El algoritmo de Euclides como principio musical

por

Paco Gómez, Universidad Politécnica de Madrid

Introducción

Esta es una charla sobre matemáticas y música, en particular, sobre ritmo. Tiene tres partes: la primera es sobre matemáticas; la segunda, sobre música; y en la tercera mezclaremos ambas cosas. Empezaremos por las matemáticas.

1. Matemáticas

Como sabéis, hay dos tipos de división: **la división exacta** y **la división con resto**. División exacta es lo que ocurre cuando dividimos 12 entre 4.

$$\frac{12}{4} = 3 \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 4 \\ \cline{2-2} -12 & 3 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Quiero que penséis en la división exacta como la formación de grupos de objetos. El número total de objetos es el dividendo y el tamaño de los grupos es el divisor. El cociente es el número de grupos resultante. Así, siguiendo el ejemplo anterior, si disponemos de un grupo de 12 unos, la división anterior es equivalente a formar tres grupos con cuatro unos cada uno.

Pero a veces no se puede hacer un número entero de grupos, y entonces hablamos de la división con resto.

$$\boxed{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1} \quad \rightarrow \quad \boxed{1\ 1\ 1\ 1 \| 1\ 1\ 1\ 1 \| 1\ 1\ 1\ 1}$$

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ \cline{1-1} 2 & \end{array}$$

En una división con resto siempre hay una cierta cantidad que sobra, el resto. En el ejemplo anterior, el resto es 2. Si de nuevo pensamos la división como la formación de grupos, la división con resto ocurre cuando hay elementos que sobran al formar los grupos.

$$\boxed{1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1} \rightarrow \boxed{\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & 1 & & \end{array}}$$

En este caso tenemos 17 objetos distribuidos en 5 grupos de 3 objetos cada uno y sobran dos (cada fila constituye un grupo).

En este momento podemos escribir la ecuación general de la división, que reza como sigue:

$$\boxed{a = b \cdot q + r}$$

donde:

- a es el **dividendo**.
- $b \neq 0$ es el **divisor**.
- q es el **cociente**.
- r es el **resto**.

Como sabéis, el resto tiene la propiedad de que $0 \leq r < b$. Esto significa que el número de grupos que se forman vía la división es el máximo posible. Hasta aquí las matemáticas han sido fáciles, ¿no? Pasemos, pues, a otro concepto muy relacionado con la división: el **máximo común divisor**. ¿Qué es el máximo común divisor de dos números enteros? Es la definición más autoexplicativa que he oído en mi vida: el mayor de los divisores comunes de ambos números.

El máximo común divisor se puede calcular de dos maneras. La primera manera consiste en examinar los divisores de ambos números y quedarnos con el mayor entre los divisores comunes. Por ejemplo, si tenemos 12 y 16:

$$\begin{array}{lcl} 12 & \longrightarrow & \text{divisores: } \{1, 2, 3, 4, 6, 12\} \\ 16 & \longrightarrow & \text{divisores: } \{1, 2, 4, 8, 16\} \end{array}$$

El máximo común divisor de 12 y 16 es 4.

Sin embargo, calcular el máximo común divisor examinando los divisores es largo y tedioso. Imaginaos que tenéis números muy grandes, como 1089 y 924. Entonces calcular sus divisores ya no es tan fácil. Obtener los divisores de un número depende de su descomposición en factores primos y esa descomposición puede llegar a ser muy difícil de calcular. Para estos dos número elegidos, tenemos:

$$\begin{array}{rcl} 1089 & \longrightarrow & \text{divisores: } \{1, 3, 9, 11, \mathbf{33}, 99, 121, 363, 1089\} \\ 924 & \longrightarrow & \text{divisores:}\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 11, 12, 14, 21, 22, 28, \mathbf{33}, 42, 44, 66, \\ & & 77, 84, 132, 154, 231, 308, 462, 924\} \end{array}$$

y el máximo común es 33.

