



El rostro humano de las Matemáticas

JUNTA DE ANDALUCÍA

CONSEJERÍA DE EDUCACIÓN

CENTRO DEL PROFESORADO DE SEVILLA

Las actividades que se proponen han sido elaboradas por el profesorado participante en la actividad “El rostro humano de la matemáticas” que se desarrolló en el Centro de Profesorado de Sevilla de enero a mayo de 2010. Este profesorado es:

Ponente:

.- D. José Muñoz Santonja

Asistentes:

- .- D. Diego Cabrera Ramírez
- .- Dña. Corona García Agudo
- .- Dña. Lourdes Holgado Cuenca
- .- Dña. María Estíbaliz de Miguel Rúiz
- .- Dña. Laura Olías Álvarez
- .- Dña. María del Carmen Rosa Hernández
- .- Dña. Belén Torres Vallejos

Coordinador:

.- D. Mariano Real Pérez.

INTRODUCCIÓN.

Este cuadernillo tiene la pretensión de ofrecer una serie de actividades para que el profesorado pueda sacar rendimiento didáctico a la exposición “El Rostro Humano de las Matemáticas”. Contiene el material elaborado entre el ponente y los asistentes a la parte presencial del curso del mismo nombre convocado por el Centro del Profesorado de Sevilla.

Este material está estructurado de la siguiente forma. Para cada uno de los matemáticos y matemáticas presentes en la exposición, al menos aquellos que nos ha dado tiempo, hemos creado tres tipos de actividades:

1) Preguntas sobre el panel.

Se compone de una serie de preguntas para contestar con la información que aparece en el panel. Sería una especie de cuestionario para rellenar mientras se visita la exposición. El principal objetivo es desarrollar la competencia lingüística del alumnado, de forma que tengan que leer atentamente la información, sean capaces de entenderla y después se expresen por escrito de forma adecuada respondiendo a las cuestiones planteadas.

2) Ampliación de la información del panel.

Las preguntas anteriores se amplían con otras sobre la vida y obra de la persona en concreto, o bien de otras personas importantes en la historia y que tuvieron

El rostro humano de las matemáticas

relación con el matemático o matemática concreto, pero no aparecen en otro panel de la exposición. Todo lo que aparece puede ser encontrado en Internet, algunas son más evidentes y otras un poco más rebuscadas. Aparte de desarrollar la competencia digital y de tratamiento de información, se pretende potenciar la de autonomía e iniciativa personal y la de aprender a aprender.

3) Actividades complementarias.

Esta última parte incluye actividades más matemáticas para realizar en el aula. En cierta forma son actividades de las mismas que realizamos normalmente en clase, pero en este caso justificadas históricamente por la persona sobre la que trabajamos. Suelen ser aspectos matemáticos trabajados por la propia persona en sí, o por matemáticos relacionados con ellas, por ser coetáneos, porque la persona que nos ocupa ha trabajado sobre el trabajo de esos matemáticos, o por pertenecer a las áreas de trabajo de quién está representado en el panel.

Esta última parte ha sido la más complicada de realizar pues hay personas de las que no se guardan ejemplos concretos de su trabajo y hemos pretendido cubrirla como hemos podido, por ejemplo, al no guardarse ninguna muestra del trabajo de Hipatia, pero al saber que realizó comentarios sobre la Aritmética de Diofanto, hemos añadido algunos problemas tomados de esta publicación. En otros casos, especialmente a partir del siglo XVII y XVIII nos hemos encontrado con que la matemática desarrollada por nuestros personajes sobrepasa ampliamente el nivel de conocimientos en que nos estamos moviendo. Por eso habrá algunos personajes en los que no aparecerá esta parte.

En general, las preguntas que amplían a las propias del panel las hemos tomado de Internet o de algunos textos biográficos sobre los personajes de la exposición, en especial de la colección “Las matemáticas en sus personajes” de la Editorial Nivola.

Dado que hemos trabajado poca gente durante poco tiempo, no ha sido posible realizar un estudio exhaustivo de los 31 personajes de la exposición, por eso hemos desarrollado aquellos que hemos tenido oportunidad, quedando la ampliación de actividades y el cubrir los huecos para cuando se vuelva a realizar el curso en años próximos.

Una última cosa que queríamos que quedara clara es que este cuadernillo es un banco de actividades para que el profesor seleccione. No está pensado para fotocopiar directamente y llevarlo tal cual a clase sino para que el profesor que desee utilizarlo haga una labor de selección escogiendo las preguntas que les parezcan más interesantes para el tipo de alumnado que tenga. Las actividades de la tercera parte las hemos dividido, cuando ha estado claro, en tres partes: 1^{er} ciclo de ESO, 2^o ciclo de ESO y Bachillerato. Eso no quiere decir que no haya actividades que puedan realizarse en Primaria o que alguna de esas actividades no puedan cambiar de nivel, según el alumnado que las trabaje.

Esperamos que sepáis perdonar los posibles errores, que los habrá, y que os sea un material de utilidad para sacarle mucho más rendimiento a la exposición y para desarrollar aspectos históricos y, en algunos momentos, culturales y artísticos en vuestras aulas.

José Muñoz Santonja

INDICE.

PERSONAJE	Página
Pitágoras	5
Euclides	9
Arquímedes	12
Apolonio	14
Hipatia	17
Al-Khowarizmi	21
Fibonacci (Leonardo de Pisa)	26
Tartaglia (Nicolo Fontana)	31
Gerónimo Cardano	36
René Descartes	38
Pierre de Fermat	43
Isaac Newton	46
Gottfried Wilhelm Leibniz	48
Madame de Chatelet	51
Leonard Euler	52
Joseph Louis Lagrange	56
Sophie Germain	62
Carl Friedrich Gauss	65
Evariste Galois	70
Sonia Kovalevskaya	71
David Hilbert	73
Emmy Noether	76
Julio Rey Pastor	78
Pedro Puig Adam	84

PITÁGORAS

Busca el panel del matemático más conocido de la historia de la matemática y responde a las siguientes preguntas:

- Pitágoras acuñó los términos Filosofía y Matemática, indica como las definió.
- Toda su filosofía la resumía en una famosa frase, ¿cuál?
- ¿Cuál es su Teorema más famoso? Escribe su enunciado.
- Aparte de las Matemáticas, ¿qué otras materias estudió?
- ¿Qué descubrió de forma empírica?
¿En qué siglos vivió?
- ¿Qué resultados se le atribuyen en Geometría?
- ¿A qué otro matemático, también presente en la exposición, se hace referencia en este panel?
- Según el panel, Pitágoras es el principal responsable del origen en Grecia, ¿de qué?



INVESTIGACIÓN:

- ¿En qué ciudad nació Pitágoras? ¿A qué región pertenecía dicha ciudad?
- ¿Como se llamaba su escuela más famosa?
- Busca el nombre de varios matemáticos que pertenecieron a su escuela.
- ¿Quién fue Teano? ¿Que relación guardó con Pitágoras?
- Los pitagóricos estudiaron los números perfectos, define dichos números e indica alguno de ellos.
- ¿Cuál era el símbolo de los pitagóricos?
- ¿Que es la tetractis o tetractis?
- ¿Por qué tuvo que huir Pitágoras de Samos?
- ¿Que afirmaban los pitagóricos sobre la estructura del Universo?
- Pitágoras creía en la transmigración de las almas, ¿en que consiste?
- Dibuja o localiza un mapa donde aparezcan las ciudades más famosas donde vivió o estuvo Pitágoras.

ACTIVIDADES EXTRAS:

Se llama terna pitagórica a un trío de números a, b y c que verifican $a^2+b^2=c^2$.

1^{er} ciclo de ESO:

- De las siguientes ternas indica cuáles son pitagóricas:
a) 3, 4 y 5 ; b) 1, 2 y 3 ; c) 5, 12 y 13.
- Comprueba que todas las ternas de la forma 3·x, 4·x y 5·x donde x es un número cualquiera son Pitagóricas.
- Utilizando el resultado anterior indica cuánto miden los catetos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea: a) 20 ; b) 125 ; c)12.
- Los pitagóricos buscaron ávidamente el camino para encontrar ternas a, b y c que verifiquen $a^2+b^2=c^2$. Encontraron una ley de formación que se puede expresar en la siguiente forma:

$$a = m \text{ (siendo m impar) ; } b = \frac{1}{2} \cdot (m^2 - 1) \text{ ; } c = \frac{1}{2} \cdot (m^2 + 1)$$

Utiliza la relación anterior para rellenar la siguiente tabla.
¿Qué relación observas entre b y c?
Comprueba que se verifica que $a^2 + b^2 = c^2$.

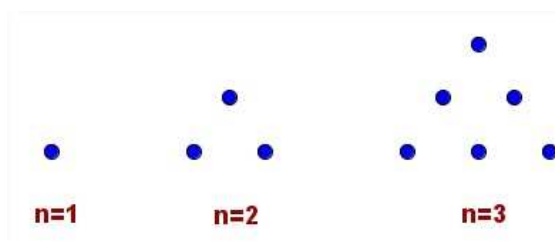
m	a	b	c
3			
5			
7			
9			
11			

- Platón encontró otra ley de formación para las ternas pitagóricas. Siendo m un número natural, los valores $a=2 \cdot m$, $b=m^2-1$ y $c=m^2+1$.

Completa la siguiente tabla. ¿Qué relación encuentras entre b y c?
Comprueba que efectivamente a, b y c forman una terna pitagórica.

m	a	b	c
2			
3			
4			
5			

- Busca entre los primeros 30 números naturales los dos primeros números perfectos (ten presente que un número primo nunca puede ser perfecto).
- Los números figurados eran aquellos que podían representarse, geoméricamente, dispuestos como polígonos regulares. Así los números triangulares es posible expresarlos como triángulos equiláteros (el primero se supone que es el 1). Halla los 10 primeros números triangulares. Fíjate en la ley de formación que aparece en el dibujo.



- Pitágoras demostró que es posible encontrar un cuadrado que puede descomponer en suma de dos cuadrados, es decir, $a^2=b^2+c^2$. Este resultado se puede generalizar. Busca un cuadrado que pueda descomponerse en suma de tres cuadrados. Es decir, encuentra cuatro números a , b , c y d que verifiquen $a^2=b^2+c^2+d^2$.

2º ciclo de ESO:

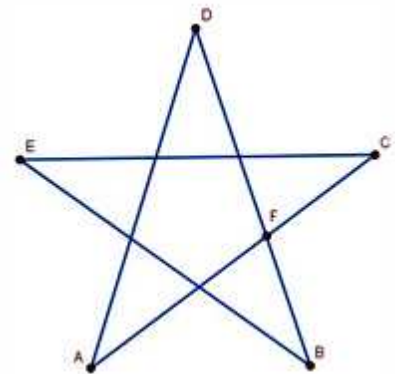
- Los pitagóricos encontraron que los números de la forma

$$a = m \text{ (siendo } m \text{ impar)} ; b = \frac{1}{2} \cdot (m^2 - 1) ; c = \frac{1}{2} \cdot (m^2 + 1)$$

forman ternas pitagóricas, es decir, verifican $a^2+b^2=c^2$. Comprueba que es cierto.

- Halla el valor de $c-b$. ¿Que relación hay, por tanto, entre b y c ?
- Repite las dos actividades anteriores para la ley de formación encontrada por Platón.
- Calcula la altura de un triángulo equilátero de lado 3 cm.
- Pitágoras descubrió la fórmula con la que se obtiene la medida del ángulo interior de un polígono regular de n lados, que viene dada por $\frac{(n-2) \cdot 180}{n}$. Utilizando ese resultado resuelve las siguientes cuestiones:
 - ¿Qué polígono regular tiene como ángulo interior? a) 144° ; b) 162° ; c) 180°
 - Calcula el área de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 15 cm.

- Uno de los tópicos pitagóricos más fascinantes y que más influencia ha tenido sobre el arte, la música, la biología e incluso la magia ha sido la razón aurea. Su valor es $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ La podemos encontrar en el pentágono, el símbolo de la escuela pitagórica. Comprueba, midiendo sobre el pentágono, que $\frac{AC}{AF} = \phi$.



- La divina proporción (otro nombre de la razón aurea) en su forma de rectángulo de oro se aplica en la actualidad al diseño de elementos u uso común como las tarjetas o los documentos de identidad. Coge tu DNI, bonobús, folio, tarjeta, etc. y calcula el cociente entre el largo y el ancho de dicho elemento. Comprueba que se acerca al número de oro.
- La proporción aurea también es muy común en nuestro cuerpo. Halla la división

El rostro humano de las matemáticas

entre los siguientes pares de medidas y comprueba cuál se acerca más a la razón aurea:

- ❖ La altura de una persona y la medida desde su ombligo hasta el suelo.
 - ❖ La distancia del hombro a los dedos y del codo a los dedos.
 - ❖ La altura de la cadera y la altura de la rodilla.
 - ❖ El cociente entre la 1ª falange y la 2ª o entre la 2ª y la 3ª.
- Encuentra una fórmula que te dé el número triangular que ocupa el lugar n.
 - Busca la ley de formación de los números cuadrangulares. Es decir, los números figurados que pueden dibujarse como cuadrados.
 - Si sumamos dos números triángulos consecutivos, ¿qué obtenemos?

Bachillerato:

Dibuja un triángulo rectángulo y comprueba que, para cualquier ángulo no recto, se verifica la relación fundamental de la trigonometría: $\text{sen}^2\alpha + \text{cos}^2\alpha = 1$.

¿Cuál es la longitud máxima que puede tener un listón de madera para que entre en un ascensor de medidas 2,05 x 1,20 metros.

La razón aurea proviene de dividir un segmento en dos partes, de forma que la proporción entre el segmento original y el lado mayor, sea la misma que entre la división mayor y la menor. Plantea esa proporción a partir de la gráfica adjunta y comprueba que se obtiene el número aureo.



EUCLIDES

El griego Euclides escribió el libro de texto de matemáticas más famoso de la historia. Visita su panel y contesta a las siguientes cuestiones:



- Como se describe a Euclides en el panel.
- ¿Entre qué siglos vivió?
- Su obra principal, los Elementos de Euclides, ¿qué consideración reciben?, ¿por qué?
- ¿De cuántos libros de compone?
- ¿Qué recoge esa importante recopilación?
- Euclides está considerado como una persona irónica. Cuenta qué anécdotas de su vida ilustran ese pensamiento.
- En el panel se citan otros matemáticos griegos. Indica cuáles conoces de tus clases de matemáticas y con qué resultados se relacionan.
- En el panel se cita la Divina Proporción, ¿en relación con qué?
- El libro VI se dedica a las figuras semejantes, ¿Qué son figuras semejantes?
- Entre los poliedros regulares que aparecen al final del panel, hay dos imágenes que están cambiadas, es decir, dos de los sólidos tienen mal sus nombres, indica cuáles son.
- Copia el nombre de los cinco poliedros platónicos e indica sus características (nº de caras y polígonos que forman esas caras).

INVESTIGACIÓN:

- Busca qué significa que dos números o cantidades sean inconmensurables.
- Investiga qué significa POSTULADOS.
- Encuentra los 5 postulados de Euclides. A través de los cuales se fundamentó toda la matemática de sus Elementos.
- Según se nos dice en el panel, Euclides recopiló los conocimientos de otros matemáticos anteriores a él: Tales, Pitágoras, Hipócrates de Quios, Demócrito, Eudoxo y Teeteto. Busca las fechas aproximadas en que vivieron y crea una línea de tiempo ordenando a dichos matemáticos.
- Localiza que se conoce como divina proporción. ¿Con qué otros nombres se hace referencia al mismo elemento?
- ¿Quién fue Leonardo Da Vinci? ¿Qué relación tuvo con las matemáticas?

- ¿Quién fue Luca Paccioli?
- Los poliedros platónicos que aparecen en el panel son los únicos que pueden formarse, en cada caso, con un solo polígono regular. A partir de ellos produciendo cortes en los vértices o uniendo distintos polígonos regulares se pueden obtener los poliedros arquimedianos. Haz una pequeña investigación sobre ellos buscando que tipo de poliedro son y cuántos hay. Elige tres de ellos para los que debes escribir su nombre indicar de qué tipo de polígonos se compone y de donde provienen, en el caso de que provengan de uno regular al que se le han producido cortes.

ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

- En los libros XI y XII se estudia la geometría de sólidos. En concreto área y volúmenes como el área del círculo. Indica cuál es el área de un círculo y el volumen de una esfera en función del radio.
- Euclides definía el área del círculo como la semicircunferencia multiplicada por el radio. ¿Es correcta esa definición?
- Dentro de los teoremas que componen Los Elementos, se encuentran muchos de los que se estudian actualmente en la escuela. Por ejemplo, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo vale 180° . Haz una tabla con los polígonos desde 3 a 8 lados y escribe la suma de los ángulos interiores de cada uno de ellos.
- Si los polígonos anteriores fuesen regulares, es decir, todos sus ángulos interiores valiesen lo mismo, ¿cuánto valdría el ángulo interior de cada uno de ellos?
- Aunque fueron descubiertos por Pitágoras, Euclides trabajó con los números perfectos, que son aquellos que son iguales a la suma de todos sus divisores menos él mismo. Comprueba que los números 6 y 28 son números perfectos.

2^o ciclo de ESO:

- En el libro VIII se trabajan los números que están en progresión geométrica. Define que es una progresión geométrica. Si los números 6 y 9 son los dos primeros números de una progresión geométrica indica cuál es la razón y halla su término general.
- Aunque actualmente está en desuso, durante muchos años se utilizó el llamado Algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos números. El proceso era el siguiente: se divide el mayor entre el menor, una vez hecha la división se divide el divisor entre el resto obtenido, esto último se repite hasta obtener de resto cero. Una vez conseguido esto último, el último divisor utilizado es el máximo común divisor. Utiliza este método para hallar el M.C.D. de los números

693 y 504.

- Cuando tenemos dos números el mínimo común múltiplo es igual al producto de ambos números dividido entre el MCD. Halla el m.c.m. de los números anteriores.
- Euclides descubrió que los cuatro primeros números perfectos vienen dados por la fórmula $2^{n-1} \cdot (2^n - 1)$ siendo n los cuatro primeros números primos. Encuentra los cuatro primeros números perfectos.
- El siguiente número perfecto tiene 8 cifras y se encuentra para $n=13$. Hállalo.
- Relacionados con los números perfectos están los números abundantes que son aquellos en los que la suma de sus divisores, salvo él mismo, es mayor que el propio número. Encuentra entre los 20 primeros números, cuáles son abundantes.
- La mayoría de los números abundantes son pares, el primer número abundante impar es el 945. Comprueba que es abundante.
- De forma similar se definen los números deficientes como aquellos en los que la suma de sus divisores, sin el propio número, es menor que el propio número. ¿Cuáles son los números más deficientes, es decir, aquellos que la suma de sus divisores, salvo él mismo, es más pequeña?
- Comprueba que el número anterior y el posterior a los dos primeros números perfectos son ambos deficientes.
- ¿Ocurre lo mismo con el tercer número perfecto?

Bachillerato:

- Demuestra que los números primos y las potencias naturales de los números primos son siempre números deficientes.

ARQUÍMEDES

Visita el panel de uno de los personajes que más aplicó las matemáticas a la resolución de problemas cotidianos y contesta las siguientes cuestiones:

- ¿En qué siglo vivió Arquímedes?
- ¿Qué ciudad ayudó a defender Arquímedes con sus inventos?
- ¿Qué significa Eureka?
- ¿Con que adjetivos se reconoce a Arquímedes en las matemáticas?
- ¿Cuál era su nacionalidad?
- ¿Cómo murió?
- ¿A qué principios se asocia Arquímedes?
- ¿Por qué es singular el estilo de Arquímedes?
- ¿Cuál es la razón matemática que relaciona el volumen de un cono, una semiesfera y un cilindro de idénticos radio y altura?
- ¿A qué es igual el volumen de una esfera?



INVESTIGACIÓN:

- ¿Qué grandes matemáticos conoces que vivieran antes que Arquímedes?
- ¿A qué se refería cuando dijo “dadme un punto de apoyo y levantaré el mundo”?
- ¿Qué principio descubrió estando dándose un baño?
- ¿Qué parte de las ciencias son la Estática y la Hidrostática?
- ¿Qué famoso matemático se cree que fue profesor suyo?
- ¿Qué aproximación del número π dio en su obra “De la medida del círculo”?
- ¿Qué epitafio solicitó que figurara en su tumba?
- Busca un dibujo que represente la espiral de Arquímedes.
- ¿Qué es el tornillo de Arquímedes?, ¿para qué lo inventó?, ¿en qué provincia andaluza lo usaron los romanos?
- Gran parte de la obra de Arquímedes ha llegado hasta nosotros a través de un palimpsesto del siglo XIII, ¿qué es un palimpsesto?

