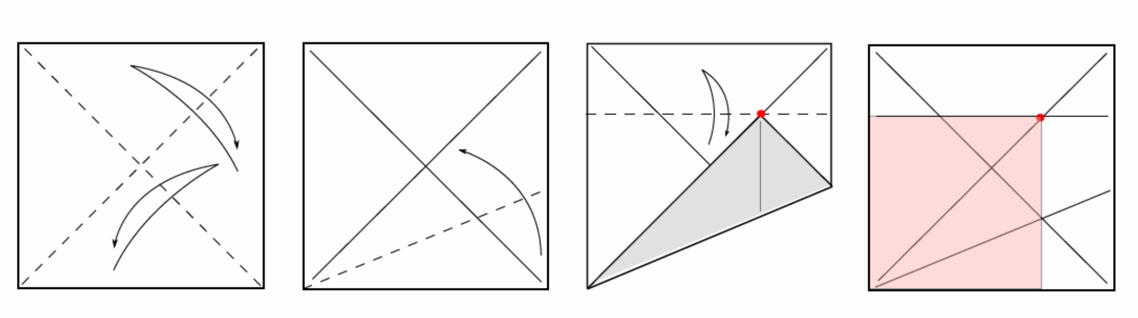
Doblando cuadrados (Solución: Jorge Concha)

Para resolver el problema planteado, se ha dividido a su vez en dos más generales: i) por una parte, hallar mediante plegado un cuadrado cuya superficie sea la i-ésima parte de un cuadrado dado; ii) y por otra parte, trasladar el cuadrado hallado al centro del cuadrado original y rotarlo de tal modo que las rectas tangentes a sus lados pasen por los vértices del cuadrado original. Como se verá, la primera parte de la solución presenta una naturaleza más geométrica y la segunda parte tiene un carácter más papiroflécktico.

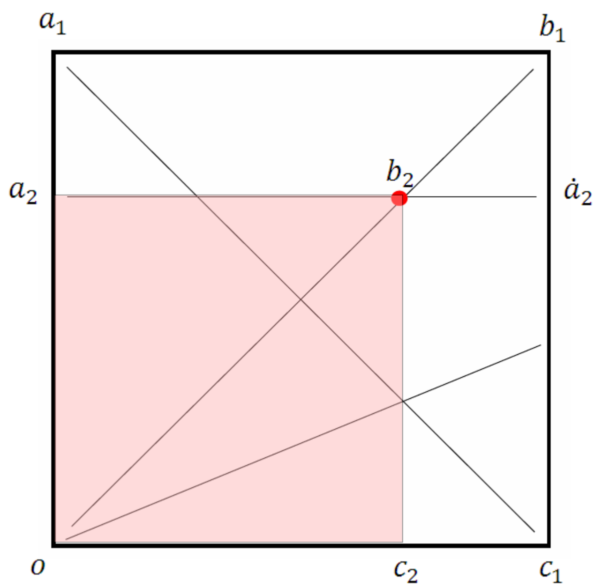
i) Método General para la obtención mediante plegado de un cuadrado cuya superficie sea la i-ésima parte de un cuadrado dado.

Empezaremos hallando un cuadrado cuya superficie sea la mitad del cuadrado original. Para simplicar la demostración asumimos que el cuadrado original es de lado=1 y área=1



1 2 3 4

<u>Demostración:</u>



A través del Teorema de Pitágoras

$$\overline{ob_2}^2 = \overline{oa_2}^2 + \overline{a_2b_2}^2$$

$$\overline{a_2b_2} = \overline{oc_2}$$

$$\overline{ob_2}^2 = \overline{oa_2}^2 + \overline{oc_2}^2$$

$$\overline{ob_2} = \overline{oc_1} = 1$$

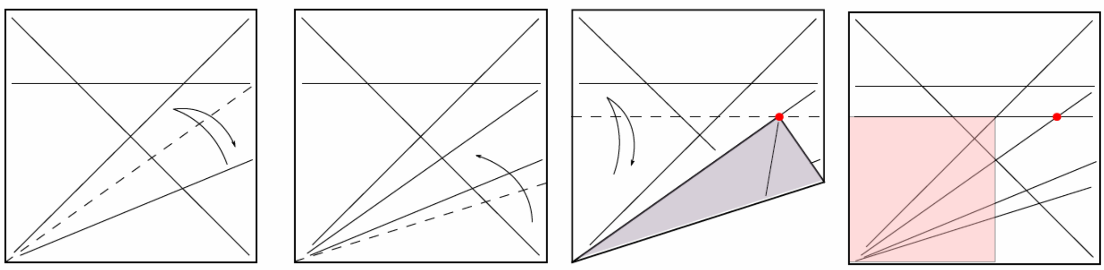
$$\overline{oa_2} = \overline{oc_2}$$

$$\overline{ob_2}^2 = 2\,\overline{oa_2}^2$$

$$\overline{oa_2} = \sqrt{\frac{\overline{ob_2}^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