La otra manera de calcular el máximo común divisor es usando el algoritmo de Euclides. Este matemático griego, que vivió alrededor del 300 antes de Cristo, se percató de una propiedad que permite calcular el máximo común divisor con suma rapidez. Supongamos que queremos hallar el máximo común divisor de a y b. Escribimos la ecuación de la división, la que vimos más arriba.

$$a = b \cdot q + r$$

Si d es un divisor de a y b, también lo será de b y r. En efecto:

$$a = b \cdot q + r \Longrightarrow \frac{a}{d} = \frac{b}{d} \cdot q + \frac{r}{d}$$

Entonces, el máximo común divisor de a y b es el mismo que el de b y r. El proceso se puede repetir todas las veces que haga falta. En cada paso el resto que obtenemos es menor estrictamente que el anterior, de modo que finalmente encontraremos un resto nulo. El máximo común divisor será el último resto no nulo que encontremos en esta serie de divisiones sucesivas. Aquí tenemos un ejemplo.

$$\begin{aligned} 1089 &= 924 \times 1 + 165 \\ 924 &= 165 \times 5 + 99 \\ 165 &= 99 \times 1 + 66 \\ 99 &= 66 \times 1 + 33 \\ 66 &= 33 \times 1 + 0 \end{aligned}$$

El último resto no nulo es 33, que es el máximo común divisor que habíamos encontrado antes.

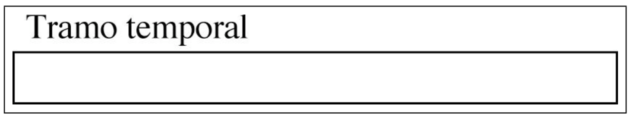
FIN DE LA PARTE MATEMÁTICA

2. Música (ritmo)

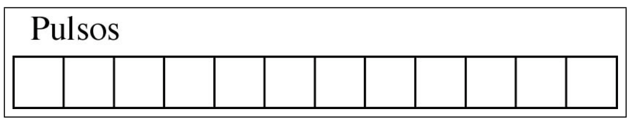
Empezaremos por dar unas definiciones sencillas sobre ritmo.

2.1 Definiciones preliminares

- **Tramo temporal**. El tramo temporal es una cantidad fija de tiempo sobre la que se definen los ritmos. Lo representaremos por un rectángulo vacío.

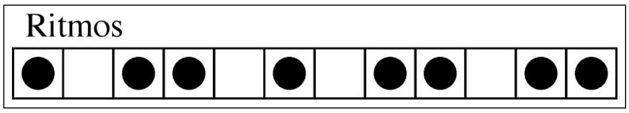


- **Pulso**. El pulso es la división en partes iguales del tramo temporal.



Los pulsos sirven como referencia temporal al músico. Puede que no se toquen, pero están siempre en su cabeza.

- **Ritmo**. Un ritmo está formado por notas que se tocan en los pulsos.



Aquí hablaremos de los ritmos de **clave** o simplemente claves. Una clave es un ritmo que se toca durante toda la pieza y que actúa como referente temporal. Estos ritmos suelen tener otras funciones musicales más complejas tales como la organización del fraseo.

FIN DE LA PARTE MUSICAL

Y

COMIENZO DE LA PARTE MATEMÁTICO-MUSICAL

3. Matemáticas y ritmo

Vamos a generar una serie de ritmos combinando las propiedades de divisibilidad que hemos visto en la primera sección con las definiciones musicales de la segunda sección. Los ritmos los designaremos por una "x" y los silencios por un punto ".".

3.1 De los divisores de 12

Fijemos un tramo temporal de 12 pulsos. Si quiero tocar 12 notas, entonces tengo que dividir 12 por...

$$1 \longrightarrow \frac{12}{1} = 12$$

y el ritmo resultante sería

X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

El ritmo que sale es un tren de pulsos que suenan en todas las posiciones posibles.

Si quiero tocar 4 notas, entonces tengo que dividir 12 por...

$$3 \longrightarrow \frac{12}{3} = 4$$

y el ritmo resultante sería

X	.	.	X	.	.	X	.	.	X	.	.

Si quiero tocar 6 notas, entonces tengo que dividir 12 por...

$$2 \longrightarrow \frac{12}{2} = 6$$

y el ritmo resultante sería

X	.	X	.	X	.	X	.	X	.	X	.