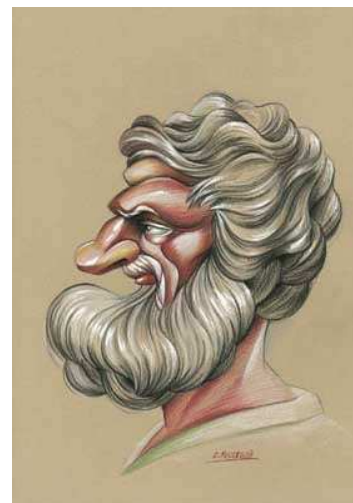
ACTIVIDADES EXTRAS:

- Arquímedes descubrió la relación o razón que existía entre el volumen de un cilindro, el de una semiesfera y el de un cono de idénticos radio y altura. Basándote en dicho resultado y sabiendo que el volumen de un cilindro de radio r y altura h es 12m^2 , calcula el volumen de un cono de igual radio y altura. ¿Cuál sería el volumen de la semiesfera de igual radio?
- Arquímedes dijo que el número π estaba comprendido entre los números $310/71$ y $31/7$. ¿Qué números son éstos? Esto permitió usar una buena aproximación que cometía un error absoluto y uno relativo que se pretende que calcules usando cinco decimales
- Usando polígonos inscritos y circunscritos, Arquímedes calculó el área de un cilindro. Calcula por este método (usando hexágonos y tus conocimientos de trigonometría) un intervalo que contenga el área de un círculo de radio la unidad.
- Arquímedes afirmó que el área de una esfera era cuatro veces el área de su círculo mayor, o sea, demostró que el área de una esfera era: $A = 4\pi r^2$
- Arquímedes demostró que el volumen de una esfera es: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, calcula el volumen de una esfera de radio 3cm.
- En el libro “Sobre la medida del círculo”, Arquímedes demostró que el área de un círculo es igual al área de un triángulo rectángulo de catetos el radio y la longitud de la circunferencia. Aprovecha este resultado y tus conocimientos de trigonometría para calcular el área de un círculo de radio 20cm.
- Otro resultado de Arquímedes sobre el área de un círculo es que coincide aproximadamente: $A = \frac{11}{14}d^2$, donde d indica el diámetro del círculo. Calcula de este modo el área del círculo del ejercicio anterior y el error absoluto y relativo que cometía Arquímedes con esta aproximación.

APOLONIO

Visita el panel del “gran geómetra de la forma” y contesta las siguientes cuestiones:

- ¿Con quién estudió Apolonio?
- ¿Qué otro matemático fue su rival?
- ¿Qué tres matemáticos gobernaron la Geometría griega?
- ¿Cuántos libros se conservan de su obra más importante?
- ¿Qué matemáticos pueden considerarse seguidores de la obra de Apolonio?
- ¿Qué nombres dio Apolonio a las cónicas obtenidas a través de un único cono?
- ¿En qué libro estudia la intersección de las cónicas? ¿Y las asíntotas de la hipérbola?
- ¿Qué estudia en el libro III?
- Describe el plano de corte necesario para conseguir cada una de las cónicas en un único cono. Representalo gráficamente.



INVESTIGACIÓN:

- Las cuatro figuras más destacadas de la antigüedad clásica son: Euclides, Arquímedes, Apolonio y Pitágoras. La mayor parte de la obra de estos autores se han preservado gracias al aporte de otra cultura por medio de traducciones a esa lengua. ¿Cuál fue esa cultura? ¿Quién fue el traductor de “Las cónicas” de Apolonio a esa lengua? ¿Dónde se encuentran estos manuscritos?
- A principios del siglo XVIII se publicó “Las cónicas” de Apolonio por primera vez para el mundo occidental, ¿quién fue el autor de la traducción? ¿en qué idioma estaba escrita?
- ¿Qué es el helenismo?
- ¿Dónde nació Apolonio?
- ¿Dónde vivió y trabajó durante un largo periodo de tiempo?
- ¿Qué relación existe entre Kepler y Apolonio?
- El problema de Pappus es una de las cuestiones más importantes de toda la historia de la Geometría. Fue planteado por los geómetras griegos a partir de Euclides y estudiado por Apolonio. ¿Cuál es el enunciado de este famoso problema?
- ¿Qué relación tuvo Apolonio con un rey?

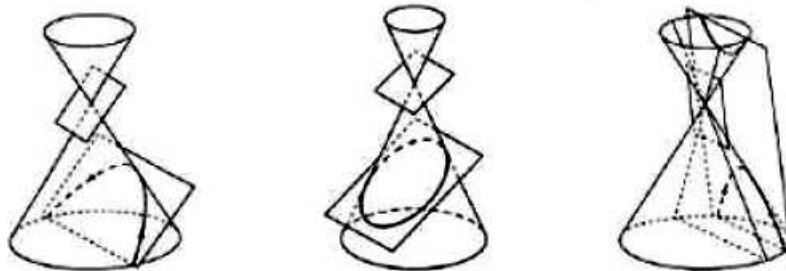
ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

- Busca en el centro elementos que contengan alguna figura cónica. Indica qué tipo de cónica es y donde la has encontrado.
- La cónica más simple es la circunferencia, ¿qué propiedad tienen todos los puntos de la circunferencia?
- ¿Qué elementos caracterizan a una circunferencia?
- Indica cuál es la longitud de la circunferencia y la superficie del círculo en función del radio.

2º ciclo de ESO:

- Reciben el nombre de cónicas las curvas que resultan de cortar una superficie cónica con un plano. Según la inclinación del plano con respecto al eje de la superficie cónica, puede obtenerse una circunferencia, una elipse, una hipérbola o una parábola. ¿Sabrías decir qué ángulo debe tener el plano con respecto al eje del cono para generar cada una de las curvas?

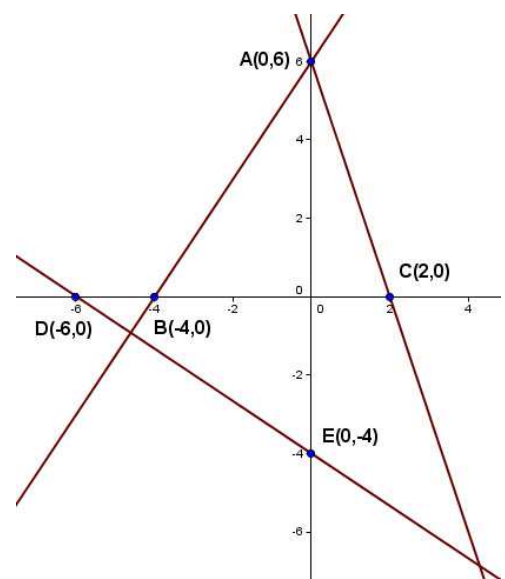


- ¿Qué sucedería si el plano contiene al eje de la superficie cónica? ¿Y a la generatriz del cono?
- Dados cuatro puntos sobre la recta A, B, C y D y el número α , determina otro punto P sobre la misma recta tal que $\frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{\overline{PB} \cdot \overline{PD}} = \alpha$.

- Dada la recta $2x+3y=6$, considera sobre ella cuatro puntos A, B, C y D, determina otro punto P sobre la misma recta tal que $\frac{\overline{PA} \cdot \overline{PC}}{\overline{PB} \cdot \overline{PD}} = 4$.

- Problema de Apolonio: Dados tres puntos A(0,-1), B(1,2) y C(-3,2) calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por ellos.

- Dadas tres rectas halla una circunferencia que se tangente a ellas. (Hacerlo en ESO de forma geométrica, hallando el incentro, en Bachillerato



de forma analítica).

Dadas las rectas $r/ 3x-2y+12=0$; $s/ 3x+y-12=0$; $t/ 2x+3y+12=0$ encuentra la ecuación de la circunferencia tangente a ellas.

Dadas las tres rectas anteriores encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por lo tres puntos de corte de las rectas.

Bachillerato:

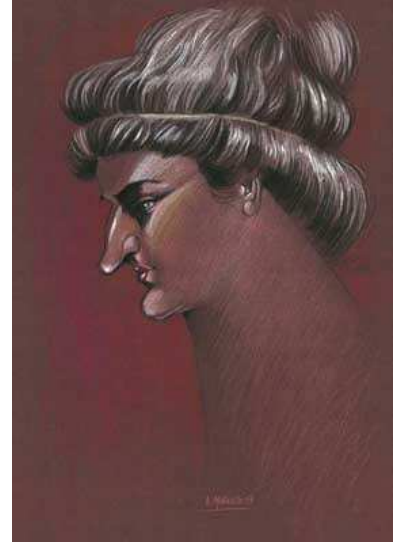
Apolonio estudia diez casos en los que, dados tres objetos que pueden ser puntos, recta o circunferencias, se pide dibujar una circunferencia tangente a los tres objetos. Veamos algunos de los casos:

- Dadas tres circunferencias hallar otra circunferencia tangente a las tres.
- Hallar la ecuación de un circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(3, -3)$ y que es tangente a la recta de ecuación $3x-4y+10=0$.
- Hallar la ecuación de un circunferencia que pasa por los puntos $A(2,1)$, $B(3, -3)$ y que es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2+y^2+10x+6y+3=0$.
- Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $y = -3$ sea el cuadrado de la distancia a la recta $x+y+1=0$.
- Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $3x+4y-2=0$ y $6x-8y+13=0$.

HIPATIA

En el panel sobre la mujer más antigua que figura en la exposición puedes encontrar respuesta a los siguientes interrogantes:

- De Hipatia no se conoce a ciencia cierta cuando nació, pero sí la fecha de su muerte. ¿Por qué se conoce tan bien esa fecha?
- ¿Qué significa el nombre de Hipatia?
- ¿Quién fue su padre? ¿Cuál era su profesión?
- Aparte de las matemáticas, ¿a qué otras disciplinas se dedicó?
- Fue considerada como la última científica ¿de qué?
- ¿Cómo se llamaba el libro que escribió?
- Tanto de forma individual como junto con su padre comentó diversas obras de grandes matemáticos, ¿cuáles fueron estas obras?
- ¿Que instrumentos astronómicos construyó?
- ¿Quiénes fueron sus asesinos?



INVESTIGACIÓN:

- ¿Dónde estaba situada la ciudad donde nació?
- Su padre estaba encargado de una importante institución, ¿a cuál nos referimos?
- Se le considera la última científica pagana, ¿que quiere decir pagana en este caso?
- Indica que es un astrolabio, ¿para qué se utiliza?
- Otro de los instrumentos construidos por Hipatia fue un hidroscoPIO. Explica qué es dicho aparato.
- Escribe una pequeña biografía de Diofanto.
- Indica algo sobre la vida y obra de Tolomeo.
- ¿Cuál era el esquema del universo que defendía Tolomeo?
- Tuvo un gran enfrentamiento con uno de los líderes religiosos de Alejandría, ¿quién fue este personaje?
- Las obras de Hipatia no se han conservado y conocemos de su existencia a través de sus discípulos. ¿Quiénes están considerados como sus discípulos?

ACTIVIDADES EXTRAS:

De las aportaciones personales de Hipatia no tenemos referencias, pero sabemos que una de sus trabajos fue un comentario sobre la Aritmética de Diofanto. Vamos a incluir aquí algunos de los problemas de ese libro. Vamos a mezclar los enunciados originales con problemas de la misma línea sobre los que trabajó Diofanto en su libro.

1^{er} ciclo de ESO:

- Problema 1 del libro I: Descomponer un número dado en dos partes cuya diferencia sea dada.
“Entre tú y yo tenemos 15 tebeos distintos y yo tengo tres más que tú. ¿Cuántos tenemos cada uno de nosotros?”
(Pista: como $x+y=15$ y $x-y=3$, si sumamos las dos cantidades, ¿qué obtenemos?)
- Problema 2 del libro I: Descomponer un número dado en dos partes que estén en una razón dada.
“Mi padre nos da todas las semanas 40 euros para que las repartamos entre mi hermana pequeña y yo. Si yo recibo el triple que mi hermana, ¿cuánto nos corresponde a cada uno?”
(Pista: Si yo recibo el triple de mi hermana, entre ella y yo ¿cuántas veces recibimos la parte de mi hermana?)
- Problema 7 del libro I: Restar dos números dados de un mismo número, de modo que las diferencias estén en una razón dada.
“Encuentra un número al que si le restamos 2 unidades se obtiene el triple del que se obtiene si le restamos 12 unidades.
- Problema 16 del libro I: Encontrar tres números que sumados de dos en dos den números dados.
“Tengo tres sobrinos, María, Juan y Rodrigo que edad tienen cada uno de ellos si te digo que la suma de las edades de María y Juan es 26, la de las edades de María y Rodrigo es 22 y la de Juan y Rodrigo 18.”
(Pista: si sumamos las tres cantidades $26+22+18$, ¿qué obtenemos?)
- Uno de los problemas tradicionales relacionados con Diofanto es la leyenda que aparece en su lápida, en donde habla de su vida y se pide cuál es la edad de Diofanto. Encuéntrala a partir del siguiente texto:
“Dios le concedió ser niño durante una sexta parte de su vida, y una duodécima parte de ella más tarde cubrió de vello sus mejillas; encendió en él la antorcha del matrimonio tras una séptima parte, y cinco años después le concedió un hijo. ¡Ay! Un chico de nacimiento tardío y enfermizo al que el frío destino se llevó cuando alcanzó la edad de la mitad de la vida total de su padre. Éste consoló su aflicción con la ciencia de los números durante los cuatro años siguientes, tras los cuales su vida se extinguió”

2º ciclo de ESO:

- Problema 21 del libro I: Encontrar tres números tales que el mayor exceda al mediano en una fracción dada del menor, el mediano exceda al menor en una fracción dada del mayor, y el menor exceda a un número dado en una fracción del mediano.
“Encuentra tres números sabiendo que el primero menos el segundo es la mitad del tercero, el segundo menos el tercero es la tercera parte del primero y el tercero menos 3 unidades es la séptima parte del segundo”.
- Problema 26 del libro I: Dados dos números, encontrar otro que multiplicado por cada uno de ellos dé, respectivamente un cuadrado y el lado de este cuadrado.
“Encontrar un número que al multiplicarlo por 2 y por 12 obtengamos el lado y la superficie de un cuadrado”.
- Problema 27 del libro I: Encontrar dos números tales que su suma y su producto sean números dados.
“Descomponer el número 126 como producto de dos números cuya suma sea 23”.
- Problema 28 del libro I: Encontrar dos números tales que su suma y la suma de sus cuadrados sean números dados.
“La suma de los lados de dos cuadrados vale 16 unidades y la suma de sus cuadrados es 130 unidades cuadradas. Encuentra el lado de cada uno de los cuadrados”.
- Dados los números 6 y 8 encontrar un tercer número de forma que los productos de cada dos de ellos sean tres números que están en progresión aritmética (esta es una simplificación del problema 39 del libro I).
- Dentro del apéndice del libro I hay búsquedas de distintas condiciones, veamos algunas de ellas:
 - a) Si buscamos dos números tales que la suma de sus cuadrados sea a y el producto de los dos números sea b , ¿qué relación podemos encontrar entre a y b ?
 - b) Si la diferencia de dos números es a y la suma de los cuadrados de los dos números es b , ¿cómo tiene que ser $2b - a^2$?

Bachillerato:

- Problema 14 del libro I: Encuentra dos números tales que su producto esté en una razón dada con su suma.
“Encuentra dos números sabiendo que su producto es el triple que su suma. Los números tienen que ser enteros. ¿Cuántas soluciones hay? Si consideramos sólo los naturales, ¿cuáles son los valores más pequeños que lo cumplen? Encuentra alguna solución en que los dos valores sean negativos. Escribe una función que te de el valor de uno de los números en función del otro. ¿Qué tipo de función es?”
- Si la diferencia entre dos números es a y la diferencia entre sus cuadrados es b comprueba que se debe cumplir que $a^2 < b$.

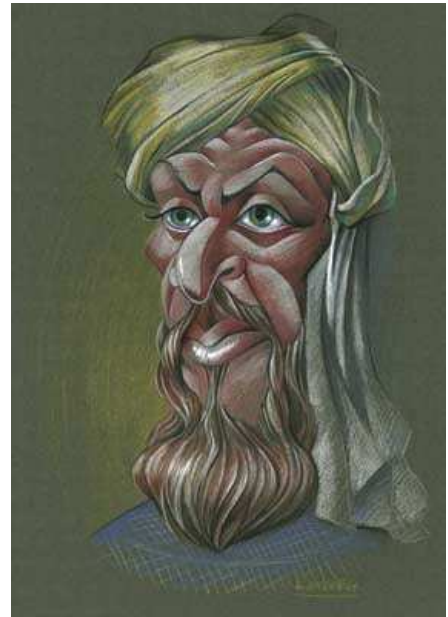
El rostro humano de las matemáticas

- El problema 8 del libro II pide descomponer un cuadrado dado en suma de dos cuadrados, es decir, dado a encontrar x e y que verifiquen que $x^2+y^2=a^2$. Ese resultado, ¿te recuerda a algún Teorema conocido?, ¿a cuál?, enúncialo. Todos los valores (x,y) que verifican esa ecuación, ¿qué figura geométrica generan?
- Encontrar un número tal que si se le suma 4 o se le suma 17 se obtienen en ambos casos cuadrados perfectos (una variación sobre el problema 11 del libro II).
- Del apéndice del libro II extraemos este problema. Encontrar tres números tales que sus cuadrados perfectos estén en progresión aritmética.
- El problema 10 del libro III pide encontrar tres números tales que el producto de dos cualesquiera de ellos, aumentado en un número dado, forme un cuadrado. Para simplificarte el cálculo te indicamos que los números buscados son $x=2$, $y=2$ y $z=\frac{1}{8}$ encuentra que número hay que sumarle al los tres productos de cada dos de ellos para obtener tres cuadrados perfectos.
- El siguiente problema pide lo mismo, pero ahora el valor se resta, en lugar de sumárselo a los productos binarios. Si el número que se resta es 4 y te damos la pista de que los cuadrados que se obtienen al restar 4 son tres cuadrados pares consecutivos, encuentra los tres números
- El problema 11 del libro IV pide encontrar dos números tales que la diferencia entre ellos sea la misma que la diferencia entre sus cubos. Te damos la pista de que ambos números son múltiplos de la fracción $\frac{1}{13}$.

AL-KHOWARIZMI

Este matemático árabe es considerado por muchos el padre del Álgebra, visita su panel y responde a las siguientes cuestiones:

- ¿De dónde proviene la palabra *álgebra*?
- ¿Qué califa reinó durante la vida de Al-Khowarizmi?
- ¿En qué escuela trabajó?
- ¿Cuál es su obra más importante?
- ¿Qué contenidos trabajó en sus cinco tratados?
- ¿Qué tres clases de números utilizaba?
- En el panel aparecen los tipos de ecuaciones que resolvía Al-Khowarizmi. Indica si las siguientes ecuaciones podían ser resueltas por él, indicando la razón: $x^2+5x+7=0$; $x^2-x-6=0$.



INVESTIGACIÓN:

- Sitúa en un mapa la ciudad de Bagdad.
- Encuentra una imagen del sello postal de Al-Khowarizmi. ¿Qué conmemoraba dicho sello?, ¿cuándo se emitió?
- De Al-Khowarizmi proviene una palabra que se utiliza actualmente, ¿cuál es?, ¿qué significa?
- Los árabes difundieron el sistema de numeración decimal que utilizamos actualmente por toda Europa pero, ¿Quiénes lo crearon realmente?
- Encuentra el nombre de otros sabios que trabajaron con Al-Khowarizmi en su misma escuela y comenta algo de sus obras.
- En concreto busca información sobre la vida y obra de Thâbit Ibn Qurra.
- En El Quijote se citan a unas personas llamándolas *algebristas*, pero no se refería a personas que se dedicaran al álgebra, ¿a quiénes se estaban refiriendo?

ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

- Al-Khowarizmi utilizaba la palabra “cosa” para referirse a la incógnita de una ecuación, de esa manera la ecuación $x^2+c=bx$ él la llamaba “cuadrado de la cosa

más número igual a cosa”, donde solía considerar el cuadrado con coeficiente la unidad y al hablar de cosa consideraba que la incógnita (x en nuestro caso) iba multiplicada por un número. Escribe en lenguaje algebraico actual las restantes ecuaciones que él citaba de la siguiente forma:

Cosa igual a número

Cuadrado de la cosa igual a número

Cuadrado de la cosa igual a cosa

Cuadrado de la cosa más cosa igual a número

Cuadrado de la cosa igual a cosa más número

- Al-Khowarizmi utiliza una aproximación para hallar la raíz cuadrada de un número. Lo que hacía era descomponer dicho número en un cuadrado perfecto más otro número y entonces realizaba la siguiente aproximación.

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}$$

Utiliza la aproximación anterior para hallar la raíz cuadrada de 11 y compara el resultado con el obtenido con la calculadora. ¿Cuántas cifras exactas obtienes por el método anterior?

2º ciclo de ESO:

- Al-Khowarizmi utiliza una aproximación para hallar la raíz cuadrada de un número. Lo que hacía era descomponer dicho número en un cuadrado perfecto más otro número y entonces realizaba la siguiente aproximación.

- $$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}$$

Halla, por ese método, la raíz cuadrada de 89. Calcula el error absoluto y relativo que se comete al tomar esa aproximación como valor de $\sqrt{89}$.

- Resuelve, utilizando el método de Al-Khowarizmi que has visto en el panel, la ecuación $x^2+6x=16$.
- En esa época, solo tenían sentido las soluciones positivas de las ecuaciones, ya que al convertir las ecuaciones en figuras geométricas no tenían sentido los elementos negativos. Por esa razón, cuando calculaba la raíz cuadrada solo consideraba el valor positivo. Si quisieras obtener las dos soluciones de la ecuación anterior, ¿qué deberías modificar en el método de Al-Khowarizmi?, hazlo para hallar la otra solución de la ecuación anterior.
- Uno de los coetáneos de Al-Khowarizmi fue Thâbit Ibn Qurra que trabajó la aritmética y la geometría en muchas vertientes. Encontró una regla para hallar pares de números amigos (que son aquellos en los que cada uno es igual a la suma de los divisores del otro número, salvo el propio número). Ibn Qurra descubrió que siendo $n > 1$, si son primos los números

$$P=3 \cdot 2^{n-1}-1 \quad ; \quad Q=3 \cdot 2^n-1 \quad ; \quad R=9 \cdot 2^{2n-1}-1$$

Entonces los números $2^n \cdot P \cdot Q$ y $2^n \cdot R$ son números amigos. Compruébalo para $n=2$.