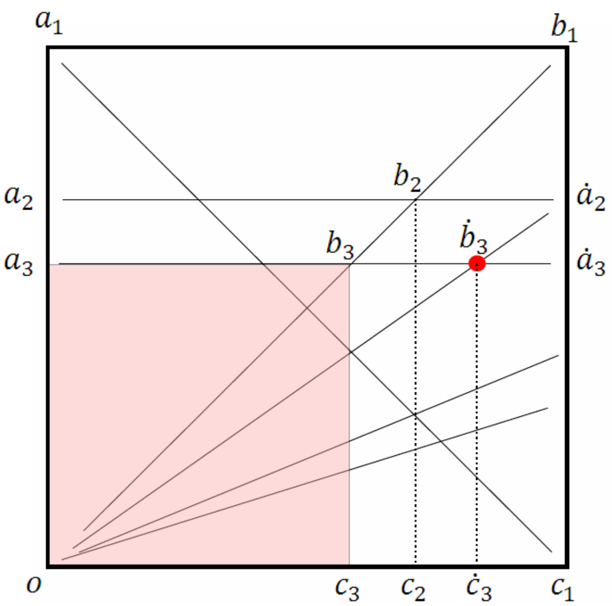
Teniendo en cuenta que el cuadrado obtenido tiene de lado $\sqrt{1/2}$ se demuestra que tiene una superficie de $1/2$, es decir, la mitad del cuadrado original.

Para hallar un cuadrado cuya superficie sea la tercera parte de la superficie del cuadrado original, realizamos los siguientes pliegues:



5 6 7 8

Demostración:



Los rectángulos $\overline{oa_2\dot{a}_2c_1}$ y $\overline{oa_3\dot{b}_3\dot{c}_3}$ son semejantes y de proporción $1{:}\frac{1}{\sqrt{2}}$; es decir:

$$\frac{\overline{oc_1}}{\overline{oa_2}} = \frac{\overline{o\dot{c}_3}}{\overline{oa_3}} = \frac{1}{\sqrt{1/2}} = \sqrt{2}$$

$$\overline{o\dot{c}_3} = \sqrt{2}\,\overline{oa_3}$$

$$\overline{o\dot{b}_3}^{\,2} = \overline{oa_3}^{\,2} + \overline{o\dot{c}_3}^{\,2}$$

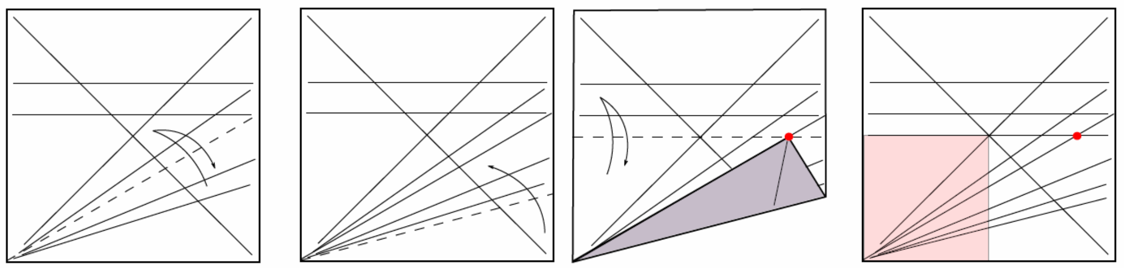
$$\overline{o\dot{b}_3}^{\,2} = \overline{oa_3}^{\,2} + \left(\sqrt{2}\,\overline{oa_3}\right)^2$$

$$\overline{o\dot{b}_3}^{\,2} = \overline{oa_3}^{\,2} + 2\overline{oa_3}^{\,2} = 3\overline{oa_3}^{\,2}$$

$$\overline{oa_3} = \sqrt{\frac{\overline{o\dot{b}_3}^{\,2}}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

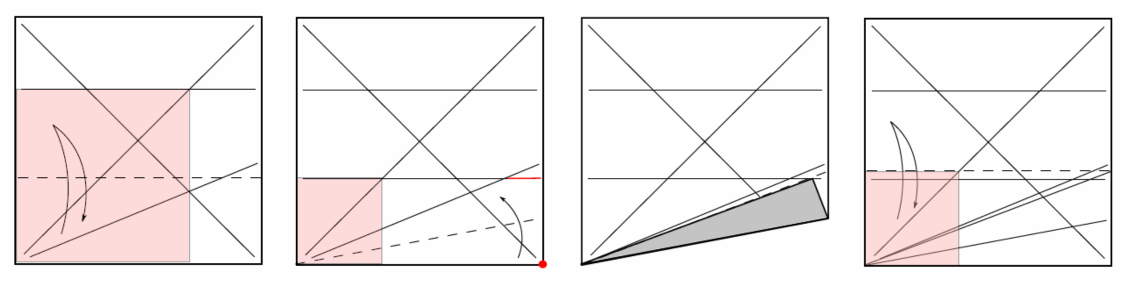
Teniendo en cuenta que el cuadrado obtenido tiene de lado $\sqrt{1/3}$ se demuestra que tiene una superficie de $1/3$, es decir, la mitad del cuadrado original.