Si quiero tocar 8 notas, entonces tengo que dividir 12 por... ¿cuánto?

$$X \longrightarrow \frac{12}{X} = 8$$

(No os mováis de esta página si queréis pensar la respuesta. Cuando estéis listos, id a la página 28)

Respuestas no válidas:

- $\frac{3}{2}$, ya que las fracciones de pulso no valen.
- Subdividir el pulso. La división del tramo temporal es fija para este ejemplo.

NO LO PUEDO HACER... ENTONCES, ¿CÓMO?

3.2 El principio de regularidad

Estrictamente hablando no se puede hacer. No hay número entero x tal que $\frac{12}{x} = 8$. La solución está en generalizar el concepto de división de tal manera que todavía sirva a nuestros propósitos, tanto matemáticos como musicales. Esta generalización es el **principio de regularidad**.

> Principio de regularidad: Las notas se tienen que distribuir entre los pulsos de la manera más regular posible.

Ante el enunciado de ese principio, surgen varias preguntas: ¿Qué significa "de la manera más regular posible¿ ¿Cómo se obtiene ese ritmo? ¿Es único? Vamos a contestar a estas preguntas con un ejemplo; más tarde daremos las definiciones formales necesarias.

¿Tiene este ritmo sus notas distribuidas regularmente?

X	X	X	X	X	X	X	X	.	.	.	.

Es evidente que no, que tiene todas las notas apelotonadas al principio del ritmo y todos los silencios al final. Tendríamos que mover las notas para hacerlo más regular. Pero ¿cómo? Hay dos observaciones que nos van a ayudar:

1. En un ritmo de regularidad máxima solo puede haber dos distancias.

2. Además, esas dos distancias tienen que ser d y $d+1$.

Llamaremos sucesión de distancias a las distancias entre notas consecutivas según se obtienen leyendo el ritmo de izquierda a derecha; por ejemplo, la sucesión de distancias del ritmo [x . . x x . x . . .] es $(3, 1, 2, 4)$. Recordemos, además, que estamos estudiando ritmos de clave y que los ritmos se repiten todo el tiempo. Esto significa que se cuenta la distancia entre la última nota y la primera; de ahí el 4 en la sucesión de distancias anterior.

Si la condición (1) no se cumple y hay tres distancias d_1, d_2 y d_3, con $d_1 < d_2 < d_3$, se pueden cambiar las notas a distancias d_1 y d_3 para que sean más regular. Por ejemplo, el ritmo [x x . . x .], que tiene como sucesión de distancias consecutivas a $(1, 3, 2)$, se puede convertir en [x . x . x .], con distancias $(2, 2, 2)$, que es un ritmo más regular. Si solo hay dos distancias, pero $d_1 < d_2 + 1$, por el argumento anterior, puedo conseguir un ritmo más regular cambiando una nota. El ritmo [x . x . . .], por ejemplo, tiene sucesión de distancias $(2, 4)$, y se puede hacer más regular moviendo la segunda nota para transformarlo en [x . . x . .], con distancias $(3, 3)$.

Volviendo al ritmo que nos ocupa, movemos las notas del ritmo de arriba para intentar obtener un ritmo de regularidad máxima. He aquí los frutos de nuestros intentos:

X	X	X	X	X	.	X	.	X	.	X	.

Este ritmo cumple las dos propiedades (1) y (2) enunciadas arriba, pero no es de regularidad máxima. Esto significa que las dos propiedades de arriba son condiciones necesarias pero no suficientes para construir un ritmo de regularidad máxima. Si escribimos las distancias entre notas consecutivas de este ritmo tenemos la siguiente sucesión:

$$(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2)$$

Es intuitivamente claro que una sucesión de distancias $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2)$ daría un ritmo de mayor regularidad:

X	X	.	X	X	.	X	X	.	X	X	.

Y este es el ritmo de regularidad máxima que buscábamos. En este punto se hace evidente que un ritmo de regularidad máxima no es único. Podíamos haber tomado una rotación de ese ritmo, por ejemplo:

.	X	X	.	X	X	.	X	X	.	X	X

Una curiosidad: ¿cuál es el máximo común divisor de 12 y 8? Cuatro, que es el número de veces que se repite la célula rítmica [. x x] en el ritmo anterior. Esto, por supuesto, no es un hecho fortuito.