Bachillerato:

- Thâbit Ibn Qurra es autor de varias demostraciones del teorema de Pitágoras, todas ellas bastante visuales. En una de ellas, partía de colocar los dos cuadrados sobre la hipotenusa juntos, como vemos en la figura 1, la suma de las áreas es a^2+b^2 . Después trazaba la línea para obtener el triángulo rectángulo cuya hipotenusa es c . Intenta recomponer ahora esas tres piezas para formar un cuadrado de lado, con lo que demostrarías que $c^2=a^2+b^2$.

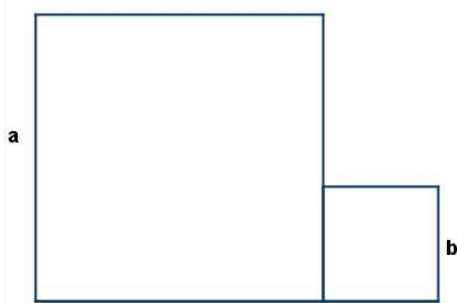


Figura 1

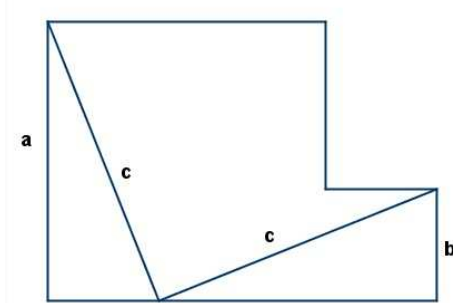
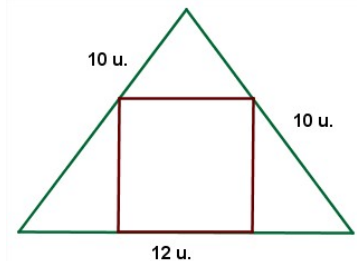
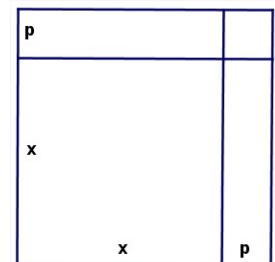


Figura 2

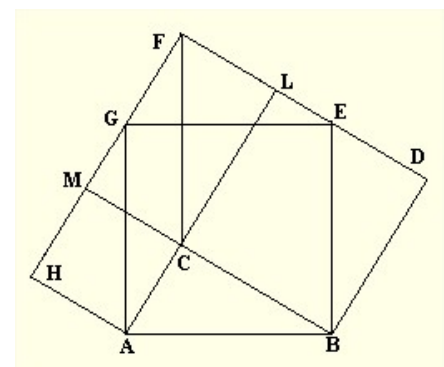
- Algunos de los problemas que resolvió Al-Khowarizmi provienen de los babilónicos, en concreto uno de los que retomó Herón de Alejandría fue el siguiente. Se quiere inscribir un cuadrado dentro de un triángulo isósceles de base 12 unidades y lados iguales 10 unidades. Se desea saber cuánto medirá el lado de dicho cuadrado. Intenta encontrar dicha medida.



- El método de Al-khowarizmi para resolver ecuaciones puede simplificarse completando el cuadrado añadiendo rectángulos solo en dos lados del cuadrado de lado x . Esos rectángulos tienen una amplitud p correspondiente a la mitad del coeficiente de x (cuando la ecuación tiene como coeficiente principal la unidad, es decir, es de la forma $x^2+2px=c$).
- Utiliza este método geométrico para deducir la fórmula que resuelve la ecuación general de segundo grado $ax^2+bx+c=0$.



- Ahora vas a realizar otra demostración del Teorema de Pitágoras atribuida a Ibn Qurra. El matemático parte de la figura adjunta. Razona por qué los triángulos ABC, BDE, CFL, CFM, AGH y EFG son iguales. Una vez demostrado halla el área de la figura ABDFH de dos maneras distintas, una como suma del cuadrado grande y los triángulos exteriores y otra



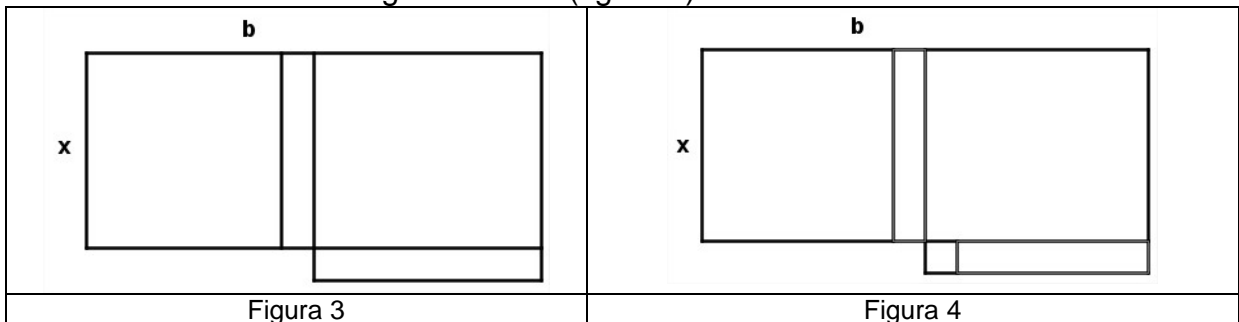
El rostro humano de las matemáticas

como suma de los cuadrados sobre los catetos del triángulo más los triángulos que los complementan. Al igualar deduce el Teorema de Pitágoras.

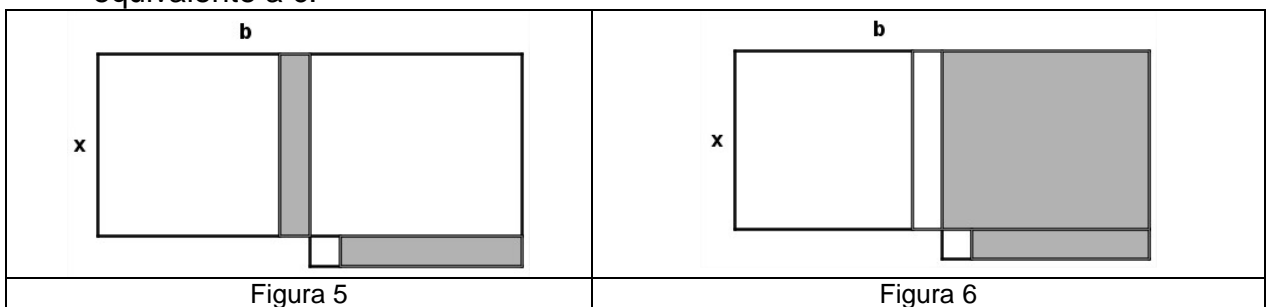
- Las ecuaciones de la forma $x^2+c=bx$ tenían una forma de resolución un poco más complicada que la que hemos visto en el panel para aquellas en la que la “cosa” estaba en el primer miembro. El planteamiento de Al-Khowarizmi era el siguiente. Construía un cuadrado de lado x y junto a él un rectángulo cuya área equivalía al valor c . De esa manera, tenía un rectángulo ampliado cuya área correspondía al primer miembro de la ecuación. Para que se cumpliera la ecuación, el ancho del nuevo rectángulo es x y la longitud debería ser b .

Al-Khowarizmi continuaba de la siguiente forma:

- Hallaba la mediatriz de la longitud del segmento y la prolongaba hasta obtener un cuadrado de lado la mitad de la longitud del rectángulo (como puedes ver en la figura 3).
- En la parte inferior, separaba un cuadrado correspondiente al valor que sobresale del rectángulo anterior (figura 4).



- Demuestra, algebraicamente, que los dos rectángulos que aparecen sombreados en la figura 5 tienen la misma área.
- Debido a lo anterior, la figura que aparece resaltada en la figura 6 tiene un área equivalente a c .



- Basta por tanto encontrar qué cuadrado (el pequeño en blanco de la figura) hay que sumar a ese valor c para obtener el cuadrado correspondiente al valor $\frac{b}{2}$. Para obtener el valor de x basta restarle el lado de ese cuadrado pequeño al lado del cuadrado grande, es decir, a $\frac{b}{2}$. Dicho de otro modo, es necesario

encontrar el valor de $d = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ y la solución de la ecuación sería $x = \frac{b}{2} - d$.

- Aplica este proceso para hallar la solución de la ecuación $x^2+40=14x$.

El rostro humano de las matemáticas

- Comprueba que la otra solución de la ecuación proviene de sumarle el valor d a $\frac{b}{2}$, en lugar de restarlo.
- Demuestra, a partir de la construcción general anterior, que el valor de x equivale a la fórmula para resolver la ecuación de 2º grado.

FIBONACCI

Este matemático es conocido por la sucesión que lleva su nombre, unida a un problema de conejos. Busca su panel y contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuál era su verdadero nombre? ¿Dónde nació?
- ¿Por qué países viajó?
- ¿Dónde aprendió las nuevas matemáticas indio-arábicas? ¿Quiénes fueron sus maestros?
- ¿Cuál es el libro más conocido de Fibonacci?, ¿con cuántos años lo escribió?
- ¿Cuál es el tema más importante de este libro?, ¿qué otros temas trató?
- Copia el enunciado más famoso del libro de Fibonacci y escribe la sucesión a que da lugar.



INVESTIGACIÓN:

- Investiga qué significa el seudónimo de Fibonacci.
- ¿Qué números forman el sistema indio-arábigo? ¿Qué aportó la cultura india y la árabe a ese sistema?
- En el panel se habla de distintos elementos de la naturaleza y del arte donde puede encontrarse la sucesión de Fibonacci, busca ejemplos de ese tipo en Internet y captura alguna imagen.
- La sucesión de Fibonacci comenzó a ser conocida en el siglo XIX gracias al matemático francés Édouard Lucas. Escribe un pequeño párrafo hablando de su vida y obra.
- Fibonacci participó, a lo largo de su vida, en varios torneos de matemáticas. Busca información sobre alguno de ellos.
- Investiga qué es el número de oro y que relación tiene con la sucesión de Fibonacci.

OTRAS ACTIVIDADES:

1^{er} ciclo de ESO:

- Hay muchas sucesiones que pueden formarse utilizando la misma regla de formación que la sucesión de Fibonacci, que sería la más simple de esas características. La siguiente más simple comienza con los números 1 y 3 y es conocida como Sucesión de Lucas. Halla sus diez primeros términos.

El rostro humano de las matemáticas

- La sucesión de Fibonacci guarda entre sus números muchas curiosas propiedades. Si multiplicamos dos números que ocupen lugares pares consecutivos, el resultado es igual a una unidad menos que el cuadrado del número comprendido entre ellos. Por ejemplo $1 \cdot 3 = 2^2 - 1$ [$2^0 \cdot 4^0 = (3^0)^2 - 1$]. Compruébalo con los restantes términos pares entre los 12 primeros términos de la sucesión que aparecen en el panel.
- Si en lugar de multiplicar dos términos de lugar par, se hace con dos términos que ocupen lugares impares consecutivos el resultado es una unidad más que el cuadrado del número comprendido entre ellos. Por ejemplo $2 \cdot 5 = 3^2 + 1$ [$3^0 \cdot 5^0 = (4^0)^2 + 1$]. Compruébalo con los restantes términos impares entre los 11 primeros términos de la sucesión que aparecen en el panel.
- También se cumple que la suma de los 3 primeros términos es el 5º menos 1, la de los cuatro primeros es el 6º menos 1 y así sucesivamente, la suma de los n primeros términos es una unidad menos que el término $n+2$. Compruébalo con las sumas desde los cinco primeros términos hasta los diez primeros términos.
- Comprueba que la suma de los diez primeros términos de la sucesión de Fibonacci es igual al séptimo término multiplicado por 11.
- Comprueba que la propiedad anterior también se cumple en la Sucesión de Lucas.
- El *Liber Abaci* contiene muchos problemas que hoy están considerados como matemática recreativa y como tal aparecen en curiosidades y pasatiempos. Uno de los más conocidos es el siguiente: Un campesino llegó a la orilla de un caudaloso río con una gran col, un lobo y una oveja. Para cruzar el río solo disponía de una pequeña embarcación que le permitía cruzar él y uno de los animales o la col. Podía pasarlos en varios viajes, pero el problema es que no podía dejar solos a la col y la oveja porque ésta se comería el vegetal y tampoco puede dejar solos al lobo y la oveja pues, sin su presencia, el primero se comería a la segunda. ¿Cómo se las apañó para pasar al otro lado del río con los tres elementos?
- El último capítulo del *Liber Abaci* está dedicado a problemas de geometría como el siguiente: En lo alto de una torre hay un mástil de 20 pies de altura. El mástil cae a tierra sin desprenderse de la torre, de modo que su extremo toca el suelo a una distancia de 12 pies de la base de la torre. Se trata de saber la altura de la torre.

2º ciclo de ESO:

- Busca una regla que relacione dos términos de lugar par consecutivos con el número comprendido entre ellos, parecida a la de la sucesión de Fibonacci, pero para la sucesión de Lucas.
- Haz lo mismo para dos términos de lugar impar consecutivos.
- Busca que relación hay en la sucesión de Lucas entre la suma de los primeros n términos de la sucesión y el término $n+2$ (busca algo parecido a lo visto en la de Fibonacci).
- Comprueba que la suma de los veinte primeros términos de la sucesión es once veces la suma del séptimo más el decimoséptimo términos.

El rostro humano de las matemáticas

- Escribe dos números genéricos a y b y calcula los términos de la sucesión de Fibonacci en función de ellos. ¿Qué característica encuentras?
- ¿De qué forma sería el término 15 de esa sucesión anterior? Particularízalo en la sucesión de Lucas y comprueba tu resultado.
- Demuestra que si partimos de dos números cualesquiera a y b y aplicamos la ley de formación de Fibonacci (cada término es la suma de los dos términos anteriores) siempre se cumple que la suma de los diez primeros términos de la sucesión es once veces el término séptimo.
- Los capítulos 6º y 7º del *Liber Abaci* tratan sobre fracciones. Fibonacci trabaja con varios tipos de ellas, entre ellas las llamadas unitarias o egipcias (pues fueron las que trabajaban los antiguos egipcios), es decir, aquellas cuyo numerador es la unidad. Cualquier otra fracción la expresaban como suma de fracciones de ese tipo sin repetir. Por ejemplo $\frac{11}{12} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$. Expresa, mediante fracciones unitarias, las fracciones: $\frac{13}{30}$, $\frac{23}{40}$, $\frac{49}{90}$.
- En el *Liber Abaci* se incluyen también muchos problemas que trabajan la proporcionalidad o la resolución de problemas. Incluso algunos de ellos es posible encontrárselos hoy día en los libros de texto. A continuación te presentamos varios de ellos para que los resuelvas.
 - ❖ Un hombre entró a una huerta que tenía siete puertas y tomó un cierto número de manzanas. Al abandonar la huerta le dio al primer guardia la mitad de las manzanas que llevaba más una. Al segundo guardia la mitad de las manzanas que le quedaban más una. Hizo lo mismo con los guardias de cada una de las cinco puertas que le faltaban. Cuando se fue de la huerta le quedaba una manzana; ¿cuántas manzanas había tomado en un principio?
 - ❖ Siete mujeres viajan a Roma. Cada una de ellas lleva siete mulas. Cada mula lleva siete sacos, cada uno de ellos con siete piezas de pan. En cada pieza de pan hay siete cuchillos y cada uno de ellos tiene siete dientes. ¿Cuántos dientes de cuchillo viajan a Roma?
 - ❖ Un hombre invierte un denario a una tasa de interés tal, que al cabo de cinco años tiene dos denarios y así cada cinco años su dinero se duplica. ¿Cuántos denarios tendrá al cabo de cien años?
 - ❖ Un rey mandó treinta hombres a su huerta a plantar árboles. Si pudieron plantar mil árboles en nueve días, ¿en cuántos días podrán treinta y seis hombres plantar cuatro mil cuatrocientos árboles?
 - ❖ Un comerciante compró manzanas y pagó 1 dinar por cada 7 manzanas. Al día siguiente vendió todas las manzanas ganando 1 dinar por cada 5 manzanas. Si el beneficio que obtuvo fue de 12 dinares, ¿cuántas manzanas compró?
 - ❖ Dos torres de 30 y 40 pies de altura están situadas a 50 pies una de otra. Entre ellas hay una fuente. Desde lo alto de cada torre, dos pájaros inician al mismo tiempo el vuelo hacia la fuente a la misma velocidad y la alcanzan simultáneamente. ¿Dónde estaba la fuente?

El rostro humano de las matemáticas

- También dentro del *Liber Abaci* incluye el siguiente truco de magia: “Si alguien lanza tres dados al aire y quieres saber cuantos puntos tiene cada dado, dile que multiplique por 2 los puntos de un dado y que a este doble le añada 5. Que multiplique el total por 5 y que añada 10, así como el número de puntos del segundo dado, a este producto. Que multiplique el resultado por 10 y que al producto le añada los puntos del tercer dado y que te diga el resultado. Para adivinar los puntos de cada dado basta restar 350. Del resultado, las centenas son los puntos del primer dado, las decenas los puntos del segundo dado y las unidades son los puntos del tercer dado.” Utilizando expresiones algebraicas comprueba que este truco funciona siempre, sean cuáles sean los valores de los dados.
- Resuelve este otro problema de geometría de dicho libro: Tenemos dos mástiles, de 35 y 40 pies de altura, separados por una distancia de 12 pies. Si uno de ellos cae sobre el otro, ¿a qué distancia del suelo queda su extremo superior?
- También se pueden encontrar problemas de progresiones como el siguiente: Al cabo de cuantos días dos viajeros habrán caminado lo mismo, sabiendo que el primero anda 20 millas diarias y el otro 1 milla el primer día, 2 el segundo, 3 el tercero, y así sucesivamente.
- El problema con el que acaba el *Liber Quadratorum* tiene el siguiente enunciado: “encuentra tres números tales que si a su suma se le añade el cuadrado del primero da otro número cuadrado, si a la suma anterior se le añade el cuadrado del segundo se obtiene otro cuadrado y si a la suma total se le añade el cuadrado del tercero se obtiene también otro cuadrado”. Si los números originales son 35, 144 y 360, encuentra los números cuyos cuadrados se obtienen como resultados de las sumas

Bachillerato:

- Cualquier número natural se puede escribir como suma de varios términos de la sucesión de Fibonacci. Compruébalo con los números 85 y 500.
- El número primo 28657 pertenece a la sucesión de Fibonacci y el lugar que ocupa, el 23, también es primo. Eso ocurre con todos los términos de la sucesión a partir del 5º. Si el número es primo, el lugar que ocupa también es un número primo. Compruébalo con los 20 primeros términos.
- Comprueba que la suma de los cuadrados de n términos de la sucesión de Fibonacci es igual al producto del último de los términos por el siguiente. Utiliza los primeros 10 términos.
- La suma de los n primeros términos de lugar impar es igual al primer término de lugar par siguiente. Compruébalo.
- Comprueba que también se cumple que la suma de los n primeros términos de lugar par es igual a una unidad menos que el término de lugar impar siguiente al último que se ha sumado.

El rostro humano de las matemáticas

- Escribe dos números cualesquiera de dos cifras. A partir de ellos halla los primeros 30 términos de una sucesión con la misma ley de formación que la de Fibonacci. Divide el último término entre el término anterior. ¿Es posible que obtengas el valor 1,6180339...? ¿Quién es ese número?
- El matemático Édouard Lucas, del que ya hemos hablado, investigó a fondo la sucesión de Fibonacci y encontró una regla para hallar cualquier término de dicha sucesión sin necesidad de calcular las anteriores (otros autores asignan esta regla al matemático francés Binet). La expresión para hallar el término que ocupa el lugar n viene dada por

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Utiliza una calculadora científica o una hoja de cálculo para hallar los términos del 6° al 10° y compáralos con los obtenidos por el método usual.

- En 1225, al pasar el emperador Federico II por Pisa, dos miembros de su séquito plantearon un torneo matemático para comprobar la fama que tenía Fibonacci. Le plantearon tres problemas que fueron resueltos por el matemático y que posteriormente incluyó en dos de sus obras editadas en ese año, en particular en el *Liber Quadratorum*. El primero de los retos matemáticos decía: encontrar un número tal que si a su cuadrado se le suma cinco y se le resta cinco se obtienen otros dos cuadrados. Este problema no tiene solución para números enteros. Comprueba que la solución que encontró Fibonacci, $\frac{41}{12}$, verifica esas condiciones.
- Para resolver el anterior problema, Leonardo partió de la que, a veces, se suele conocer como Identidad de Fibonacci:

$$(m^2 + n^2)^2 \pm 4mn(m^2 - n^2) = (m^2 - n^2 \pm 2mn)^2$$

Utiliza las identidades notables para demostrar que esa igual es cierta siempre sean cuales sean m y n .

