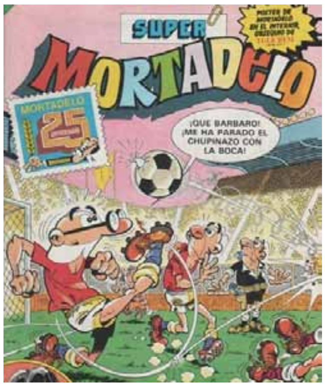

Figura 13: El balón de Mortadelo es un icosaedro truncado

Figura 14: *Don Balón* en 1995

Figura 15: Otro logotipo más reciente

de los hexágonos de ese balón nos puede llevar a preguntas sin respuesta. En dicho logotipo, los hexágonos del balón aparecen coloreados utilizando tan sólo tres colores: azul, rojo y amarillo. Como el icosaedro truncado tiene veinte hexágonos, huelga decir que el reparto usando tres colores ha de ser forzosamente desigual, lo cual puede no satisfacer del todo al lector, dependiendo de con qué ojos mire al logotipo. Como soñar es gratis, atendiendo a que $4 \times 5 = 20$, podemos atrevernos a proponer el uso de cinco colores para colorear de manera coherente esos veinte hexágonos. Es más, se puede hacer de manera que los cuatro hexágonos de un mismo color equidisten unos de otros (digamos, más bien, sus centros), de manera que formen un tetraedro. La configuración obtenida es la misma que la de los cinco tetraedros intersecados cuyos vértices son los de un dodecaedro (ver Figura 16). Puede parecer un ejercicio de pedantería y sibaritismo pretender que se coloreen de esta manera tan alambicada los hexágonos de algo tan lúdico como una pelota, pero he descubierto en varias jugueterías y farmacias que es precisamente este patrón de coloreado el que siguen varios tipos de balones de peluche para niños y bebés.

Si bien puede parecer normal que una revista deportiva no sea escrupulosa con la geometría, no se puede decir lo mismo en el caso de la Mathematical Association

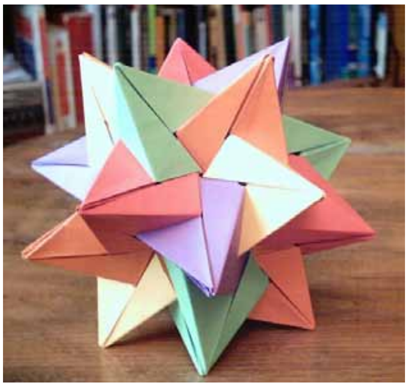

Figura 16: Cinco tetraedros intersecados. Figura de origami modular diseñada por el autor

of America. En 1985, B. Grünbaum señaló en [4] que el icosaedro que aparecía en el logotipo de dicha asociación desde 1972 es geométricamente incorrecto, analizando la dirección de las rectas definidas por los vértices del icosaedro. Si este detalle llegó a indignar al autor de ese artículo, no sé qué opinaría del logotipo de Don Balón que hemos visto antes. Es de justicia señalar que el logotipo actual de la M.A.A. no presenta dicho error. Agradezco a Jesús Gómez Ayala haberme dado a conocer ese entretenido artículo, donde se presentan otras *boutades* geométricas de la literatura matemática.

A continuación veremos otras representaciones espúreas de balones de fútbol, algunas realmente sonadas.

No pretendemos convertirnos en los cancerberos de la geometría en el mundo del deporte. Pensamos, más bien, que nuestra actitud al acercarnos a estas auténticas "faltas de ortografía" topológicas, debe ser la que tan atinadamente describe Rafael Sánchez Ferlosio en [6]:

> *El más inteligente de los españoles -cuyo nombre, por desventura, no he sabido nunca-, autor de un "Arte de tocar las castañuelas", empezaba el prólogo de su tratado con esta declaración absolutamente ejemplar y memorable: "No hace ninguna falta tocar las castañuelas, pero en caso de tocarlas, más vale tocarlas bien que tocarlas mal". Si esto dijo aquel hombre, acertando a iluminar a la vez la ética y la estética con un mismo y único resplandor de luz, refiriéndose a la declaradamente inútil dedicación de tocar las castañuelas, bien cabe aplicar lo mismo a otras dedicaciones que, en cambio, tienden a ser consideradas, en principio, necesarias, como las obras de misericordia.*

2.2. Un fullereno distinto

El logotipo del *Quinigol* que puede verse en los establecimientos de loterías y apuestas (Figura 17) muestra un balón similar al del icosaedro truncado, pero no es igual. En efecto, se puede observar que este balón tiene más hexágonos, y que presenta dos tipos de vértices: en unos se juntan dos hexágonos y un pentágono, y en otros concurren tres hexágonos. Este poliedro es bien conocido y pertenece a la misma familia que los icosaedros truncados: la familia de los *fullerenos*.