Y por último, si quiero tocar 7 notas, entonces tengo que dividir 12 por... ¿cuánto? Pues tampoco se puede

$$X \longrightarrow \frac{12}{X} = 7$$

pero volvemos a aplicar el principio de regularidad otra vez, y el ritmo resultante (salvo rotaciones) sería:

X	.	X	.	X	X	.	X	.	X	.	X

Los ritmos producidos con el principio de regularidad se llaman **ritmos euclídeos**. El principio de regularidad se ha revelado como una generalización de la división.

4. Gamamla

Hemos obtenido una serie de ritmos usando los divisores de 12 y el principio de regularidad. En la tabla de abajo tenéis todos los ritmos generados hasta ahora.

7 notas:	x	.	x	.	x	x	.	x	.	x	.	x
4 notas:	x	.	.	x	.	.	x	.	.	x	.	.
8 notas:	.	x	x	.	x	x	.	x	x	.	x	x
6 notas:	.	x	.	x	.	x	.	x	.	x	.	x
12 notas:	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Quizás penséis que esta música es pura especulación, que no existe, que no hay base musical suficiente para una pieza. Si es el caso, dejadme deciros que no es así. Esta música se encuentra en Ghana y se llama **gamamla**. Es una música que se interpreta para celebrar la cosecha y se toca con un **gankogui**, una campana doble de mano, como la que aparece en la figura de abajo.

Figura 1: *Gankogui*, la doble campana africana.

Cada campana tiene dos notas, una aguda y otra grave y cada miembro del grupo toca solo una de las voces. Abajo tenemos la partitura del gamamla;

la partitura refleja la distribución del timbre (la nota grave está debajo de la línea y la aguda, arriba).

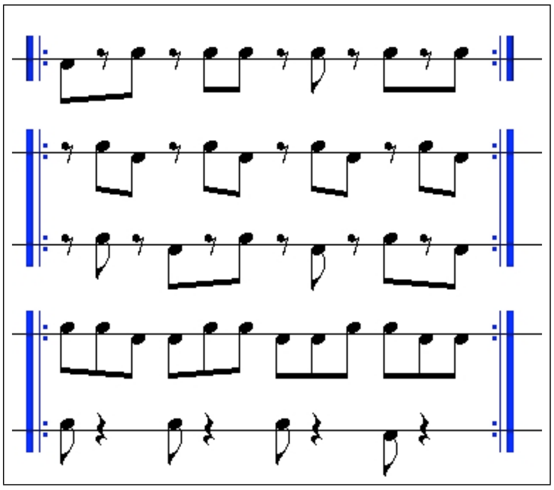


Figura 2: La partitura del *gamamla*.

5. Generación de ritmos euclídeos

Vamos a investigar en esta sección cómo se generan ritmos euclídeos. En la bibliografía se encuentran tres algoritmos -en principio, parecen distintos-, a saber, el de Bjorklund [1], el de Clough y Douthett [2] y el del vecino más cercano, que es un algoritmo heurístico esbozado también en [2]. Demain y sus coautores [3] probaron que los tres algoritmos son equivalentes y producen el único ritmo euclídeo de n pulsos y k notas salvo rotaciones. Describiremos solo los dos primeros en detalle; el tercer algoritmo, el del vecino más cercano, es una versión geométrica del algoritmo de Clough y Douthett.

5.1 Algoritmo de Bjorklund

Supongamos que queremos calcular el ritmo euclídeo de k notas y n pulsos, al que llamaremos $E(k, n)$. Primero ponemos k unos seguidos de $n-k$ ceros. El algoritmo tiene dos fases, una de **inicialización**, que solo se ejecuta una vez al principio, y otra de **resta**, que se ejecuta repetidamente hasta que la **condición de parada** se satisface. En todo momento el algoritmo mantiene dos listas A y B de cadenas de bits, donde a y b representan sus longitudes, respectivamente.