- Otro de los problemas que le propusieron a Fibonacci en el torneo matemático decía: Tres hombres se reparten al azar un capital. A continuación, el primero aporta a un fondo común la mitad de su porción, el segundo un tercio y el tercero un sexto. Después hacen con el fondo tres partes iguales, y cada cual toma una parte para sí. ¿Cuánto tuvo cada uno en el primer reparto, si la cantidad final fue, para el primero, la mitad del capital inicial, para el segundo la tercera parte y para el tercero la sexta parte? (Nota: según el nivel de los alumnos se puede simplificar la resolución suponiendo que la cantidad a repartir es 47 ó 282).
- El matemático francés Albert Girard encontró una relación entre tres números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Si t_n representa el término de lugar n , demostró que $t_n^2 - t_{n-1} \cdot t_{n+1} = (-1)^{n-1}$. Elige tres términos consecutivos de Fibonacci (que no incluyan ni el primer término ni el segundo).

NICOLÁS FONTANA (TARTAGLIA)

Visita su panel y contesta las siguientes cuestiones.

- ¿Dónde y cuando nació y murió? ¿Entre qué siglos?
- ¿Por qué recibió el mote de Tartaglia?
- ¿Qué significa que era autodidacta?
- ¿A qué se dedicaba?
- ¿Cuál fue su principal aportación a las Matemáticas?
- ¿De qué otros dos matemáticos italianos se habla en el panel?
- ¿Cuál es el nombre del tratado matemático más importante que escribió?
- ¿De cuántas partes se compone el libro?
¿De qué tratan dichas partes?
- ¿En qué obra publicó Cardano la resolución de la ecuación de tercer grado?
- ¿Qué es el “triángulo de Tartaglia”? ¿Para qué se utiliza fundamentalmente?



INVESTIGACIÓN:

- El principio del siglo XVI fue muy conflictivo en el norte de Italia. Hubo muchas luchas en Lombardía entre varios ejércitos. Investiga un poco y encuentra qué países intervinieron en esas luchas y el nombre de quién comandaba las tropas en la “Toma de Brescia” cuando el pequeño Nicolás fue gravemente herido.
- Tartaglia participaba en torneos matemáticos. Busca información sobre dichos torneos.
- Encuentra los títulos de las cuatro obras más importantes escritas por Tartaglia.
- El triángulo de Tartaglia también es llamado triángulo de P_____ por otro gran matemático francés que estudió sus propiedades. Haz una pequeña biografía de este otro gran matemático.
- Es sabido que dicho “triángulo” no lo descubrió Tartaglia sino que era conocido desde mucho antes. ¿Qué otros tres grandes pueblo conocían su existencia con anterioridad al Renacimiento italiano?
- Investiga qué interrelaciona las ecuaciones de tercer grado y cuarto grado.

- ¿Qué reyes gobernaban en España durante la primera mitad del siglo XVI? ¿Tenía España, en ese tiempo, intereses en Italia? ¿Qué famosa batalla ganaron los ejércitos españoles “muy cerca” de Brescia en ese siglo? ¿Quiénes comandaban los ejércitos implicados?

OTRAS ACTIVIDADES:

- Un niño tenía curiosidad en saber el año en que murió el matemático Tartaglia y preguntó a su padre por la fecha. El padre le aportó los siguientes datos: "murió en el siglo XVI, la suma de las cifras que forman dicho año es 18 y la cifra de las unidades excede a la de las decenas en dos." ¿Cuál es la fecha?

Tartaglia escribió varios libros con problemas de contenido lúdico-recreativos. Entre ellos hemos entresacado los siguientes enunciados:

- Tres personas quieren repartirse el aceite que hay en una garrafa de 24 litros. Determinar cómo puede hacerse el reparto si se dispone de tres garrafas vacías con capacidades conocidas de 5, 11 y 13 litros.
- Ana y Pedro son dos niños que están con sus padres. Quieren cruzar el río, pero no hay puente, solamente una barquita en la que caben dos niños o una persona mayor. ¿Cómo harán para cruzar los cuatro a la otra orilla?
- Tres matrimonios (en los cuales los maridos son extremadamente celosos) quieren cruzar un río en una barca en la que caben como máximo dos personas. Determinar cómo debe planificarse el cruce si no puede dejarse a ninguna mujer en compañía de un hombre a menos que su marido esté presente.
- En plena tormenta, un capitán de barco se da cuenta que debe aligerar el peso del mismo. Aunque tira toda la mercancía al agua, aún debe “desalojar” más peso... ¡la mitad de la tripulación! La tripulación está formada por quince marineros venecianos y quince turcos. Los coloca formando un círculo y, contando a partir de cierto punto, cada ocho marineros será lanzado al agua. ¿Cómo debe disponer a la tripulación para que únicamente los turcos sean los “designati dalla sorte per essere gettati a mare”?

¡Muy racista el problema! Pero era la época, estaban en guerra....

- Un tonel está lleno de vino. Cada día se vacían dos cubos que son reemplazados por dos cubos de agua. Al cabo de seis días hay la mitad de vino y la mitad de agua. ¿Qué capacidad tiene el tonel?
- Dividir un segmento de un largo dado en tres trozos que formen un triángulo rectángulo. Utilizar sólo para la división la regla y el compás.
- Hallar el lugar geométrico de los puntos interiores a un triángulo tal que con los segmentos determinados entre dicho punto y cada uno de los vértices pueda formarse un triángulo rectángulo.

Dicho triángulo tiene muchísimas propiedades muy interesantes:

- ¿Cómo se calcula el número que está en cada celdilla?
- La suma de los números de cada fila es igual a 2 elevado al número de la fila. Compruébalo.
- Cada fila expresa las sucesivas potencias del número 11, las cuatro primeras de forma clara, y a partir de la quinta fila, si una casilla está formada por más de una cifra, efectuamos una sencilla suma llevándonos alguna cifra. Ejemplos:

$$11^0 = 1, 11^1 = 11, 11^2 = 121, 11^3 = 1.331, 11^4 = 14.641$$

Ahora comienzan los cambios: 11^5 sería 15(10)(10)51, pero hacemos la suma llevándonos las decenas y obtenemos: $11^5 = 161.051$

¿Quién sería 11^6 , 11^7 ,?

- La segunda diagonal, situada al lado de la diagonal formada por los unos exteriores, contiene la evidente sucesión de números naturales.
- La tercera diagonal, coloreada en amarillo, determina la serie de números triangulares:

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, etc.

El algoritmo que generan estos números triangulares es: $a_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

La serie de los números triangulares presenta muchas curiosidades o propiedades interesantes, como:

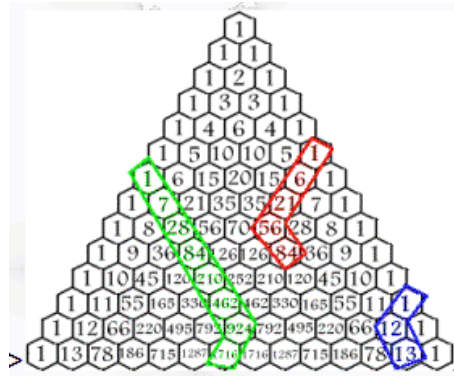
La suma de dos términos consecutivos a_n y a_{n-1} de esta serie es igual al cuadrado del número n .
 Por ej.: $3 + 1 = 4$, $6 + 3 = 9$, $10 + 6 = 16$, etc.

- Encuentra en el triángulo los números poligonales:

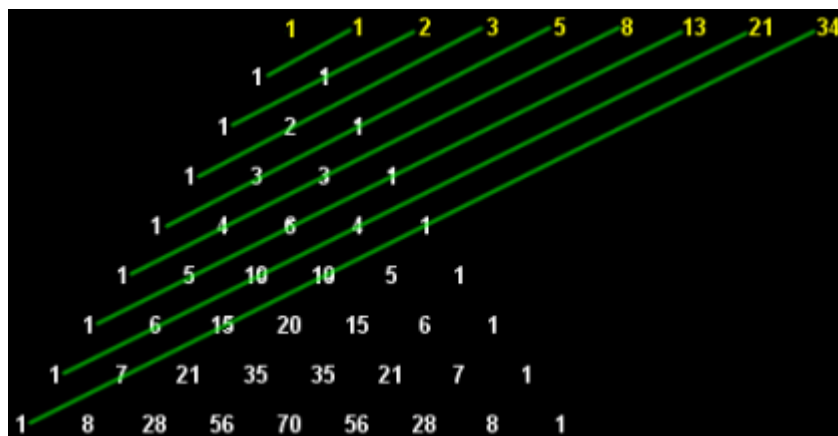
NÚMEROS	ORDEN				
	1	2	3	4	5
TRIANGULARES					
CUADRADOS					
PENTAGONALES					
HEXAGONALES					
HEPTAGONALES					

El rostro humano de las matemáticas

- Suma de diagonales:
El "stick de hockey"



- Tartaglia y la sucesión de Fibonacci:



- Tartaglia y el binomio de Newton:

$$(a + b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3 a^2 b + 3 a b^2 + a^3 \dots$$

Hallar $(a+b)^4$, $(a+b)^5$, $(a+b)^{11}$

$$(x+1)^2; (x+1)^3; (x+1)^4 \dots$$

$$(x-1)^2; (x-1)^3; (x-1)^4 \dots$$

$$(1+\sqrt{3})^2; (1+\sqrt{3})^4; (1+\sqrt{3})^7$$

- Tartaglia y el número de caminos para ir en una cuadrícula desde el (0,0) al (n,n) dirigiéndonos hacia la derecha y hacia arriba: 2, 6, 20,

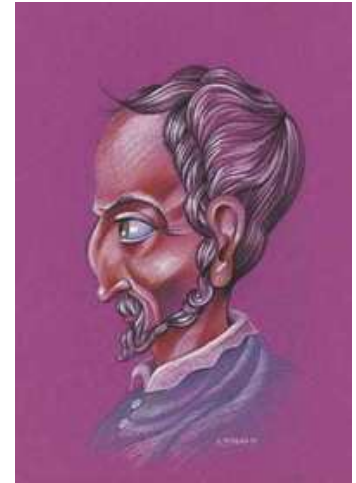
Más posibilidades se encuentran en:

- Tartaglia y la trigonometría,....
- Tartaglia y triángulo de Sierpinski:

CARDANO

Este matemático predijo la fecha exacta de su muerte. Tras visitar su panel responde a las siguientes cuestiones:

- ¿Dónde nació? ¿En qué siglo vivió?
- ¿Cuál fue su obra más importante?
- ¿Quién lo inició en las matemáticas?
- ¿Por qué fue encarcelado?
- ¿Cómo murió?
- ¿Cómo obtuvo sus primeros conocimientos en probabilidad?
- ¿Por qué le cerraron las puertas en el Colegio de Médicos?
- ¿Para qué tipo de ecuaciones encontró métodos de resolución?
- Aparte del Álgebra, ¿en qué otras ciencias o ramas trabajó?
- ¿Con qué tipo de números generalizó la resolución aproximada de ecuaciones de cualquier grado?
- Copia la fórmula que descubrió para resolver las ecuaciones de tercer grado.



INVESTIGACIÓN:

- ¿Qué es la probabilidad?
- ¿Cómo se llama la primera obra escrita sobre probabilidad?
- ¿Cuál fue el origen de la probabilidad? ¿En qué siglo?
- ¿Qué significa “Ars Magna”?
- ¿Qué es la criptografía?
- ¿Con qué otro matemático tuvo un enfrentamiento? ¿Por qué ocurrió dicho enfrentamiento?
- ¿En qué consisten las relaciones Cardano-Vietta? Busca un ejemplo o aplicación.
- Haz un mapa donde aparezcan las cuatro ciudades en que vivió Cardano.
- Da el nombre y la nacionalidad de tres matemáticos con los que se relacionó.
- ¿Qué hizo con la fortuna que le dejó su padre?

ACTIVIDADES EXTRAS:

- Resuelve la ecuación $x^3-3x+2=0$ utilizando la fórmula de Cardano que aparece en el panel. Halla las otras raíces y descompón en producto de factores primos el polinomio x^3-3x+2 .
- Aplica la fórmula ahora a la ecuación $x^3+9x+26=0$. Una vez hallada la solución, comprueba que no existen más soluciones reales de dicha ecuación. Descompónla en producto de factores primos.
- Busca la distancia de Pavía a las otras tres ciudades que aparecen en el panel.
- Resuelve la ecuación $x^2 - 6x + 8 = 0$ y comprueba que las soluciones cumplen las relaciones de Cardano-Vietta para ecuaciones de 2º grado.
- Utilizando las relaciones de Cardano-Vietta resuelve la siguiente ecuación algebraica sabiendo que tiene una raíz doble y una simple. $x^3-5x^2+8x-4=0$.
- Con ayuda de una hoja de cálculo y la fórmula del panel halla una solución de las ecuaciones $x^3+3x+4=0$ y $x^3+3x+14=0$.

DESCARTES

A Descartes se le considera el padre de la Geometría Analítica. Visita su panel y contesta las siguientes cuestiones:

- ¿En qué localidad francesa nació?
- ¿Qué disciplinas estudió?
- ¿Quién fue su profesor de matemáticas?
- ¿A qué colegio jesuita perteneció?
- Indica los países en que vivió Descartes.
- Su obra principal se publicó como apéndice de un famoso libro, ¿cuál es su título?
- Explica en qué consiste la Geometría Analítica.
- Cuenta, con tus palabras, la anécdota que dio origen a la idea de la nueva Geometría.
- ¿Para qué utilizaba Descartes las últimas letras del alfabeto?



Para ampliar la información: búsqueda en Internet.

- Haz una pequeña biografía de Isaac Beeckam.
- Descartes viajó a Italia para conocer a Galileo Galilei pero nunca se produjo el encuentro. ¿Quién fue Galileo Galilei? ¿Cuál fue su relación con las matemáticas.
- Descartes defendía las ideas copernicanas, ¿cuáles eran estas ideas?
- ¿En qué idioma escribía Descartes sus obras? ¿Por qué?
- Descartes demostró la ley de la refracción de la Dióptrica. Enuncia dicha ley. ¿Qué otro matemático dio posteriormente una nueva demostración de esta misma ley?
- Encuentra la clasificación de Palpos de los problemas de la geometría griega?
- Sitúa en un mapa la localidad francesa donde nació.
- ¿A qué se debió que Descartes nunca formase su propia familia? A pesar de este hecho, tuvo descendencia, ¿quién?, ¿qué le ocurrió?
- ¿De qué murió Descartes?

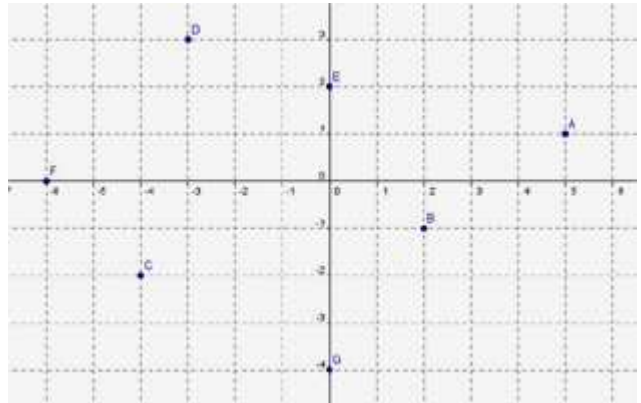
Actividades extras:

Los ejes de coordenadas, que utilizamos normalmente para situar elementos en el plano, reciben el nombre de ejes cartesianos en honor de Descartes, que fue quién ideó su

utilización. Vamos a realizar una serie de actividades con ellos.

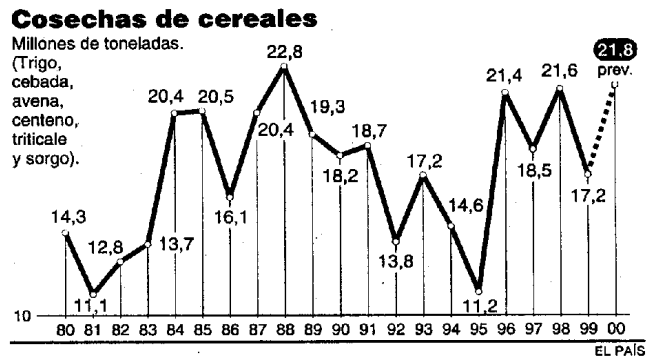
1^{er} ciclo de ESO:

- Indica las coordenadas de los puntos que aparecen señalados en los siguientes ejes.
- Representa en los ejes de coordenadas los puntos: A(2,2), B(2,5), C(-1,5), D(0,4), E(-4,0), F(-3, -1), G(1.3). Une, mediante una línea, cada punto con el siguiente y el último punto con el primero. ¿Qué figura obtienes?



- Representa en unos ejes cartesianos el segmento de extremos A(1,3) y B(4,2). Representa el simétrico de dicho segmento respecto del eje de ordenadas. Haz lo mismo respecto al eje de abscisas.

- El Ministerio de Agricultura anota anualmente la cantidad de cereales recogidos en nuestro país. En la gráfica siguiente aparecen los millones de toneladas de cereales (trigo, cebada, avena,...) recogidos en los últimos veinte años del siglo anterior. Responde a las siguientes preguntas:



¿Cuánto cereal se recogió en 1985?, ¿y en 1997?

¿En qué año se recogió una cosecha más cercana a los 15 millones de toneladas?

¿En qué año se obtuvo la mayor cosecha?, ¿cuánto se recogió?

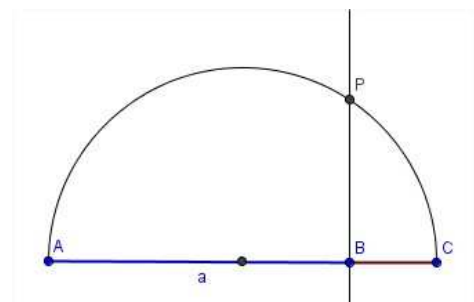
¿En qué año se recogió la peor cosecha?, ¿cuánto fue?

¿Entre qué dos años hubo la mayor subida en la cantidad de cosecha recogida?

- Uno de los problemas de la Geometría Clásica es la duplicación del cubo, es decir, dado un cubo construir otro que tenga doble volumen. Este problema se demostró que no tiene solución con regla y compás. Pero su equivalente en el plano si es posible, es decir, dado un cuadrado encontrar otro que tenga doble superficie. Dibuja unos ejes de coordenadas y en ellos un cuadrado cualquiera. A partir de él dibuja otro que tenga doble área.

- Descartes resolvía los problemas y operaciones de forma geométrica. Tenía una forma muy curiosa de hallar la raíz cuadrada de un número. Para hallar la raíz cuadrada del valor a, seguía los siguientes pasos:

- 1) Dibujaba un segmento de longitud a y le añadía un segmento de longitud 1.
- 2) Hallaba el punto medio del segmento aumentado. Trazaba la semicircunferencia con centro en dicho punto y que pasaba por los extremos.
- 3) Levantaba una perpendicular en el extremo del

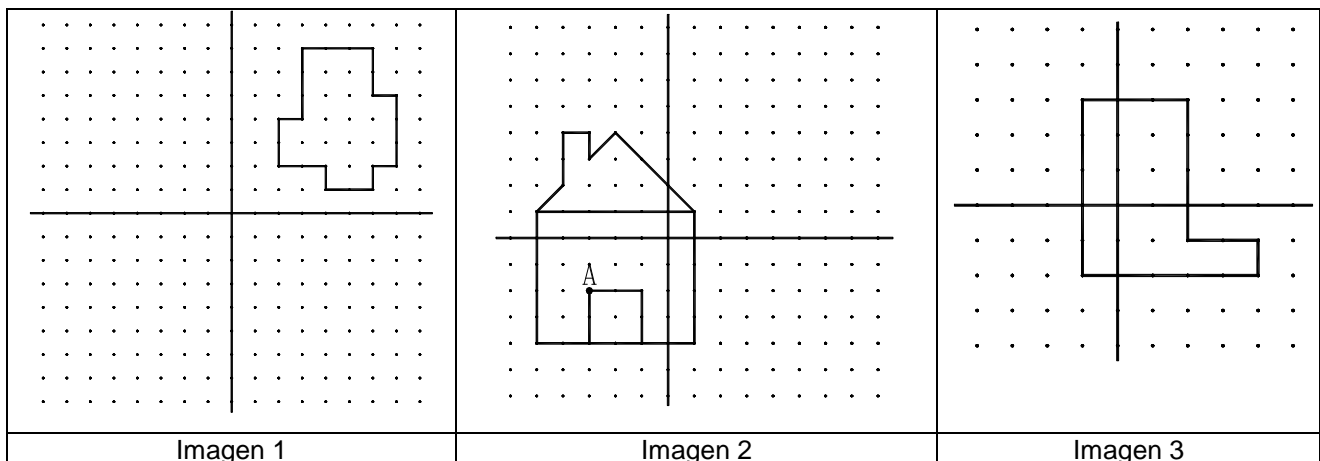


segmento original (el de longitud a) y el segmento determinado por el punto de corte de esa perpendicular con la semicircunferencia trazada era el valor de la raíz cuadrada de a .

Dibuja un segmento de longitud 9 cm. y haz la construcción para comprobar que se obtiene la raíz de dicho valor.

2º ciclo de ESO:

- Dada la función $f(x) = x^2 - 5x + 6$, represéntala gráficamente e indica: el eje de simetría, el vértice, los puntos de corte con el ejes cartesianos y el intervalo de crecimiento y de decrecimiento de la función.
- Dada la función $f(x) = \sqrt{3-x}$, represéntala gráficamente y estudia sus características (dominio, recorrido, crecimiento, etc.).
- Dada la figura en la Imagen 1, dibuja las figuras simétricas de ella respecto:
 - el eje de ordenadas.
 - el eje de abscisas.
 - el origen.
- Traslada la figura que aparece en la Imagen 2 de manera que el punto A se transforme en el punto A'(3,1).
- Gira, alrededor del origen, la figura de la Imagen 3 un ángulo de 90° en el sentido contrario de las agujas del reloj. Gira ahora la figura resultante de nuevo 90° . ¿Hay alguna transformación que nos lleve desde la figura original hasta la obtenida en segundo lugar?, ¿existe alguna transformación que no sea un giro?