Figura 17: Este fullereno tiene muchos hexágonos

Figura 18: El logotipo de los impresos es diferente

Un fullereno está formado por pentágonos y hexágonos (no forzosamente regulares), de manera que en cada vértice concurran tres aristas. El nombre viene del arquitecto R. B. Fuller, que utilizó ese tipo de estructuras para diseñar una célebre cúpula geodésica. El dodecaedro, el icosaedro truncado y el poliedro del Quinigol de la figura **??** son fullerenos con cero, veinte y treinta hexágonos, respectivamente. Curiosamente, los tres fullerenos tienen el mismo número de pentágonos: doce. Esta propiedad es común a todos los fullerenos, tal y como nos revela la fórmula de Euler. En efecto, si un poliedro está formado por, exactamente P pentágonos y H hexágonos, entonces tiene $P + H$ caras y $(5P + 6H)/2$ aristas, toda vez que cada arista es compartida por dos caras. Más aún, si el poliedro es un fullereno, entonces en cada vértice concurren tres polígonos, de modo que tiene exactamente $(5P + 6H)/3$ vértices. La fórmula de Euler nos proporciona:

$$\frac{5P + 6H}{3} - \frac{5P + 6H}{2} + (P + H) = 2 \iff P = 12.$$

El logotipo de los impresos actuales del Quinigol (Figura 18) muestra un icosaedro truncado. Desconocemos si el diseñador del logotipo de la Figura 17 quiso utilizar un fullereno distinto a propio intento. Nos inclinamos, más bien, por pensar que el diseñador distribuyó, en primer lugar, los pentágonos, sin darse cuenta de que los pentágonos próximos enfrentaban los lados en posiciones paralelas, y no enfrentando vértices como en el icosaedro truncado. De esta manera, al dibujar los hexágonos, se acaban juntando tres en un vértice, produciendo el fullereno de 30 hexágonos. Una curiosidad: los hexágonos de este fullereno no son regulares, ya que si lo fueran, al juntarse tres en un vértice, formarían un ángulo de 360 grados, es decir, los tres hexágonos pertenecerían al mismo plano. Razonando de esta manera, concluiríamos que todos los hexágonos del fullereno pertenecen al mismo plano, lo cual es absurdo. Me extrañaría mucho que alguien haya construido un balón con hexágonos irregulares como los de este fullereno, de modo que es casi seguro es que el logotipo no está basado en una pelota verdadera: a pesar de que el poliedro exista, estamos ante un balón quimérico. Hemos encontrado este fullereno ilustrando numerosos reportajes y programas deportivos de televisión; posiblemente esto sea una consecuencia del uso de internet.

2.3. El championsedro

El balón quimérico más presente en los medios de comunicación es, sin duda, el que aparece en el logotipo de la Liga de Campeones de la UEFA. El auténtico balón que se utiliza en dicha competición es un icosaedro truncado, decorado de manera que en cada pentágono se coloca una estrella prolongada (Figura 19). De esa manera, las estrellas forman corros de tres unidades, de la misma manera que en el icosaedro truncado cada hexágono es rodeado por tres pentágonos. Sin embargo, en el logotipo oficial, esto no es así, y encontramos corros de tres estrellas y dos corros de cuatro estrellas (los hemos destacado en la Figura 20).

Figura 19: El balón verdadero presenta una estructura de icosaedro truncado

Figura 20: El *championsedro* presenta dos corros de cuatro estrellas

Ante este desajuste entre la realidad y el logotipo, cabe preguntarse, además de por qué (posiblemente el diseño busca que las estrellas formen un contorno lo más redondo posible, sacrificando de forma lamentable la bonita estructura del balón real), es si existirá algún poliedro que presente la configuración del logotipo. Un poliedro con estrellas pentagonales que se junten en corros de tres y corros de cuatro bien pudiera llamarse un *championsedro*. En el artículo [5] demostramos, utilizando la fórmula de Euler, que existen championsedros con dos corros de cuatro estrellas, pero que en ningún caso corresponden a la configuración que se muestra en el logotipo. Un championsedro con dos corros de cuatro estrellas los presentaría en posiciones antipodales, lo cual daría al poliedro una forma apepinada, dificultando la práctica del fútbol. Llama la atención (a alguien que mira con ojos matemáticos, claro) que un logotipo tan importante sea algo ficticio, y que incluso pueda imposibilitar aquello que representa.