1. **Fase de inicialización.** Se toma la cadena $\{1, \overset{k}{\ldots}, 1, 0, \overset{n-k}{\ldots}, 0\}$, y se pone A como los $a = \text{mín}\{k, n-k\}$ bits de la cadena y B como los restantes $b = \text{máx}\{k, n-k\}$ bits. A continuación, el algoritmo quita

$\lfloor b/a \rfloor$ grupos de a bits cada uno de B cogiéndolos de derecha a izquierda y los pone debajo de A (véase la figura 3, pasos (1) y (2)). Las nuevas listas están formadas por a cadenas de $\lfloor b/a \rfloor + 1$ bits cada uno, en el caso de A, y de $b \mod a$ cadenas de un bit cada una, en el caso de B.

2. **Fase de resta.** En esta fase el algoritmo quita $\lfloor a/b \rfloor$ cadenas de b bits cada una de la lista B tomándolos de derecha a izquierda y los añade a A poniéndolos debajo. Después de esta operación las listas A y B se redefinen como sigue: A se compone de las primeros b cadenas desde la izquierda, mientras que B está formada por las $a \mod b$ restantes cadenas; véase la figura 3, paso (3).

3. **Condición de parada.** El algoritmo termina cuando, después de una fase de resta, B está formada bien por una única cadena o por la cadena vacía. La salida del algoritmo se obtiene concatenando las cadenas de A de izquierda a derecha con las cadenas de B (si esta no es vacía); véase la figura 3, paso (4).

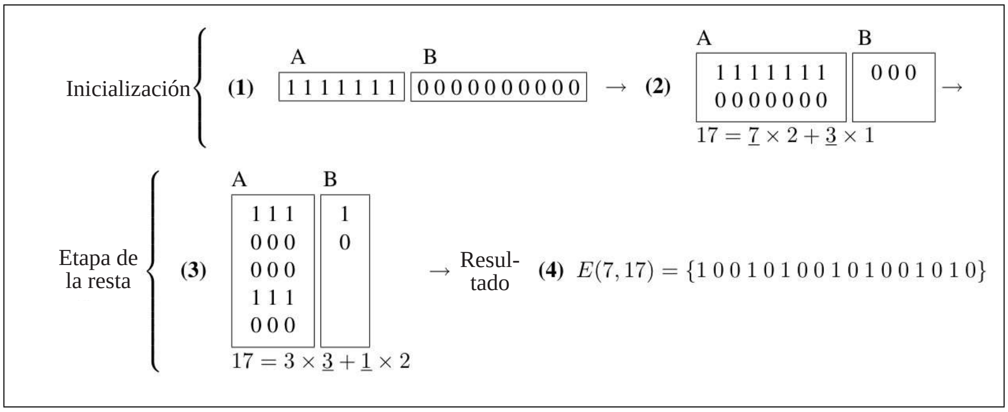


Figura 3: El algoritmo de Bjorklund.

5.2 Algoritmo de Clough y Douthett

Es quizás el algoritmo más sencillo que hay. Explota directamente la propiedad de la división de formar el máximo número de grupos posible. Para un ritmo de k notas y n pulsos, el algoritmo de Clough y Douthett calcula los números

$$\left\{ \left\lfloor \frac{in}{k} \right\rfloor \mid i = 0, \ldots, k-1 \right\}$$

La sucesión obtenida proporciona las notas del ritmo euclídeo. Nótese que con este sistema se numeran las posiciones de los pulsos de 0 a $n-1$. Siguiendo con el ejemplo de $E(7,17)$, tendríamos $\{0,2,4,7,9,12,14\}$. Pasando este ritmo a notación de ceros y unos tenemos [1 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1 0 0], que es una rotación del ritmo obtenido en la figura 3.

5.3 Ejemplos de ritmos euclídeos

En la figura siguiente tenemos varios ritmos euclídeos escritos en notación occidental.