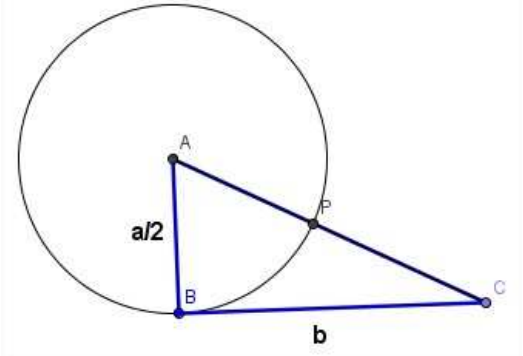
- La Geometría de Descartes está dividida en tres libros plantea problemas similares a los que podemos encontrar hoy en día en los libros de texto, veamos un par de ejemplos:
 - Encontrar dos números cuya suma sea 17, de modo que la suma de sus cuadrados sea 169.
 - De entre los triángulos rectángulos cuya hipotenusa mide 13, construye el de perímetro 20.
- Siguiendo con el álgebra, Descartes descubrió lo que él llamó la Regla de los Signos que le permitía saber cuantas raíces verdaderas (reales positivas) o falsas

El rostro humano de las matemáticas

(reales negativas) podía tener una ecuación de cualquier grado. Suponía que la ecuación estaba en la forma $x^2+bx+c=0$. Descartes indicó que la ecuación tendría *como mucho* tantas raíces verdaderas como cambios de signo en los coeficientes y tantas raíces falsas como permanencia de signo. (Utilizaba la expresión *como mucho* para tener en cuenta las posibles raíces no reales de la ecuación). Comprueba esa regla resolviendo las siguientes ecuaciones: $x^2+5x+4=0$; $x^2-7x+12=0$; $x^3-2x^2-5x+6=0$.

- Todos los problemas que se planteaba Descartes los resolvía de forma geométrica. Tenía el siguiente método para resolver ecuaciones de la forma $x^2+ax=b^2$.

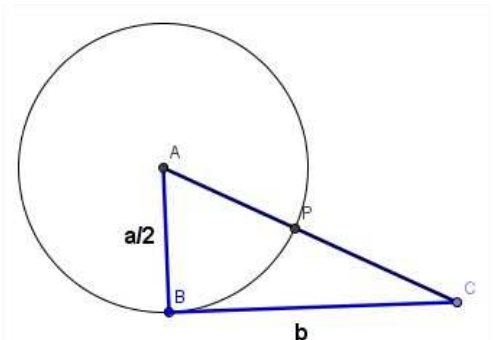
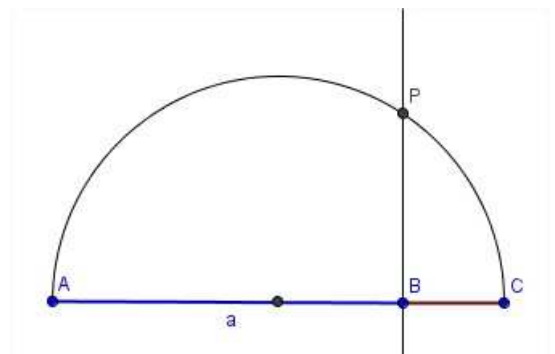
- 1) Dibujaba un triángulo rectángulo cuyos catetos midieran $a/2$ y b .
- 2) Trazaba una circunferencia con centro en el vértice correspondiente al lado $a/2$ y esa misma amplitud.
- 3) Esa circunferencia cortaba a la hipotenusa en el punto P. La distancia del punto P al otro vértice era la solución positiva de la ecuación.



Con ayuda de regla y compás, utiliza ese método para hallar la solución de la ecuación $x^2+6x=16$.

Bachillerato:

- Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones $f(x)=2^x$, $g(x)=3^x$ y $h(x)=4^x$. Estudia sus características comunes e indica qué cumplen las funciones de la forma a^x .
- A partir de una tabla de datos, representa la función $f(x)=\log_2 x$. Indica sus características (dominio, recorrido, crecimiento, etc.)
- Utiliza el Teorema de Pitágoras y los productos notables para demostrar que el segmento obtenido en la construcción de la raíz cuadrada es efectivamente la \sqrt{a} para cualquier valor de a .
- Demuestra algebraicamente que la medida del segmento PC de la figura es la solución de la ecuación $x^2+ax=b^2$. (Para ello llama c al segmento PC y escribe el segmento AC de dos formas diferentes, una a partir del Teorema de Pitágoras y otra como suma de c y del radio de la circunferencia. Igualando las dos expresiones llegarás a que $c^2+a \cdot c=b^2$ con lo que se demuestra que c es la solución de la ecuación).



El rostro humano de las matemáticas

- Si damos el salto del plano al espacio, el sistema que rige la localización de cada punto está formado por tres ejes de coordenadas, perpendiculares entre sí. Cada dos ejes da lugar a un plano coordenado y los tres planos coordenados dividen al espacio entre 8 octantes. Sitúa los siguientes puntos en su octante correspondiente: $A(1,2,3)$, $B(2,-1,-5)$, $C(-3,2,-6)$ y $D(2,-4,0)$

FERMAT

Una de las personas que, sin ser matemáticos profesionales, fue un entusiasta por esta materia y dejó resultados más apasionantes sobre teoría de números. Contesta las siguientes preguntas tomadas de su panel:

- ¿Quién demostró la conjetura de Fermat? ¿En qué año?
- ¿En quién se basó para desarrollar su Geometría Analítica?
- ¿Cuál fue su profesión?
- ¿En qué campos de la Matemática trabajó?
- ¿Qué teoría desarrolló basándose en las matemáticas de Diofanto?
- ¿Dónde escribía Fermat sus observaciones y hallazgos?
- ¿En dónde nos quedan constancia de lo esencial de su obra?



INVESTIGACIÓN:

- Localiza en un mapa los lugares donde nació u murió Fermat.
- Cita los nombres de, al menos, cinco grandes matemáticos coetáneos de Fermat, es decir, que vivieran en el siglo XVII.
- ¿En que universidades estudió?
- ¿Quién difundió los trabajos y teorías de Fermat? ¿Por qué no quería publicar sus trabajos?
- Busca en Internet algún sello relacionado con algunos de sus trabajos.
- ¿En qué libro escribió Fermat: "He descubierto una demostración verdaderamente maravillosa, pero este margen es demasiado estrecho para contenerla"?
- Localiza la ecuación de la espiral de Fermat y su representación gráfica.
- ¿Qué son números amigos? Pon un ejemplo.
- ¿Qué es un número perfecto? Pon un ejemplo.
- Fermat conjeturó que todos los números naturales de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$ eran primos. ¿Quién demostró que no era cierto? ¿Cómo lo hizo?

ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

- Se ha demostrado que no es posible encontrar tres números enteros que permitan descomponer el cubo de uno de ellos como la suma de los cubos de los otros dos, es decir, no hay solución entera para $x^3+y^3=z^3$, pero si es posible descomponer un cubo en suma de tres cubos. Comprueba que $3^3+4^3+5^3=6^3$.
- El más famoso Teorema de Fermat dice que no es posible encontrar dice que no es posible encontrar tres números enteros que verifiquen $x^n + y^n = z^n$ siendo n mayor que 2. ¿Quién demostró que para n=2 si se verificaba la igualdad?
- Un número de Fermat es un número natural de la forma $F_n = 2^{2^n} + 1$. Calcula los tres primeros números de Fermat.
- Fermat conjeturó que los números anteriores eran todos primos. ¿Lo son los que tu has calculado?
- Euler demostró que F_5 no era primo. Calcula ese número y comprueba que es divisible entre 641.
- Fermat dedujo que “cada número primo, que es mayor en una unidad a un múltiplo de 3, está compuesto por un cuadrado y el triple de otro cuadrado” (Es decir, los números de la forma $3\cdot k+1$ que sean primos se pueden escribir como $p^2+3\cdot q^2$). Entre los números primos menores que 50, encuentra lo que son de la forma $3\cdot k+1$.
- En la misma línea que lo anterior demostró que: Cada número primo que es una unidad mayor o tres unidades mayores que un múltiplo de 8, está compuesto por un cuadrado y el doble de otro cuadrado. Localiza los números menores de 50 que son de ese tipo.

2º ciclo de ESO:

- Un número de Fermat es igual al producto de todos los anteriores mas 2. Compruébalo para F_3 y F_4 .
- Fermat dedujo que “cada número primo, que es mayor en una unidad a un múltiplo de 3, está compuesto por un cuadrado y el triple de otro cuadrado” (Es decir, los números de la forma $3\cdot k+1$ que sean primos se pueden escribir como $p^2+3\cdot q^2$). Entre los números primos menores que 50, encuentra lo que son de la forma $3\cdot k+1$ y comprueba que se pueden descomponer como dedujo Fermat.
- En la misma línea que lo anterior demostró que: Cada número primo que es una unidad mayor o tres unidades mayores que un múltiplo de 8, está compuesto por un cuadrado y el doble de otro cuadrado. Localiza los números menores de 50 que son de ese tipo y descompónlos en la suma de cuadrados que se indica.
- Uno de los problemas que le planteó el Caballero de Méré a Pascal y que dio lugar al nacimiento de la probabilidad tras la consulta de éste a Fermat fue el siguiente: ¿Qué es más probable, obtener un 6 en 4 lanzamientos de un dado, u obtner un

doble 6 en 24 lanzamientos de dos dados? Halla ambas probabilidades y resuelve la duda del Caballero de Méré.

- El Teorema de Fermat sobre la Suma de Cuadrados, que fue demostrado por Euler, dice: todo número primo de la forma $4k+1$ (es decir es una unidad más que el cuádruplo de un número) puede expresarse como suma de dos números cuadrados. Encuentra los números primos menores de 50 que son de esa forma y descomponlos en suma de dos cuadrados.
- Uno de los teoremas que planteó, y que fue demostrado años más tarde por Gauss, decía que todo número entero es posible descomponerlo como suma de tres números triangulares. Los números triangulares, descubiertos por Pitágoras, son aquellos que pueden dibujarse como triángulo equiláteros representados por puntos. Los primeros son 1, 3, 6, 10, 15, ... Comprueba que todos los números comprendidos entre 50 y 60 pueden descomponerse como indica el teorema.

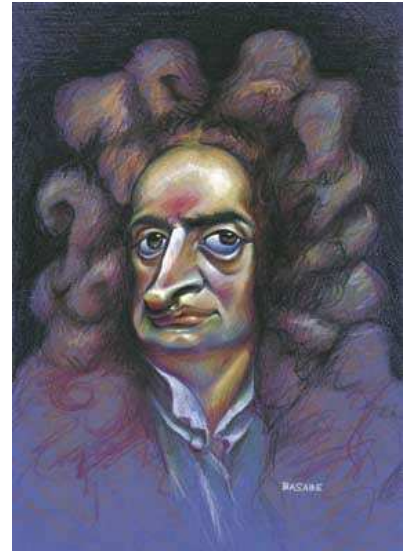
Bachillerato:

- Otro de los Teoremas que planteó Fermat, y que demostró años más tarde Euler, es el llamado Pequeño Teorema de Fermat: si p es un número primo, entonces es divisor de $a^p - a$ donde a es un número natural cualquiera. Comprueba el teorema en los siguientes casos:
 - ❖ $p=2$ y $a=7$.
 - ❖ $p=7$ y $a=3$.
 - ❖ $p=3$ y $a=12$.
- Pascal le propuso a Fermat un problema sobre el reparto justo en un juego. Su planteamiento era el siguiente: Dos jugadores se apuestan 64 monedas que se llevará el primero que gane tres partidas. Por problemas externos, el juego se detiene cuando van 2 a 1. ¿Cómo deben repartirse las 64 monedas?

NEWTON

Este matemático predijo la fecha exacta de su muerte. Tras visitar su panel responde a las siguientes cuestiones:

- ¿A qué se dedicó Newton para pagarse sus estudios?
- ¿Cuáles son las ramas científicas que estudió?
- ¿Cuál fue su obra más importante?
- ¿Cómo definía “fluente” y “fluxión”?
- ¿Qué cargo honorífico fue dado a Newton?
- ¿Dónde nació Newton?
- ¿En qué siglos vivió Newton?
- ¿Qué tipo de cálculo alumbró Newton?
- Indica uno de los hobbies de Newton.
- ¿Cómo consideraba Newton a los científicos anteriores a su época?



INVESTIGACIÓN:

- ¿Cómo se llamaba el primer profesor de matemáticas de Newton?
- ¿Por qué tenía miedo a publicar sus obras?
- ¿Qué notación utilizaba Newton para indicar una derivada? ¿Dónde se sigue usando esa notación?
- ¿Qué otros personajes famosos están enterrados con él?
- Busca algún sello dedicado a Newton.
- ¿Qué es la Casa de la Moneda?
- ¿Qué es una epístola?
- ¿Qué es un algoritmo?
- ¿Qué es un binomio? ¿Qué descubrió Newton sobre las potencias de binomios?
- Enuncia las tres leyes de Newton.

ACTIVIDADES EXTRAS:

2º ciclo de ESO:

- La notación que usamos para expresar el discriminante de una ecuación de segundo grado, $\Delta = b^2 - 4ac$, fue dada por Newton. Recuerda la relación que hay

El rostro humano de las matemáticas

entre el rango del discriminante y el número de soluciones de la ecuación y dí cuántas soluciones tienen las siguientes ecuaciones:

- a) $3x^2+5x+8=0$
- b) $2x^2-5x-3=0$
- c) $4x^2-4x+1=0$

- Halla, por multiplicación, los valores de $(a+b)^2$ y $(a-b)^2$. ¿Crees que esto tiene algo que ver con el binomio de Newton? Razona la respuesta.

Bachillerato:

- Newton fue el primero en utilizar las coordenadas polares en el plano. ¿Te acuerdas de cuál era la expresión en forma polar de un número complejo? Expresa los siguientes números complejos en forma polar
 - a) $1+i$
 - b) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
 - c) $2+4i$
- Usando la expresión del binomio de Newton, desarrolla la siguiente expresión $(x+y)^5$.
- ¿Cuál será el coeficiente que completa el término x^3y^6 en el desarrollo de la expresión $(x+y)^9$.
- Algunos autores hablan del siguiente problema de probabilidad planteado en una correspondencia con Newton: ¿Qué es más probable, obtener un 6 al lanzar seis veces un dado u obtener dos veces seis al lanzar un dado doce veces. Responde a esa cuestión.

LEIBNIZ

Uno de los responsables del mayor enfrentamiento matemático de la historia, tras visitar su panel podrás responder a las siguientes preguntas.

- ¿Qué gran idea perseguía, al igual que Lulio?
- ¿En qué rama de la matemática dejó una huella más importante?
- ¿De qué depende el área de una curva?
- ¿Quién lo introdujo en el gusto por las Matemáticas?
- ¿Qué matemáticos influyeron en él?
- ¿Era Leibniz una persona introvertida? Razona la respuesta.
- ¿Para qué utilizó los índices como números indicando posición?
- Aparte de destacar en Filosofía y Matemáticas ¿qué otras disciplinas abarcó?



INVESTIGACIÓN:

- ¿Con qué edad aprendió latín? ¿Y griego?
- ¿En qué ciudad nació? Sitúala en el mapa.
- ¿De qué Academia de las Ciencias fue su primer presidente? ¿Qué rey la fundó?
- Durante su vida publicó muchos panfletos y artículos académicos, pero sólo dos libros filosóficos, ¿cómo se llamaron?
- ¿Qué son las mónadas?
- Voltaire caricaturizó a Leibniz en su novela cómica *Candide* a través de un personaje. ¿Cómo se llamaba?
- Leibniz fue el primero en utilizar el término “*análisis situs*”, que posteriormente se utilizó para referirse a... ¿qué?

ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

- a) Calcula el área de cada uno de los rectángulos de la figura 1 y halla su suma.
- b) Haz lo mismo con los rectángulos de la figura 2.

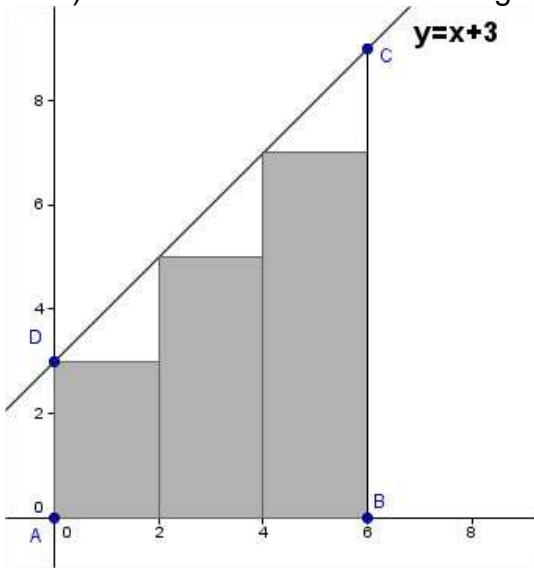


Figura 1

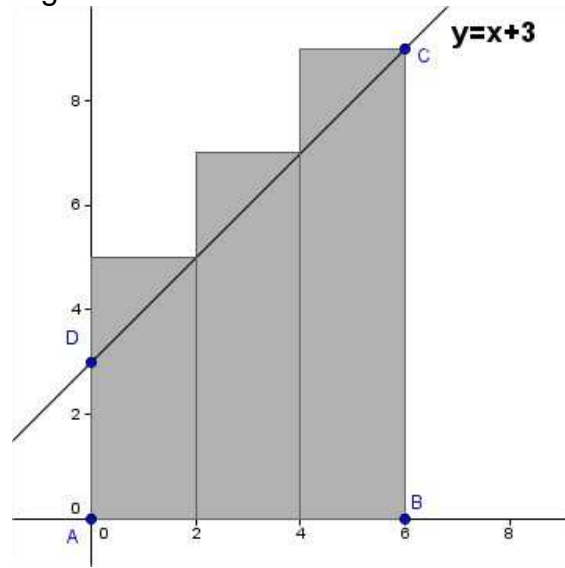


Figura 2

- c) Calcula el área del trapecio ABCD y compáralas con las de los apartados anteriores.
- d) Haz el mismo estudio que en los apartados 1 y 2 pero dibujando ahora 6 rectángulos de base la unidad. Comprueba que encuentras una mejor aproximación al valor obtenido en c).
- Dibuja todas las banderas de 3 franjas horizontales y de 3 colores distintos que podemos hacer con los colores: Rojo, Amarillo, Verde y Azul.
- Con los números 1, 2 y 3, ¿cuántos números de tres cifras distintas podemos obtener? ¿Y si podemos repetir los números?
- En una clase hay cinco voluntarios para ser ayudantes TIC: María, Luisa, Víctor, Manuel y Antonio. El profesor debe elegir a dos de ellos. ¿Cuántas parejas diferentes puede hacer?

2º ciclo de ESO:

- Realiza los apartados a, b y c de la primera actividad del 1º ciclo. Calcula los errores absoluto, relativo y porcentual cometidos en la aproximación del área del trapecio por la suma de las áreas de los rectángulos.
- Representa la parábola de ecuación $y=-x^2+10x-16$ y calcula una aproximación al área comprendida entre la parábola y el eje de abscisas de la misma forma que en el ejercicio anterior.
- Repetir los tres últimos ejercicios del 1º ciclo utilizando las fórmulas de Combinatoria.
- El sistema binario está formado únicamente por 0 y 1 y la relación entre la forma binaria y decimal puedes verla en los dos siguientes ejemplos:

El rostro humano de las matemáticas

$$1101_{(2)} = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 13 \quad ; \quad 110_{(2)} = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$$

Determina a qué números del sistema decimal corresponden los siguientes números expresados en binario: 1011, 11001, 11101.

Para pasar a binario basta ir dividiendo entre 2 sucesivamente los cocientes resultantes hasta obtener el cociente 1. El número binario está formado por el último cociente y los restos obtenidos en orden inverso. Observa el ejemplo (figura 3) para pasar a binario el número 6 = $110_{(2)}$. Pasa a binario los números 17, 20, 25 y 37.

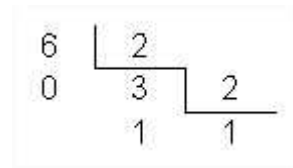


Figura 3

Bachillerato:

- Calcula el área encerrada entre la parábola $y = -x^2 + 10x - 16$ y el eje de abscisas.
- Determina el área de la figura encerrada por las curvas: $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$.
- Determina el área encerrada por la función $f(x) = \sin(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, \pi]$.

- Calcula integral definida $\int_0^{4\pi} \sin x \, dx$. ¿Tiene sentido este resultado?

- Leibniz demostró la fórmula para hallar la derivada de un producto:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- Calcula, usando la definición de derivada, la derivada del producto de $f(x) \cdot g(x)$ siendo $f(x) = x + 2$ y $g(x) = 8$.
- Aplica la fórmula anterior para hallar $[(x^2 + 1) \cdot \sin x]'$ y $[e^{2x} \cdot (4x^2 + 1)]'$.
- Deduce una fórmula para derivar el producto de tres funciones.