2.4. Orangedro: el balón ignominioso

El logo del Quinigol y el championsedro pueden ser considerados como curiosidades. Nuestra sensibilidad matemática puede verse decepcionada por ellos (¡tan entrañable resulta un icosaedro truncado bien dibujado!), pero no herida, como sí ocurría con el primer logotipo de Don Balón. Sin embargo, la mayor afrenta topológica la descubriremos en la publicidad de una compañía telefónica que, por el bien de sus clientes, confiamos en que apliquen mejor la topología en las redes de los servicios que ofrecen que en sus folletos (Figura 21). Se trata de un balón formado únicamente por hexágonos, los cuales se juntan en cada vértice de tres en tres. Esta disposición, intuitivamente, suena a panal de rica miel, y por lo tanto, más a algo plano que esférico. De hecho, de existir un poliedro esférico como el del logotipo, encajaría en la definición de fullereno (poliedro formado por hexágonos y pentágonos, que se juntan en cada vértice de tres en tres), y antes hemos visto que los fullerenos han de tener, forzosamente, doce pentágonos, de modo que un poliedro como el del folleto jamás podría ser esférico. Como vemos, la intuición anterior se ve confirmada por la fórmula de Euler.

Figura 21: Una imagen vale más que mil patadas

Vamos, no obstante, a dar una oportunidad al balón del folleto antes de condenarlo. Investigaremos la existencia de poliedros esféricos formados tan sólo por hexágonos, sin imponer condiciones sobre el número de polígonos que concurren en cada vértice. De existir alguno, podríamos llamarlo *orangedro*. Cabe señalar que, si tomamos dos hexágonos e identificamos sus bordes, obtenemos topológicamente una esfera, pero estaríamos asumiendo una situación degenerada, al admitir vértices de índice dos. Por lo tanto, en nuestra definición de orangedro, exigiremos que, por lo menos, concurran tres aristas en cada vértice (es habitual asumir esta hipótesis en el contexto de los poliedros). Nuevamente, la fórmula de Euler nos dice que no existen orangedros. En efecto, si nuestro orangedro tiene n_3 vértices en los que concurren 3 aristas, n_4 vértices en los que concurren 4 aristas, y así sucesivamente, concluimos que

$$\begin{aligned} V &= n_3 + n_4 + \dots \\ A &= (3n_3 + 4n_4 + \dots)/2 \\ C &= (3n_3 + 4n_4 + \dots)/6, \end{aligned}$$

por lo que, aplicando la fórmula de Euler,

$$V - A + C = 2 \Longrightarrow 0 = 6 + n_4 + 2n_5 + 3n_6 + \dots,$$

por lo que en un orangedro tan sólo existen vértices de orden tres, es decir, ha de ser un fullereno, y ya hemos visto que eso es imposible.

Para terminar esta galería de disparates, vamos a presentar al que se lleva, sin duda, la palma, dado el lugar de privilegio que ocupa en el escaparate cibernético. Si uno abre un navegador de internet y teclea en Google la palabra “balón” en la búsqueda de imágenes, la primera, sí, la primera imagen que aparece es la siguiente:

Figura 22: *El googleedro:* primus inter pares

Al ver este despropósito uno casi añora al orangedro, en el que, por lo menos, el diseñador quiso dar una sensación de profundidad al proporcionar un mayor tamaño al hexágono central, más cercano al espectador. El *googleedro*, sin embargo, tuvo una génesis mucho más simple: el diseñador, guiado por las musas, encontró el anteriormente aludido panal de rica miel, coloreó de manera coherente (reconozcamos su mérito) algunos hexágonos de negro, y a continuación, plantó una circunferencia (¿no son, acaso, redondos los balones?) Donde cuadró, recortó y listo. Y como ya me he permitido suficientes chanzas en estas notas, no voy a ironizar de manera ventajista sobre lo que uno puede fiarse de la veracidad de lo que se encuentra por internet, aun utilizando las más prestigiosas herramientas de búsqueda, orgullo de la *sociedad del conocimiento*. Lo dejo para el lector.

Bibliografía

[1] Addidas, *The making process of Jabulani Addidas ball*, vídeo disponible en http://www.youtube.com/watch?v=eT2c5-Zev6E

[2] J. M. Albaigés, *Hacia la esfera perfecta*, Muy Interesante 13, 1982.

[3] P. R. Cromwell, *Polyhedra*, Cambridge University Press, 1999.

[4] B. Grünbaum, *Geometry strikes again*, Mathematics Magazine, **58** (1985), 12–17.

[5] J. I. Royo Prieto, M. Saralegi Aranguren, *Euler y un balón de fútbol*, Sigma 16, (2012) 125–135.

[6] R. S. Sánchez Ferlosio, *Cultura ¿para qué?*, El País, 25 de julio de 1998.

[7] Teknopolis, *Las formas del balón*, reportaje emitido en ETB1 y ETB2 el 22/4/2012, disponible en euskara y castellano en http://teknopolis.elhuyar.org/ikusi.asp?Multi_Kodea=852.

Jose Ignacio Royo Prieto
Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea
Escuela Superior de Ingeniería
Departamento de Matemática Aplicada
Alameda de Urquijo, s/n, 48013 Bilbao
e-mail: joseignacio.royo@ehu.es
http://www.ehu.es/joseroyo/