Repitiendo este proceso se puede ir obteniendo sucesivamente un cuadrado que tenga como superficie la 4ta, la 5ta, la 6ta y, en general, hasta la i-ésima parte del cuadrado original. Sin hacer la demostración analítica, a continuación se muestran los diagramas para la obtención por este método de la cuarta parte del cuadrado original:



9 10 11 12

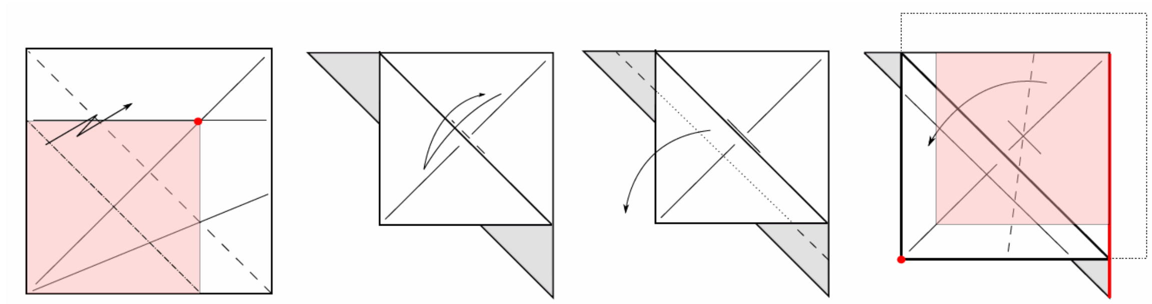
Obviamente, para hallar la cuarta parte de un cuadrado no son necesarios tantos pliegues, sino que simplemente basta con doblar el cuadrado por sus mitades. Asimismo, habiendo obtenido la i-ésima parte de un cuadrado por cualquier procedimiento, con este método podemos obtener la parte i+1, e invirtiendo la secuencia de plegado, la parte i+i. Esto nos indica que el método aquí expuesto combinando con otras técnicas de división conocidas nos puede ayudar a obtener normalmente en pocos pasos la fracción del cuadrado que deseemos. Veámoslo con un ejemplo: la mitad de un cuadrado se divide en cuatro (obteniendo una 8va parte del cuadrado original) y utilizando el método expuesto a la inversa, se obtiene la 7ma parte del cuadrado original:



13: Mitad 14: Octava parte 15 17: Séptima parte

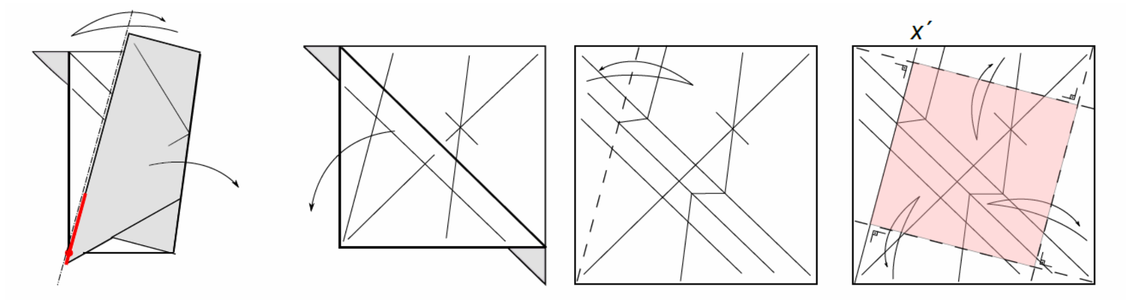
ii) Procedimiento para localizar un cuadrado de dimensiones conocidas tal que las rectas tangentes a sus lados pasen por los vértices de un cuadrado dado.

La secuencia de plegado expuesta a continuación es válida para cualquier cuadrado construido a partir de uno de los vértices del cuadrado dado. Como ejemplo, utilizaremos el cuadrado obtenido en el paso 4:



18 19 20 21

Notese que hasta el momento lo único que se ha hecho ha sido construir una figura semejante a la que hubieramos obtenido al situar el cuadrado que queremos obtener (área en rojo) en el centro del cuadrado original (línea punteada), pero con la particularidad de que se ha prolongado la tangente del lado del cuadrado que se quiere rotar (línea roja).



22 23 24 25

De esta forma obtenemos un punto *X´* tal que que plegando como se indica en la figura 25 se consiga un cuadrado central cuya superficie sea la mitad de la superficie del cuadrado de partida. Aplicando el procedimiento comprendido entre los pasos 18-25 a los resultados de los pasos 8 y 12 se obtienen sendos cuadrados centrales cuya superficie es, respectivamente, la tercera y la cuarta parte del cuadrado de partida. En general, el proceso explicado nos permite obtener el punto *X´* para cualquier cuadrado conocido, construido en uno de los vértices del cuadrado de partida tal y como aparece en el paso 18.