- Calcula la matriz $A_{2 \times 3} = (a_{ij})$ tal que $a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot (2 \cdot i + 3 \cdot j)$.

- Halla la matriz de orden 4 $B = (b_{ij})$ con la regla de formación $b^{ij} = i \cdot j$.

- Comprueba que la cuarta línea del triángulo de Tartaglia se corresponde con:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y utilízalos para calcular $(2x+y)^4$.

MADAME DE CHÂTELET

Contesta a las preguntas sobre la información que aparece en el panel de Gabrielle Émilie Le Tonnelier de Breteuil.

- ¿Qué libro de Newton comenzó a traducir en 1745?
- ¿Cuándo se publicó su traducción?
- ¿Qué título nobiliario tenía Émilie?
- ¿Para qué escribió el libro “Las instituciones de la Física”?
- ¿Cuántos años vivió Madame de Châtelet?
- ¿Gracias a quién comprendió las relaciones entre Metafísica y Ciencia?
- ¿Con cuántos años se casó con el Marqués de Châtelet-Lamon?
- El cráter de un planeta lleva el nombre de Châtelet en su honor, ¿de qué planeta se trata.



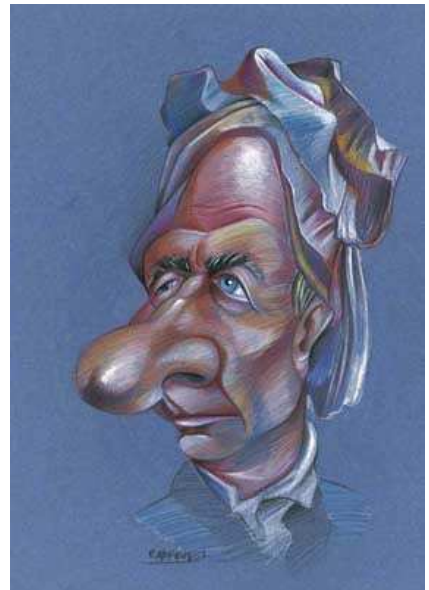
INVESTIGACIÓN:

- ¿Cómo se conoce hoy día al siglo en que nació? ¿Por qué?
- ¿Qué tres hombres acompañaron a Madame de Châtelet en su lecho de muerte?
- ¿Qué enfrentamiento hubo entre el matemático Köning y ella?
- ¿En qué ciudad francesa nació? Sitúala en el mapa.
- ¿Qué título nobiliario poseía su padre? ¿A qué se dedicaba?
- ¿Qué idiomas conocía aparte del francés?
- Madame de Châtelet tocaba el clavecín, ¿qué tipo de instrumento musical es?
- ¿Con quién contrajo matrimonio en 1725? ¿A qué se dedicaba? ¿Cuántos hijos tuvo con su esposo?
- ¿Qué relación había entre Émilie y el mariscal Richelieu?
- En una traducción de los Principia de Newton aparece la imagen adjunta. ¿Quiénes están representados en la imagen?



EULER

“Lean a Euler, lean a Euler, él es el maestro de todos nosotros.”
Laplace



Leonhard Euler está considerado como el matemático que más obras escribió. Busca su panel y, tras leer detenidamente la información, contesta a las siguientes preguntas:

- ¿En qué países desarrolló su principal labor matemática?
- ¿Cuántos años vivió? ¿En qué siglo?
- ¿Qué problemas físicos tuvo al final de su vida?
- ¿Qué disciplinas quería su padre que estudiara?
- ¿Sobre qué trataba su primer trabajo científico?, ¿con cuántos años lo publicó?
- ¿Ante quién presentó el anterior trabajo?
- ¿Cuántas veces fue premiado por el estamento anterior?
- Euler ha dejado a la posteridad muchas de las notaciones que utilizamos actualmente. Indica algunas de ellas, explicando qué representan.
- Indica cuál es la fórmula de Euler que relaciona los elementos que componen un poliedro.
- En el panel de Euclides aparecen los cinco poliedros regulares. Rellena la siguiente tabla y comprueba la fórmula de Euler (ten cuidado pues hay dos poliedros que tienen cambiados entre sí los nombres).

Poliedro	nº caras	nº vértices	nº aristas	$C + V = A + 2$

INVESTIGACIÓN:

- Localiza en qué país nació Euler y en cuál murió.
- Uno de los profesores de Euler fue Johann Bernouilli. Escribe un párrafo de un

El rostro humano de las matemáticas

máximo de 10 líneas, hablando sobre su vida y obra.

- En la igualdad que relaciona las cinco constantes numéricas, conocida por el físico Richard Feynman como “la fórmula más reseñable en matemáticas”, seguramente conocerás el 0, el 1 y el número π . Busca información sobre el número “e” y el número “i”. Indica de qué tipo son y cuáles son sus valores.
- Existe un asteroide con el nombre de Euler en su honor. Busca información sobre dicho asteroide.
- También lleva el nombre de Euler un cráter de la Luna de los llamados de impacto. Busca información sobre ese cráter.
- A lo largo de la historia se han dedicado muchos sellos postales a la figura de Euler. Busca algunos de ellos, captura sus imágenes y cuenta algún detalle sobre cuando fue editado, en qué país, etc.
- Un año antes de presentar el primer trabajo científico del que se hablaba en el panel, presentó su tesis doctoral en la Universidad de Basilea, ¿sobre qué trataba?
- Una de las características de Euler era una memoria fotográfica, se decía que podía recordar palabra por palabra una obra clásica, ¿cuál?, ¿de qué autor?

ACTIVIDADES EXTRAS.

1^{er} ciclo de ESO:

- Uno de los múltiples campos en los que investigó Euler fue en la Teoría de Números, en la que se introdujo gracias a su amistad con el matemático prusiano Christian Goldbach. Este matemático es famoso por su conjetura, que aún nadie ha podido demostrar, según la cual todo número par, mayor que 2, se puede expresar como suma de dos números primos. Escribe todos los números pares comprendidos entre 10 y 30 y comprueba que la Conjetura se cumple.
- Hay números pares que pueden escribirse como suma de dos números primos de distintas formas, por ejemplo, el número 130 puede escribirse de 7 formas distintas como suma de dos primos. Encuentra al menos cuatro de ellas.

2^o ciclo de ESO:

- En el campo de la geometría, Euler descubrió que el baricentro, ortocentro y el circuncentro de un triángulo están siempre en línea recta. En su honor, a dicha línea se le llamó “Recta de Euler”. Dibuja un triángulo cualquiera y halla esos puntos notables. Comprueba que están en línea recta.
- ¿En qué tipo de triángulos se cumple que el incentro también pertenece a dicha recta?
- En su obra *Proprietates triangulorum, quorum anguli certan Inter. se tenent rationen*

(Propiedades de los triángulos cuyos ángulos tienen entre sí alguna razón) planteó once problemas en los que se buscaban relaciones entre los lados de un triángulo cuando los ángulos cumplieran una proporción. En concreto, el problema más simple decía: Si en un triángulo ABC el ángulo B es doble que el A, determina la relación entre las longitudes de sus lados. Intenta resolverlo. Como pista te aconsejamos que traces la bisectriz del ángulo B y utilices la semejanza de triángulos para llegar a la igualdad pedida.

- Los números de la forma $2^n - 1$ reciben el nombre de números de Mersenne en honor del filósofo y matemático francés Marin Mersenne. Si el número $2^n - 1$ es primo recibe el nombre de Primo de Mersenne. Euler demostró que el número $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ era realmente primo, que fue el mayor primo conocido hasta el año 1867 (en la actualidad el mayor número primo conocido es el primo de Mersenne $2^{43112609} - 1$ que tiene casi 13 millones de cifras). Si sustituimos n por los cuatro primeros números primos, obtenemos los cuatro primeros primos de Mersenne. Calcúlalos.
- Comprueba que la propiedad anterior no se mantiene para el siguiente número primo, es decir, para $n=11$.
- Euler encontró una demostración propia para la fórmula de Herón de Alejandría que permite calcular el área de cualquier triángulo conociendo el valor de sus lados. Dado un triángulo de lados a, b y c y siendo s el semiperímetro, es decir, $s = \frac{a+b+c}{2}$, el área del triángulo es igual a $\sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$. Dibuja un triángulo del que puedas calcular fácilmente su área (rectángulo, isósceles o equilátero) y halla su área utilizando la fórmula demostrada por Euler y por el método que utilices normalmente.

Bachillerato:

- Demuestra que el número 8191 es un primo de Mersenne. Explica qué camino has seguido para demostrarlo.
- Euler también trabajó el tema de la probabilidad, en concreto en su obra *Cálculo de la probabilidad en el juego de Rencontre* estudia la probabilidad de ese juego. El juego de Rencontre consiste en lo siguiente: dos jugadores, A y B juegan cada uno con una baraja completa. Van sacando aleatoriamente y a la vez cartas, una detrás de otra. Si en algún momento sacan la misma carta, gana el jugador A, si terminan el mazo y no hay ninguna coincidencia gana el jugador B. ¿Quién crees que tiene mayor probabilidad de ganar? Para que el recuento no se haga muy pesado vamos a considerar que cada jugador tiene cuatro cartas numeradas del 1 al 4. Las van sacando al azar y formando parejas. ¿Cuál es la probabilidad de que gane el jugador A si necesita que en algún momento coincidan las dos cartas? Puedes considerar que el jugador A tiene las cartas ordenadas y solo debes estudiar las permutaciones posibles del otro jugador y, en cada caso, quién es el jugador que gana.

El rostro humano de las matemáticas

- Una de las pasiones de Euler fueron las series numéricas. Estudió una gran cantidad de series infinitas y llegó a resultados impresionantes. Por ejemplo descubrió la siguiente relación:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}$$

Halla la suma de la primera serie con seis sumandos y, tras igualarlo a la otra fracción, despeja π y calcula cuál es el valor aproximado que se obtiene utilizando sólo seis sumandos de la serie numérica. Halla el error absoluto y relativo que se obtiene al tomar esa aproximación como valor de π .

- Otra de los retos que resolvió fue el llamado problema de Basilea, planteado por Jacob Bernoulli: hallar la suma de los inversos de los cuadrados de los números naturales. Euler demostró la siguiente igualdad

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Realiza la misma actividad que en el punto anterior utilizando esta serie.

- Buscando un método que le permitiera resolver cualquier ecuación polinómica, trabajó con las ecuaciones cúbicas y cuadráticas. En concreto demostró que toda cuadrática se puede descomponer como producto de dos ecuaciones de segundo grado de la siguiente forma:

$$x^4 + bx^2 + cx + d = (x^2 + px + q)(x^2 - px + r)$$

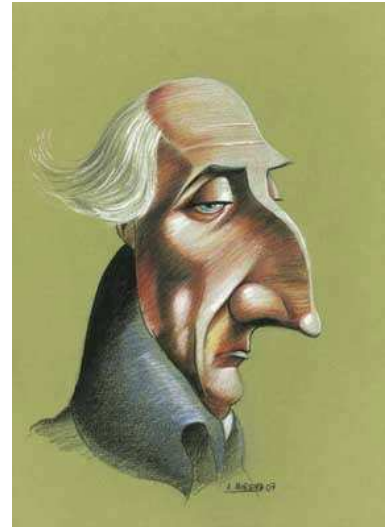
Escribe los coeficientes b, c y d en función de los coeficientes p, q y r.

- Descompón la cuadrática $x^4 + 3x^2 + 4$ en la forma anterior.

LAGRANGE

Lagrange fue un matemático que vivió la revolución francesa y dedicó su estudio a todas las ramas de las matemáticas, obteniendo valiosos resultados. Visita su panel, léelo atentamente y contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Dónde nació Lagrange?
- ¿Por qué empezó a dar clases de Matemáticas a los 17 años?
- ¿Cómo se llamaba la revista creada por Lagrange?
- ¿A qué edad ganó el premio de la Academia de las ciencias de Paris?
- ¿Qué son los troyanos?
- ¿Qué tiene que ver Lagrange con la creación del sistema métrico decimal?
- ¿Qué disciplinas estudió Lagrange?
- ¿Cuál es su obra cumbre?
- ¿Con qué gran escritor compara Hamilton a Lagrange?
- ¿Qué honores se le atribuyeron a Lagrange en la época de Napoleón?



INVESTIGACIÓN:

- ¿Dónde murió Lagrange?
- ¿Cuál fue el ducado de Saboya?
- ¿De qué se ocupa la mecánica celeste?
- ¿En qué siglos vivió Lagrange?
- ¿Qué libro escribió Lagrange?
- ¿Con qué otro matemático importante se carteaba Lagrange?
- Lagrange enunció el siguiente teorema: "Si p es primo entonces el número $(p-1)!$ +1 es múltiplo de p ".

- a) ¿Qué es un teorema?
- b) ¿Qué significa $n!$ ("n factorial")? Calcula el valor de $6!$
- ¿Cuántas veces se casó Lagrange?
- ¿Qué frase enunció Lagrange cuando Lavoisier fue condenado a muerte?
- ¿En qué se basa el sistema métrico decimal?

ACTIVIDADES EXTRAS:

Algunos de los artículos iniciales de Lagrange tratan de preguntas conectadas con el abandonado pero singularmente fascinante tema de la [teoría de números](#). Entre éstos es lo siguiente:

- Su prueba del teorema que cada entero positivo que no es un cuadrado puede expresarse como la suma de [dos, tres o cuatro cuadrados de enteros](#), 1770.

Por ejemplo:

$$31 = 5^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$$
$$310 = 17^2 + 4^2 + 2^2 + 1^2.$$

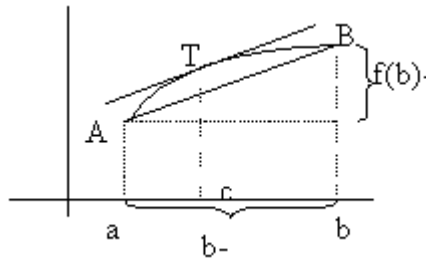
- Su prueba del [teorema de Wilson](#) que si n es un número primo, entonces $(n - 1)! + 1$ siempre es un múltiplo de n , 1771.
- Según el teorema de Lagrange, ¿podemos asegurar que los siguientes números se pueden expresar como la suma de dos, tres o cuatro cuadrados?
a) 15 b)-20 c) 36 d) 34
- Expresa los siguientes números como suma de dos, tres o cuatro cuadrados de enteros:
a) 15 b)34 c)22 d)221
- Calcula: a) $4!$ b) $3!$ c) $8!$
- Comprueba la veracidad o falsedad de los siguientes enunciados haciendo uso del Teorema de Wilson:
a) $4!+1$ es múltiplo de 5
b) 7 divide a 721
c) Si 3.628.801 es múltiplo de 11 entonces 3.628.800 es igual a $10!$
- Lagrange demostró el siguiente teorema, de gran importancia en el cálculo de algunas derivadas, en el estudio de la monotonía de una función y en la demostración de la regla de L'Hopital que tanto se utiliza para el cálculo de límites.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en el intervalo (a,b) , entonces existe un número $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El teorema afirma que hay una recta tangente en el intervalo de la curva comprendido entre los puntos a y b que tiene la misma pendiente que la recta secante y, por tanto, es paralela a ella.



- Demuestra que:

$$f \text{ cte. en } I \Leftrightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

- Demuestra que:

Sea f definida en $[a,b]$ verificando:

f continua en $[a,b]$

f derivable en (a,b)

$$f'(x) > 0 \quad \langle f'(x) < 0 \rangle \quad \forall x \in (a,b)$$

Entonces f es estrictamente creciente (decreciente)

- Estudia la monotonía de la función $f(x)$ sabiendo que es continua y derivable y que la gráfica de su función derivada es una recta que pasa por los puntos $(2,4)$ y $(3,0)$.
- Utilice el teorema del valor medio para demostrar que para cualquier par de números reales a y b ,

$$| \cos a - \cos b | \leq | a - b |$$

- Aplicando el teorema del valor medio, demuestra que para $x > 0$ se verifica:

$$\arctg 2x - \arctg x < x + x^2$$

- Como aparece en el panel, Lagrange fue uno de los miembros de la comisión que implantó el sistema métrico decimal. Se trata de un sistema de unidades en el cual los múltiplos y submúltiplos de una unidad de medida están relacionados entre sí por múltiplos y submúltiplos de 10.

El rostro humano de las matemáticas

El Sistema métrico decimal lo utilizamos en la medida de las siguientes magnitudes: longitud, masa, capacidad, superficie y volumen.

Con este *sistema* se pretendía buscar un sistema único para todo el mundo para facilitar el intercambio, ya que hasta entonces cada país, e incluso cada región, tenían su propio sistema, a menudo con las mismas denominaciones para las magnitudes, pero con distinto valor.

- Con dos varas no graduadas que miden 70 cm y 60 cm, ¿cómo medirías una longitud de 1 m?
- Anselmo y Antonio tienen un barrilete lleno de vino y lo quieren repartir a partes iguales, pero no tienen ningún instrumento de medida (ni para longitudes ni para volúmenes).
- Solo disponen de otro recipiente en el que cabe, sobradamente, la mitad del líquido.
- ¿Cómo hacen el reparto?
- Beatriz necesita averiguar la longitud del cable que hay en esta maraña. ¿Cómo conseguirlo sin tener que empezar por enderezarlo todo él? Pon un ejemplo.



Sabiendo que una legua equivale a 5,58 km, completa la tabla:

LEGUAS	1	5	10			
KILÓMETROS	5,58			1	5	10

5.

Atendiendo a las medidas tradicionales sabemos que:

- 1 paso = 5 pies
- 1 pie = 12 pulgadas
- 1 pulgada = 2,3 centímetros

¿Cuántos centímetros tiene un paso?

Desde que algo ocurre en cierta estrella (por ejemplo, una explosión) hasta que nosotros la podemos observar con los telescopios, transcurren diez años.

- ¿Qué distancia, en kilómetros, nos separa de esa estrella?

El Problema isoperimétrico.

Es un problema que consiste en hallar de entre todas las curvas del plano que tienen el mismo perímetro, aquella que encierra mayor área o de otra manera; de entre todas las curvas que encierran un área fija ¿cuál es la que tiene menor longitud? Fue resuelto por Lagrange, cuando sólo tenía 19 años.

Consecuencias físicas:

- ¿Por qué las gotas de aceite que flotan en el agua son redondas?
- ¿Por qué la forma óptima de un tambor es redonda?
- ¿Por qué las burbujas son redondas?

La resolución de este problema tiene aplicaciones en numerosos ámbitos donde se busca minimizar recursos. Por ejemplo, la cubierta del estadio olímpico de Munich (1972) fue diseñada con pompas de jabón, y una estructura de postes y cuerdas colgantes.



Con este diseño, no solo se consiguió originalidad y belleza sino también el ahorro de materiales, y con ello, un menor peso para la cubierta, resultando así más estable.

- Completa la siguiente tabla:

POLÍGONO	Nº DE LADOS	PERÍMETRO	ÁREA
Cuadrado		1m	
Hexágono		1m	
Octógono		1m	
Dodecágono		1m	
Isodecágono		1m	

Circunferencia

infinitos

1m

- Programación no lineal con restricciones de igualdad. Multiplicadores de Lagrange.

Imaginemos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} & \text{Optimizar } f(x, y) \\ & \text{Sujeto a: } g(x, y) = b \end{aligned}$$

Podemos resolver este problema de dos maneras:

- Sustitución: Se despeja una de las variables en la restricción y luego se sustituye en la función objetivo.
- Método de Lagrange: Se reduce el problema de optimización restringida a otro de optimización sin restricciones de una función llamada lagrangiana:

$$\begin{aligned} L(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda (g(x, y) - b) \\ \lambda &= \text{multiplicador de Lagrange} \end{aligned}$$

y se resuelve el sistema:

$$\delta L / \delta x = 0, \delta L / \delta y = 0, \delta L / \delta \lambda = 0$$

- Resuelve el siguiente problema de optimización por los dos métodos antes descritos.

“Una compañía planea gastar 10,000 dólares en publicidad. Cuesta 3,000 dólares un minuto de publicidad en la televisión y 1,000 dólares un minuto de publicidad en la radio. Si la empresa compra x minutos de comerciales en la televisión y y minutos de comerciales en la radio, su ingreso, en miles de dólares, está dado por $f(x,y) = 2x^2 - y^2 + xy + 8x + 3y$. ¿Cómo puede la empresa maximizar su ingreso?”

- Un jardinero dispone de 160 metros de alambre que va a utilizar para cercar una zona rectangular y dividirla en tres partes, colocando las alambradas de las divisiones paralelas a uno de los lados del rectángulo. ¿Qué dimensiones debe tener la zona cercada para que el área sea la mayor posible?
- Se quiere organizar una competición deportiva que consiste en nadar desde un lugar A , situado en la orilla de un río, hasta otro lugar B situado en la misma orilla; allí se sale del río y corriendo hay que llegar hasta otro lugar C , desde el cual se regresa de nuevo a B , donde se acaba la competición. Se supone que todos los trayectos son rectilíneos.
- La distancia de A a B mide 0,2 km y la de C al río mide 0,5 km. Determina a qué distancia de A hay que situar el punto C para que el recorrido completo sea el menor posible.