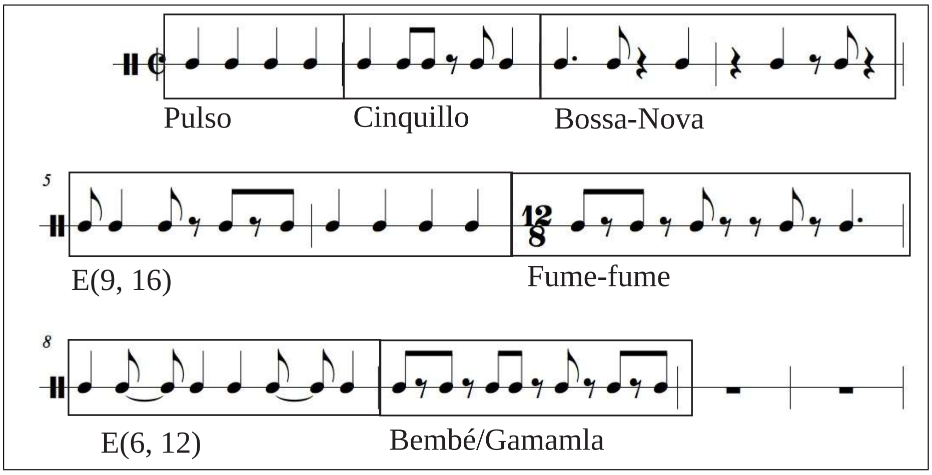


Figura 4: Ritmos euclideos de músicas del mundo.

El pulso es el ritmo $E(4,16)$, esto es, la negra en el compás de cuatro por cuatro; nótese que 4 divide a 16. El cinquillo es $E(5,8)$ y es un ritmo que aparece, entre otras, en la música cubana. La clave bossa-nova es el ritmo $E(5,16)$, el cual tiene unas propiedades rítmicas muy interesantes (los saltos perceptuales). El fume-fume es una clave muy común en África y corresponde a $E(5,12)$. El ritmo $E(7,12)$ es uno de los ritmos del gamamla, que resulta ser una clave muy usada en la música africana y cubana.

Como ya hemos insistido, muchas claves que se encuentran en el músicas tradicionales resultan ser euclídeas. Es curioso comprobar que muchos ritmos euclídeos (o alguna de sus rotaciones) tienen estructura de llamada y respuesta. Esto significa que hay una parte que plantea una "cuestión" y otra que "responde" a esa cuestión. Eso ocurre con el ritmo $E(9,16)$ de la figura 4, por ejemplo. Los ritmos más interesantes surgen cuando k y n son primos relativos.

6. Para saber más

En realidad, generar ritmos euclídeos es equivalente a resolver el problema de problema de distribuir k objetos en n cajas de la manera más regular posible y aplicar la solución al campo de la teoría del ritmo. Este problema ha aparecido en varios campos: teoría de escalas, informática gráfica, física de neutrones, cálculo de años bisiestos, teoría de cadenas, etc. Demain y sus coautores [3] estudiaron a fondo los ritmos euclídeos; dedujeron varios resultados importantes sobre ritmos euclídeos y mostraron un amplio catálogo de tradiciones musicales donde aparecen estos ritmos. Gómez y sus coautores ([4] y [5]) profundizaron en el estudio de los ritmos euclídeos, en particular, investigaron qué operaciones dejan invariantes los ritmos euclídeos y cómo descomponer ritmos euclídeos en términos de otros ritmos euclídeos.

Referencias bibliográficas

[1] E. Bjorklund: *The theory of rep-rate pattern generation in the SNS timing system*, SNS ASD Technical Note SNS-NOTE-CNTRL-99, Los Alamos National Laboratory, Los Alamos, U.S.A., 2003.
[2] J. Clough and J. Douthett: *Maximally even sets*, Journal of Music Theory 35, 93-173, 1991.
[3] Erik D. Demaine, Francisco Gomez-Martin, Henk Meijer, David Rappaport, Perouz Taslakian, Godfried T. Toussaint, Terry Winograd, and David R. Wood: The distance geometry of music, *Computational Geometry: Theory and Application*, 2008.
[4] F. Gómez, Talaskian P., and G.T. Toussaint: Interlocking and euclidean rhythms, *Journal of Mathematics and Music* 3, 15-30, 2009.
[5] F. Gómez, Talaskian P., and G.T. Toussaint: Structural properties of euclidean rhythms, *Journal of Mathematics and Music* 3, 1-14, 2009.

Paco Gómez
Universidad Politécnica de Madrid
Escuela Universitaria de Informática
Departamento de Matemática Aplicada
Campus Sur
28031 Madrid
e-mail: `fmartin@eui.upm.es`
`http://www.webpgomez.com`