SOPHIE GERMAIN

La vida de Sophie Germain es un caso claro de una luchadora incansable por sus ideas y por conseguir su meta, enfrentada a los condicionamientos sociales. Visita su panel, lee atentamente los datos biográficos que aparecen y contesta a las siguientes cuestiones:



- ¿Cuándo vivió y en qué lugar?
- ¿Qué tuvo que hacer para poder presentar sus trabajos?
- ¿Con qué nombre presentó esos trabajos?
- ¿Con qué grandes matemáticos de la época tuvo relación?
- ¿Sobre qué tema trataba el trabajo que fue premiado por la Academia de las Ciencias de París?
- Haz un listado de los aspectos matemáticos que estudió.
- El teorema que lleva su nombre sirvió para demostrar, aunque sea en parte, Conjetura, ¿de qué matemático?
- Busca en el panel del matemático anterior lo que decía su conjetura, hoy día ya convertida en teorema.
- El teorema anterior habla de una igualdad que no se verifica cuando n es superior a 2. Si n fuese igual a 2, el resultado ¿a qué conocido teorema correspondería?
- En el panel se habla de las arenas musicales. Explica en que consiste ese efecto.
- Aparecen además varios diseños obtenidos con ese efecto. La mayoría de ellos tienen varios ejes de simetría, en concreto, casi todos los que aparecen tienen cuatro ejes de simetría. Copia, aproximadamente, aquellos que solo tengan dos ejes de simetría y señala sus ejes. ¿Hay alguno que tenga menos de dos ejes de simetría? En caso afirmativo indica cuál o cuales. ¿Es posible encontrar algún diseño que tenga exactamente tres ejes de simetría?, ¿y más de cuatro? Justifica las respuestas.

INVESTIGACIÓN:

- Sophie quedó impresionada por la muerte de Arquímedes. Busca información sobre ese hecho. Indica cómo, donde, cuando y en qué circunstancias sucedió.
- ¿Cuál fue el Siglo de las Luces? ¿A qué debió su nombre?

El rostro humano de las matemáticas

- Sophie tiene que interceder a favor del matemático Gauss ante uno de los generales de Napoleón, ¿por qué razón?
- En 1816 recibió el Gran Premio de la Academia de Ciencias de París, ¿cuántas veces tuvo que presentarse antes de conseguir el premio?
- Su trabajo premiado pretendía explicar las experiencias del físico alemán Ernst Chladni. Escribe algunas líneas hablando sobre la vida y obra de este personaje.
- Al final de su vida, una Universidad le otorgó el grado de doctora, ¿qué Universidad?, ¿qué ocurrió con dicho galardón?
- Su interés por la teoría de números surgió a raíz de conocer los libros publicados por Gauss y por Legendre. El primero tiene su panel en la exposición, pero el segundo no. Busca información sobre su vida y escribe una pequeña biografía.
- Explica en qué consiste una conjetura. Cuando se demuestra definitivamente una conjetura, ¿cómo pasa a denominarse?
- Cuenta de forma concisa la historia sobre como se demostró la conjetura de la que hemos hablado en este panel.

ACTIVIDADES EXTRAS:

Uno de los aspectos que más trabajó Sophie fue la Teoría de Números. En concreto trabajó con los números primos, y en su honor se nombraron los Primos de Germain.

Un número es primo de Germain si el doble del número más 1 también es primo. Por ejemplo, 11 es primo de Germain ya que $11 \cdot 2 + 1 = 23$ que también es primo, sin embargo 31 no lo es pues $2 \cdot 31 + 1 = 63$ que no es primo.

1^{er} ciclo de ESO:

- Comprueba si los siguientes números son o no primos de Germain:
a) 3 b) 6 c) 47 d) 101
- Halla todos los números primos, de dos cifras y menores que 50, que sean de Germain.
- Cada número primo de Germain tiene a su vez un número primo asociado. Si p es un primo de Germain, ¿qué expresión tiene el número primo asociado?
- El número primo 2879 es un primo asociado a un primo de Germain, ¿a cuál?

2º ciclo de ESO:

- Los números primos mayores que 2, ¿en qué cifras pueden terminar?
- Para los primos de Germain, ¿se mantiene lo anterior?

El rostro humano de las matemáticas

- Demuestra que todo primo asociado a un primo de Germain se puede expresar como la suma de dos números naturales consecutivos.
- El número 131 es capicúa y además es primo de Germain pues $2 \cdot 131 + 1 = 263$ que también es primo, pero no es capicúa. ¿Existen números de tres cifras capicúas que sean primos de Germain y tal que su primo asociado sea también capicúa?
- Dos números primos se llaman gemelos si son números impares consecutivos. Entre los números menores que 100, ¿hay primos gemelos que sean de Germain?

Bachillerato:

- Demuestra que es imposible que dados dos primos gemelos que sean de Germain, sus primos asociados sean también primos gemelos.
- Escribe en la primera columna de una tabla los primos de Germain menores que 100. En la segunda columna los números primos asociados a ellos y en una tercera columna el cociente entre el primo asociado y el primo de Germain correspondiente. La sucesión que aparece, ¿hacia qué valor se acerca? ¿Cuál sería el límite de esa sucesión en el infinito?
- El número primo asociado a un primo de Germain, ¿puede a su vez ser un primo de Germain? En caso afirmativo, ¿para qué casos?
- Supongamos que fuese posible encontrar un primo de Germain de forma que su primo asociado fuese también de Germain, y el asociado a éste también fuese primo de Germain y así sucesivamente. ¿En qué cifra tendría que terminar dicho número primo?
- Para los primos anteriores, demuestra que si p es el primo inicial, los demás son de la forma $p+n \cdot (p+1)$.
- Estudia la sucesión que formarían los números n de la expresión anterior. ¿Qué ley de formación encuentras?
- Demuestra que no hay ningún número primo menor que 100 que pueda tener números primos asociados de Germain encadenados de forma indefinida.
- Una de las igualdades que demostró Sophie fue la conocida como *Identidad de Sophie Germain*:

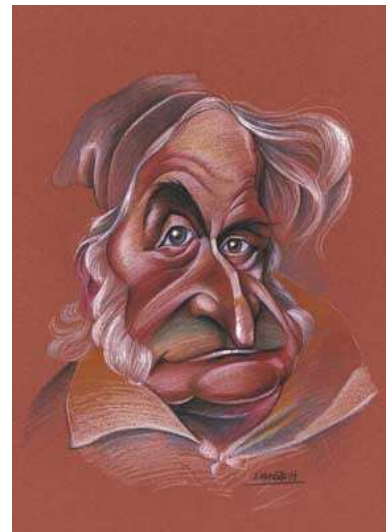
$$x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2 + 2xy) \cdot (x^2 + 2y^2 - 2xy)$$

Utiliza las identidades notables para demostrar que la igualdad anterior se verifica para cualquier valor de x y de y .

GAUSS

“La matemática es la reina de las ciencias y la aritmética es la reina de las matemáticas.”

Carl Fiedrich Gauss



Visita el panel de uno de los niños prodigio de las matemáticas y contesta a los siguientes puntos:

- ¿Quién pagó sus estudios a Gauss?
- ¿En qué campos científicos trabajó?
- ¿Qué ocurrió en la vida de Gauss en 1799?
- ¿Quién mandó acuñar monedas en honor a Gauss tras la muerte de éste?
- ¿En qué año obtuvo la cátedra? ¿De qué disciplina científica?
- ¿Cómo se llama su obra maestra?
- ¿Cuáles eran las pocas necesidades del ilustre matemático en el final de su vida?
- ¿Con qué sobrenombre se conoce también a Gauss?
- En la Universidad donde estudió fue, posteriormente, profesor. ¿En qué Universidad fue?, ¿qué materias impartió?
- ¿En dónde anotaba sus descubrimientos?
- Sólo con 19 años descubrió un resultado que, ya por si solo, le hubiese servido para pasar a la historia de la matemática, ¿qué resultado fue?

INVESTIGACIÓN:

- Sitúa en el mapa la ciudad en la que nació Gauss.
- Gauss fue un genio precoz y dan fe de ello algunas anécdotas como la que le ocurrió a los 3 años con su padre. ¿Qué le pasó? ¿Y en el colegio cuando éste aún contaba con tan sólo 10 años de edad?
- ¿Qué persona enseñó a leer a Gauss?
- ¿A quién dedicó su obra maestra *Disquisitiones arithmeticae*?
- ¿Con quién se casó Gauss? ¿Cómo se llamaban sus hijos?

El rostro humano de las matemáticas

- ¿Por qué es conocida su frase: “Dile que espere un momento hasta que haya terminado”?
- Su cerebro fue conservado y fue estudiado por Rudolf Wagner. ¿Cuánto pesaba y cuál era su área cerebral?
- ¿Cuántos sellos se emitieron en honor de Gauss? ¿Qué país? ¿Qué conmemoraban? Busca la imagen de cada uno de ellos.
- ¿Qué otro matemático de la exposición fue profesor en la misma Universidad que Gauss?
- En 1801 fijó la órbita de Ceres, ¿quién es este satélite?

ACTIVIDADES EXTRAS:

GEOMETRÍA

1^{er} ciclo de ESO:

- Dibuja y escribe el nombre de los primeros 6 polígonos, en función de su número de lados.
- ¿Cómo se llaman aquellos polígonos que tienen todos sus lados iguales? ¿Y los que no los tienen iguales? Dibuja un ejemplo de polígono de cada tipo.
- Dibuja un cuadrado e indica cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores, sus ángulos exteriores y los centrales. Márcalos en la figura.
- Dibuja un pentágono e indica cuánto mide cada uno de sus ángulos interiores, sus ángulos exteriores y los centrales. Márcalos en la figura.
- **NOTA: Puedes utilizar el transportador de ángulos.**

2^o ciclo de ESO:

- ¿Qué polígonos regulares pueden construirse con regla y compás? Construye con dichos instrumentos un pentágono y un hexágono regular.
- ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado regular? ¿Y un pentágono regular? ¿Y un hexágono regular? ¿Y un heptágono regular?
- ¿Influye el número de diagonales en el hecho de que estos polígonos sean regulares o no?
- Busca una relación entre los lados de un polígono y el número de diagonales que tiene.

- Deduce su fórmula y aplícala para comprobar que obtuviste el mismo número de diagonales en el heptágono.

ÁLGEBRA

Gauss hizo importantes aportaciones al Álgebra, entre las que podemos destacar la primera demostración del Teorema Fundamental del Álgebra, en 1799, y que viene a decir que:

“ Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene n raíces.”

Sabiendo esto, factoriza los siguientes polinomios:

2º ciclo de ESO:

- $P(x) = x^2 - 11x + 30$
- $P(x) = x^2 - 6x + 9$
- $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$
- $P(x) = x^4 - 2x^2 - 3$

BACHILLERATO

- $P(x) = 2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6$
- $P(x) = 6x^3 + 7x^2 - 9x + 2$
- $P(x) = x^2 - 2x + 9$ (Ciencias, ya que aparecen raíces complejas)
- $P(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ (Ciencias, ya que aparecen raíces complejas)
- $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 8x - 3$

- Aplica el método de Gauss para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\bullet \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 5x + y - z = 2 \\ x + y + z = 5 \end{cases}$$

ARITMÉTICA

En sus **Disquisitiones arithmeticae**, Gauss define las congruencias. Dos números a y b son congruentes módulo m si $a-b$ es divisible por m . O dicho de otra forma, a y b son congruentes de módulo m si al dividir a y b entre m se obtiene el mismo resto.

1^{er} ciclo de ESO:

- Comprueba que se verifican las siguientes afirmaciones:
 - a) 34 es congruente módulo 5 con 9.
 - b) 17 y 23 son congruente módulo 2. ¿Son congruentes respecto a algún otro módulo? Razona la respuesta.
- Gauss demostró el Teorema de Wilson según el cual si aumentamos en una unidad el producto de todos los números menores que un número primo p , el resultado es divisible entre p . Compruébalo para todos los primos de una cifra.

2^o ciclo de ESO:

- Encuentra dos números que sean congruentes módulo 3.
- ¿Sería posible encontrar dos números que fuesen a la vez congruentes módulo 4 y congruentes módulo 7? ¿Qué deberían cumplir esos números?
- Otro de los problemas clásicos que demostró Gauss fue el calcular cuántos números hay menores que uno dado, que sea compuesto, y que sean primos con él. Encontró una función que hallaba esa cantidad. Si tenemos un número A que se puede descomponer como $A=a^m \cdot b^n \cdot c^r \cdot \dots$ la función que da la cantidad de números menores que él que son primos con A (se cuenta el valor 1) viene dada por la función $j(A) = A \cdot \frac{a-1}{a} \cdot \frac{b-1}{b} \cdot \frac{c-1}{c} \cdot \dots$. Compruébalo con el número $A=24$.

Bachillerato:

- Gauss trabajó la llamada curva Normal o curva de Gauss que refleja la evolución de muchos aspectos humanos. Resuelve el siguiente ejercicio. En un centro educativo donde hay 420 alumnos se hace un estudio sobre las alturas obteniéndose que se rigen por una ley normal de media $\bar{x}=168$ cm. y desviación típica 9 cm. Elegimos al azar una de las personas medidas, ¿cuál es la probabilidad de que mida menos de 170 cm.? De las personas que hay en el centro, ¿cuántas se pueden suponer que su altura este entre 165 y 175 cm.?

GALOIS

Tras visitar el panel de uno de los personajes con vida más breve de la exposición, responde a los siguientes puntos:

- ¿Dónde nació?
- ¿Qué descubrió a los 15 años?
- ¿En qué revista publicó su primer artículo a los 17 años?
- ¿Por qué no entró en la École Polytechnique?
- ¿Qué demostró para una ecuación general de grado superior a 4?
- ¿Por qué estuvo en 1831 un mes en la cárcel?
- ¿Qué edad tenía cuando murió?
- ¿Cómo murió?
- Di otros matemáticos de su época.
- ¿Por qué es trasladado a la casa de reposo de Sieur Faultrier?



INVESTIGACIÓN:

- A los 12 años ingresó en el liceo “Royal de Louis-le-Grand” de París. ¿Quién había estudiado antes?
- Di algunas de las contribuciones matemáticas de Galois.
- ¿Cuáles fueron sus últimas palabras antes de morir? ¿a quién se lo dijo?
- Galois, presumiendo su muerte, escribió a un amigo una carta en la cual resumía su “Teoría de Grupos” y le pedía que se la enseñara a conocidos matemáticos como Jacobi y Gauss, solicitando su opinión. ¿Qué ocurrió con la carta?
- Galois vivió durante los “Cien Días”, ¿podrías explicar qué son?
- Explica que pasaba políticamente durante los últimos años de Galois.
- ¿Quién es Liouville? Y ¿qué hizo 14 años después de la muerte de Galois?

KOVALÉVSKAYA

“Las personas pasan, las ideas perduran.
La figura eminente de Sonia debería pasar
a la posteridad en base a la única virtud de
su trabajo matemático y literario”

Kart Weierstrass



Contesta a las preguntas sobre la vida y obra de Sonia Kavalévskaya después de visitar su panel:

- ¿Por qué causa se casó con Vladimir Kovalevshi?
- ¿En qué Universidad se doctoró?
- ¿Sobre qué planeta de nuestro sistema solar realizó estudios?
- ¿Cuál es su verdadero nombre?
- ¿Con cuántos años murió?
- ¿Quién fue el profesor que le ayudo a conseguir su doctorado?
- ¿De qué trataba su tesis doctoral?
- ¿Quién le ayudó para que trabajara en la Universidad de Estocolmo?
- ¿Gracias a qué trabajo obtuvo el premio Bordin de la Academia de Ciencias de París?
- ¿Quién es considerado como el “padre del Análisis Matemático”?
- Su nombre ha pasado a la historia por un teorema compartido ¿con que otro matemático de la exposición?

INVESTIGACIÓN:

- Realiza una pequeña biografía del matemático Kart Weierstrass.
- ¿Quién era Mittag-Leffler? ¿Qué relación tuvo con Kovalévskaya?
- Sonia se familiarizó con las fórmulas matemáticas en su niñez. Explica por qué ocurrió esto.
- ¿Qué familiares o personas cercanas le creron en un infancia el gusto por la ciencia?
- Fue nombrada miembro honorífico de la Academia de Ciencias ¿de qué ciudad?
- Escribió un libro titulado “Recuerdos de mi niñez”, ¿de qué trataba en dicho libro?
- Aparte de sobre matemáticas, ¿sobre qué otros temas escribió?
- Kovalévskaya fue la primera mujer que consiguió en Europa ¿qué puesto?

- ¿Cuántos idiomas aprendió Sofía en su juventud?

ACTIVIDADES EXTRAS:

2º ciclo de ESO:

- Kovalévskaya descubrió por si misma los conceptos básicos de las razones trigonométricas. Dibuja un triángulo rectángulo y define las tres razones trigonométricas fundamentales.

Bachillerato:

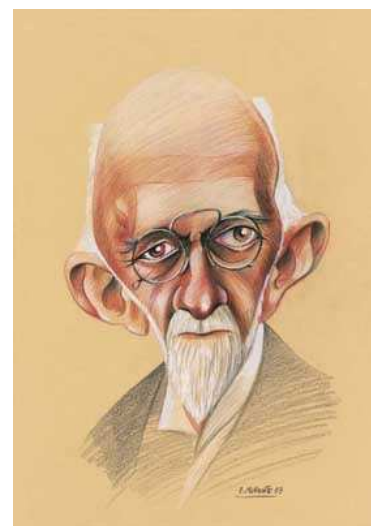
- Sonia estudió las figuras resultantes de girar elementos alrededor de un punto. A ese tipo de figuras se les suele llamar sólidos de revolución. Los más corrientes provienen de girar determinados elementos alrededor de una línea recta. Explica como se generan las siguientes figuras:
 - a) Cilindro.
 - b) Cono.
 - c) Esfera.
- Cuando en 1870 Sonia comienza a recibir clases de Weierstrass, una de las primeras cosas en que tuvo que ponerse al día fue en los métodos de integración. Trabajó con integrales elípticas y, aunque un poco más complicadas, tuvo que resolver integrales como las siguientes que puedes resolver utilizando el cambio de variable $t=k \cdot \text{sen}x$ cuando lo necesites.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{k^2 - \text{sen}^2 x}} \quad \text{y} \quad \int_0^{\pi/2} \sqrt{k^2 - \text{sen}^2 x} \, dx$$

HILBERT

Visita el panel del matemático que centró los grandes problemas matemáticos planteados al comienzo del siglo XX y responde los siguientes interrogantes:

- ¿En qué universidades estudió?
- ¿A que edad se jubiló?
- ¿Cuál fue su epitafio?
- ¿En qué consiste el programa de Hilbert?
- ¿Cuál fue su obra principal? ¿En qué año fue publicada?
- ¿En qué ciudad alemana nació Hilbert?
- ¿Qué gran pensador y filósofo nació en la misma ciudad?
- ¿Cuál fue la mayor dificultad con que se encontró Hilbert para desarrollar su trabajo en la Universidad?
- ¿Dónde propone una lista de 23 problemas matemáticos sin resolver hasta ese momento?
- Entre los anteriores, ¿cuál es el más famoso?



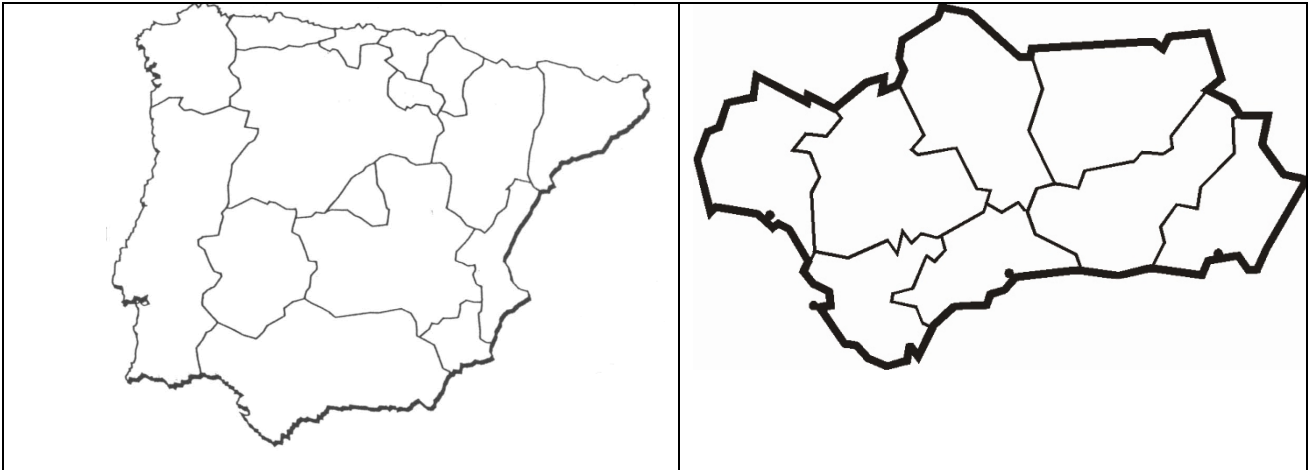
INVESTIGACIÓN:

- ¿Cuál es el nombre actual de la ciudad natal de Hilbert? Sitúa esta ciudad en un mapa.
- ¿Cuál era la profesión de su padre?
- Haz una pequeña biografía del matemático Kart Gödel.
- ¿Con qué matemático ruso mantuvo una estrecha amistad?
- ¿Quién fue su mujer?
- ¿Qué famosa cátedra rechazó por permanecer fiel a la Universidad de Gotinga.
- ¿Qué día murió?
- ¿Qué campeón del mundo de ajedrez fue alumno suyo? Encuentra un sello que recuerda a este famoso algebrista.
- Hilbert publicó en 1924 un libro titulado “Los métodos de la Física Matemática” junto con un famoso físico. Comenta algo sobre esa persona.
- Entre los 23 problemas planteados por Hilbert como los fundamentales para resolver en el siglo XX estaban el Problema de los cuatro colores y el Teorema de Fermat. Enuncia estos famosos teoremas. ¿Están ya resueltos?, en caso afirmativo cuando se resolvieron y por quién.

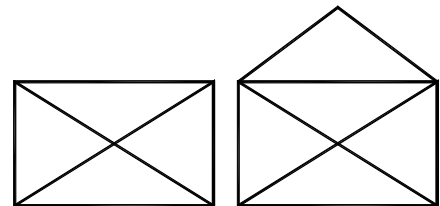
ACTIVIDADES EXTRAS:

1^{er} ciclo de ESO:

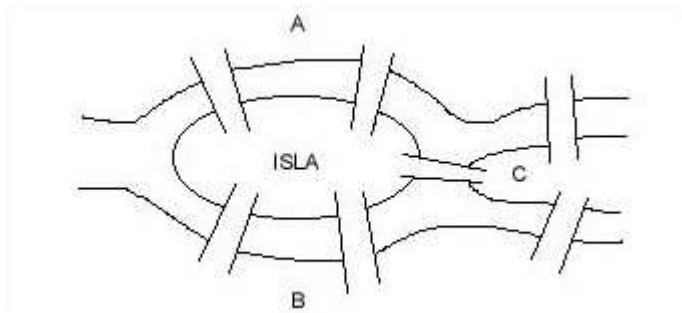
- Uno de los 23 problemas propuesto por Hilbert fue el de los cuatro colores. Se basa en colorear regiones del plano de forma que dos regiones con frontera común no tengan el mismo color. Colorea los siguientes dibujos utilizando el menor número de colores.



- Uno de los pasatiempos tradicionales basados en la parte de la matemática llama topología son los de dibujar una figura sin levantar el lápiz del papel y sin pasar dos veces por la misma línea. Intenta conseguirlo con los dos siguientes dibujos:



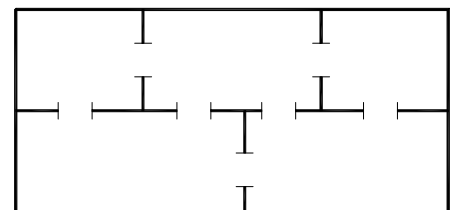
- El problema que dio lugar a la Teoría de Grafos y que fue resuelto por Euler tiene el nombre de Los Puentes de Königsberg. En dicha ciudad, en ese momento alemana, existían 7 puentes según vemos en el dibujo. El problema planteado era partir de un punto y volver al mismo punto pasando una y solo una vez por cada puente.



pasando una y solo una vez por cada puente. Comprueba que, como demostró Euler, no es posible encontrar un recorrido con esas características.

2º ciclo de ESO:

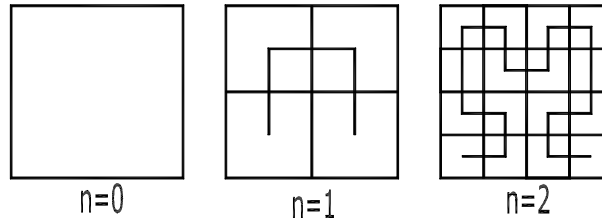
- En la siguiente imagen tienes el esquema de una casa en la que hay una puerta que conecta cada habitación con la contigua. Investiga si es posible recorrer todas las habitaciones, volviendo al punto



El rostro humano de las matemáticas

de partida, pasando por todas las puertas una única vez. En caso de ser posible, ¿Dónde comenzaríamos el recorrido?

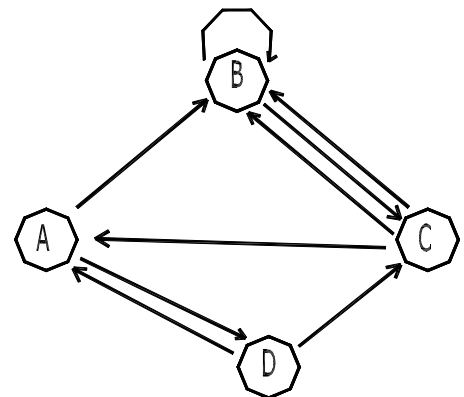
- La curva de Hilbert es una curva continua que pasa por todos los puntos del cuadrado unidad. El proceso consiste en ir dividiendo en cada paso cada uno de los cuadrados en cuatro partes y unir los puntos de todos los cuadrados. En las siguientes imágenes tienes los pasos 0, 1 y 2 del proceso de formación de dicha curva. Intenta dibujarla para $n=3$.



- Un ejemplo de grafo es el diagrama de árbol. Este diagrama es muy usado en probabilidad. Utilízalo para resolver el siguiente problema: Lanzamos tres monedas. Calcula las siguientes probabilidades:
 - a) $P(\text{obtener 3 caras})$
 - b) $P(\text{obtener al menos una cara})$
 - c) $P(\text{obtener exactamente una cara})$

Bachillerato:

- Intenta dibujar la curva de Hilbert para $n=4$.
- En la matemática que estudia los grafos, uno de los aspectos que se trabajan son las matrices de conectividad en la que se representan por 0 y 1 las conexiones entre diversos elementos. Escribe la matriz de conectividad del grado de la figura.
- Halla la inversa de la matriz anterior, si es posible.
- Utiliza un diagrama de árbol para resolver el siguiente problema: En un grupo de Bachillerato el 75% estudia Inglés y el resto Francés. De los que estudian Inglés, el 55% han optado por el Bachillerato de Ciencias y Tecnología, de los que estudian Francés lo han elegido el 40%. Elegimos un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea del Bachillerato de Ciencias y Tecnología (BCT)? Elegimos otro alumno al azar y resultado que si es del BCT, ¿cuál es la probabilidad de que sea de Francés?



EMMY NOETHER

Visita el panel de una de las matemáticas que vio su trabajo truncado por ser judía y que tuvo que emigrar debido a la persecución nazi y contesta a las siguientes preguntas:

- ¿En qué ciudad nació? ¿A qué zona de Alemania pertenecía esa ciudad?
- ¿Qué frase laudatoria dedicó el matemático Dieudonné a Noether?
- ¿En qué parte de las matemáticas desarrollo su principal trabajo?
- ¿Sobre qué tema desarrolló sus estudios de doctorado?
- El conocido como Teorema de Noether, ¿sobre qué trata?
- ¿En qué año recibió el título de doctora?, ¿con qué categoría?, ¿con qué trabajo lo consiguió?
- ¿Quién dijo de ella que era una gran científica, magnífica profesora y una inolvidable persona?
- ¿Qué característica curiosa le ocurrió en sus estudios en la Universidad?
- ¿Quién solía publicar resultados de sus investigaciones?



INVESTIGACIONES:

- ¿Qué otro matemático y físico nació en la misma ciudad que Emmy? ¿Qué conocida ley física se debe a él? ¿Sobre qué trata dicha ley?
- Antes de dedicarse a las matemáticas realizó las pruebas para ser profesora ¿de qué disciplinas?
- En matemáticas un grupo es un conjunto con una operación que verifica una serie de propiedades. Busca la definición precisa.
- Si el conjunto en lugar de tener una operación tuviese dos, puede llegar a tener una estructura de anillo. Copia las propiedades que deben cumplir las operaciones para que se dé este hecho.
- Obtuvo el grado de doctora “cum laude”. Busca lo que significa.
- Escribe algo sobre la vida y obra del amigo de Noether que la recordaba como una de las mujeres matemáticas más grande.

El rostro humano de las matemáticas

- Aparte de en las matemáticas, Noether realizó contribuciones fundamentales en el campo de la física teórica. Busca en que partes de esa disciplina.
- En 1915 fue invitada a dar clases, ¿en qué Universidad?, ¿qué matemáticos le hicieron la invitación? Aún así tardó cuatro años en poder dar clases en la Universidad, ¿por qué?
- Por culpa de la persecución nazi a los judíos, tuvo que emigrar a otro continente. ¿En qué Universidad tuvo que enseñar entonces?
- Emmy también impartió clases en Rusia, por lo que haz un estudio de todas las Universidades en que impartió clase.
- Aparte de ella, varios de sus familiares también eran matemáticos, ¿a quienes nos referimos?
- En 1932 recibió un premio por su contribución a las matemáticas, ¿cómo se llamaba dicho premio?

ACTIVIDADES EXTRAS:

Educación Secundaria Obligatoria:

- Demuestra que los polinomios de la forma $a \cdot x + b$ siendo a y b números cualesquiera, forman un grupo conmutativo respecto de la suma de polinomios.
- Los números de la forma $a + b \cdot i$ donde a y b son números enteros e i es la unidad imaginaria (recordemos que $i^2 = -1$) son llamados enteros de Gauss y forman un anillo conmutativo para la suma y el producto. Comprueba que efectivamente verifican las propiedades correspondientes.
- El tema que desarrolló en su tesis fue el de los invariantes. El tema de los invariantes surgió históricamente al estudiar como escribir números enteros mediante polinomios homogéneos en dos variables. El polinomio más simple de este tipo es el de la forma $x^2 + 2xy + y^2$. Da varios valores a "x" y a "y" y encuentra varios números enteros que se pueden descomponer de esa forma. ¿De qué tipo son los números enteros que se pueden escribir de esa forma?

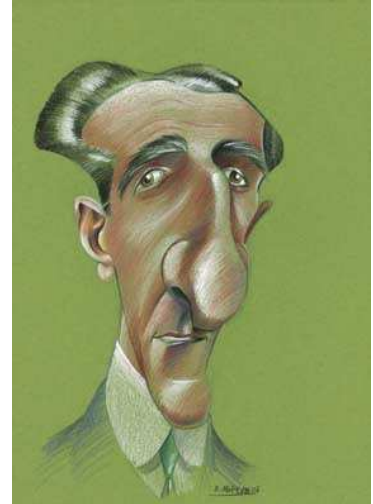
Bachillerato:

- Comprueba que las matrices cuadradas de orden 2 forman un anillo no conmutativo para la suma y el producto de matrices.
- ¿Es posible escribir el número 8 mediante una forma cuadrática binaria con expresión $x^2 + 2xy + y^2$? Demuestra como tienen que ser los números enteros que se puedan expresar de esa forma.

JULIO REY PASTOR

Visita el panel de uno de los matemáticos españoles más internacionales y responde a las siguientes preguntas:

- ¿En qué países vivió?
- ¿En qué áreas de la matemática investigó?
- Fue secretario y posteriormente presidente ¿de qué sociedad?
- Antes que dedicarse a las matemáticas, ¿cuáles eran sus intenciones?
- Fue miembro ¿de qué dos importantes academias españolas?
- Durante su estancia en Argentina ayudó a varios matemáticos españoles, ¿en qué situación?
- ¿Qué revista fundó?
- Aparte de su labor investigadora, ¿en qué otro aspecto destacó?
- La primera vez que visita Argentina fue por la invitación, ¿de qué institución?



INVESTIGACIÓN:

En reconocimiento a su labor, Julio Rey Pastor fue nombrado miembros de dos Reales Academias Españolas.

- 1º) Investiga y encuentra qué otros grandes científicos y literatos obtuvieron “su misma medalla” y “sillón” en dichas Academias.
- 2º) Busca diez andaluces académicos en cada una de ellas.

En la Luna hay más de 300 cráteres con nombres de grandes hombres y mujeres relacionados con las Ciencias.

- 3º) Localiza diez cráteres con nombre de matemáticos.
- 4º) Busca algunos cráteres lunares con nombres femeninos.
- 5º) Además del cráter dedicado a Julio Rey Pastor hay, al menos, otros dos dedicados a “Julios” famosos. ¿De qué Julios hablamos?

El Premio Nacional de Investigación Julio Rey Pastor es un premio de Matemáticas y Tecnologías de la Información y las Comunicaciones convocado por el Ministerio de Educación y Ciencia de España.

- 6º) ¿Cuándo se instauró el premio? ¿Cuáles son los objetivos de dicho premio?

El rostro humano de las matemáticas

7º) ¿Quiénes son los todos los galardonados hasta el momento?

8º) Escribe un párrafo de un máximo de 10 líneas, hablando sobre la vida y la obra de alguno de ellos

En 1995 el Excmo. Ayuntamiento de Sevilla acordó rotular una calle con el nombre de dos insignes matemáticos, inmortalizando dos figuras claves de la Ciencias Españolas del siglo XX. El primero era el Julio Rey Pastor.

El segundo de ellos, andaluz de nacimiento y vocación, Catedrático de la Universidad de Sevilla fue, además, el creador de la Sección de Matemáticas de dicha Universidad en 1967 y en ella permaneció hasta su muerte ocurrida en 1992.

Profesor y discípulo, unidos en una calle de cierta isla sevillana, en un lugar mágico.

9º) Localiza el nombre de la calle y busca el nombre completo (con sus dos apellidos) del segundo matemático.

10º) En dicha Isla llamada _____ también se reconoce la labor de otros muchos matemáticos y científicos. Busca diez nombres de calles dedicadas a hombres y mujeres “de Ciencia”.

EJERCICIO 1

“Sobre los números consecutivos cuya suma es a la vez cuadrado y cubo perfecto”.

Hallar los n números enteros positivos consecutivos más pequeños, cuya suma sea a la vez cuadrados y cubos perfectos, siendo n lo menor posible, pero considerando dos casos: a) con n par b) con n impar, n mayor que 1.

1º y 2º de ESO:

- ¿Qué son los números denominados cuadrados perfectos? ¿Y los cubos perfectos?
- Encuentra los primeros veinte números cuadrados perfectos y cubos perfectos.
- ¿Cuáles son los primeros cuatro números naturales que son cuadrados perfectos y cubos perfectos a la vez?
- Comprueba que $2+3+4$ es cuadrado perfecto, pero no cubo perfecto.
- Busca tres números consecutivos cuya suma sea cubo perfecto.

3º y 4º de ESO:

- ¿Qué son los números denominados cuadrados perfectos? ¿Y los cubos perfectos?
- ¿Cuáles son los primeros cuatro números naturales que son cuadrados perfectos y cubos perfectos a la vez?

El rostro humano de las matemáticas

- Suma los primeros 10 números naturales ($1+2+\dots+10$).
- Investiga la fórmula para hallar la suma de los primeros n números naturales (Gauss la halló con sólo 9 años). ¿Podrías sumar tu también del 1 a 200 sin calculadora?
- Busca dos números consecutivos cuya suma sea cuadrado y cubo perfecto a la vez.

Bachillerato:

- ¿Cuáles son los primeros seis números naturales que son cuadrados perfectos y cubos perfectos a la vez?
- Investiga la fórmula para hallar la suma de los primeros n números naturales (Gauss la halló con sólo 9 años). ¿Podrías sumar tu también del 1 a 200 sin calculadora?
- Suma los números $65+66+\dots+88+89$.
- Busca dos números consecutivos cuya suma sea cuadrado y cubo perfecto a la vez.
- Busca tres números consecutivos cuya suma sea cuadrado y cubo perfecto a la vez.

EJERCICIO 2

Sean P , Q y R números expresados en el sistema decimal:

P por m cifras iguales a 1.

Q por $(m+1)$ cifras iguales a 2.

R por $(m+1)$ cifras iguales a 8.

Se cumple que $(P \cdot 10^{m+2} + Q + 2)$ y $(P \cdot 10^{m+2} + R + 1)$ son cuadrados perfectos.

4º de ESO; Bachillerato:

Comprobarlo para $m = 1, 2, 3, 4$ y 5

EJERCICIO 3

“Superficies topológicas: La botella de Klein o... la banda de Moebius”.

¿Por qué una curva
A1 ir y regresar
Vuelve al lugar donde ha empezado?

Toma el lápiz y delinea
Ya verás:
¡La cinta sólo tiene un lado!



El símbolo del reciclaje, tiene la forma de una banda de Moebius.

LA MÁGICA CINTA DE MÖBIUS

Las construcciones más simples contienen a veces las singularidades más sorprendentes. Una de las superficies más sencillas que se puede fabricar es la llamada Cinta de Möbius. Pero en su simplicidad se halla su magia. Contra lo que nuestra intuición diría, es una superficie que sólo tiene una cara y en la que no es posible la orientación: la derecha se convierte en izquierda y viceversa. Es una de las estructuras más delirantes de la Topología, la Geometría sin medidas, en la que un cuadrado es idéntico a un círculo y una rosquilla no se distingue de una taza.

por Lolita Brain



AUGUST FERDINAND MÖBIUS
1790-1868

LOS INVENTORES DE LA CINTA

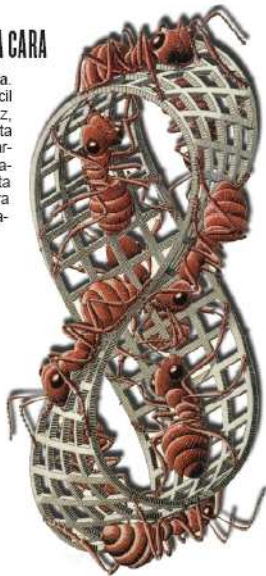
La conocida como Cinta de Möbius debe su nombre a su inventor, el matemático y astrónomo August Möbius, que fue alumno de Gauss, y que en 1858 la construyó y estudió. Sin embargo, este objeto matemático fue analizado años antes por el también matemático alemán Johann Listing. De hecho, éste publicó sus resultados antes que lo hiciera Möbius. Paradojas de la historia.



JOHANN BENEDICT LISTING
1808-1882

LA CINTA DE MÖBIUS TIENE UNA ÚNICA CARA

La Cinta de Möbius tiene una sola cara. Aunque aparentemente tenga dos, es fácil comprobar que no es así: toma un lápiz, comienza a trazar una línea siguiendo la cinta y comprobarás que encuentra el punto de partida sin necesidad de cruzar su borde. El grabado de Escher que reproducimos manifiesta esta propiedad: una hormiga que comenzara a andar por la cinta la recorrería completamente volviendo al punto de partida.



Möbius Strip I, 1961.
Xilografía de M.C. ESCHER

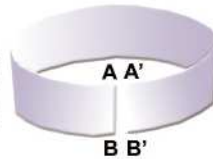
Möbius Strip II, 1963.
Xilografía de M.C. ESCHER

ASÍ SE CONSTRUYE UNA CINTA DE MÖBIUS

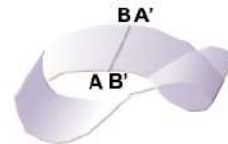
Recorta una tira de papel a la larga. Marcáremos sus vértices como A, B, A', y B'.



Si doblamos la tira de modo que coincidan los vértices A con A' y B con B', y los pegamos, obtendremos una cinta cilíndrica normal.



Pero si antes de unir los vértices hacemos una torsión a la tira de modo que A se una con B' y A' con B, obtendremos una Cinta de Möbius.



LA CINTA DE MÖBIUS NO ES ORIENTABLE

Una de las propiedades más interesantes de la cinta de Möbius es que no es orientable. Esto significa que no se pueden definir conceptos como derecha o izquierda, arriba o abajo. Y no se puede hacer porque al mover un objeto sobre su superficie, lo que era diestro se convierte en zurdo.



¿QUÉ PASA CUANDO SE CORTA UNA CINTA DE MÖBIUS?

Cuando se corta una cinta de Möbius por su centro a todo su largo, se obtienen resultados fantásticos y muy distintos de lo que sucede cuando se corta una tira cilíndrica normal. Si cortas longitudinalmente un anillo con tijera, obtendrás dos anillos de menor ancho. No es así con la cinta.



Al cortar la cinta por su centro (la línea de puntos rojos) se obtiene una única tira con dos torsiones y no dos anillos como cabría esperar.

MÁS MAGIA CON LAS TIJERAS

Si pintas una banda central en una cinta de Möbius (en rojo en la figura) y la cortas por su borde, obtendrás una nueva cinta de Möbius roja anudada a otra blanca que tiene dos torsiones.



CORTA POR EL BORDE DE LA BANDA ROJA

www.lolitaabrain.com

1º, 2º, 3º y 4º de ESO:

Contruir bandas de Moebius y estudiar sus propiedades más inmediatas.

EJERCICIO 4

Sus textos de Análisis Matemáticos fueron utilizados durante la mayor parte del siglo XX en los Institutos y Facultades de España, Argentina y otros muchos países hispanohablantes.

Presentamos algunos de sus ejercicios:

1º y 2º de ESO:

- Hallar el mcm (180, 270, 375)
- Corríjase el segundo miembro de: $3^2 \cdot 3^3 = 9^6$; $3^8 / 3^2 = 3^4$; $3^2 + 3^3 = 6^5$
- ¿Cuál es el mayor entero que se puede agregar al dividendo sin alterar el cociente?
- Hallar los números que divididos por 2, 3, 4, 5, y 6, den como resto: 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.

3º y 4º de ESO:

- Números perfectos: Comprobar que los números 6 y 28 son perfectos, esto es, que son iguales a la suma de todos sus divisores positivos y menores que ellos.
- Hallar los números que divididos por 2, 3, 4, 5, y 6, den como resto: 1, 2, 3, 4 y 5, respectivamente.
- Multiplica los siguientes polinomios y comprueba que
$$(a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2$$
$$(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$
$$(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$
- Comprueba que $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ para $n=2, 3, 4, 5$ y 6. Demuéstralo para cualquier n natural

Bachillerato:

- Calcular $(2+\sqrt{3})^6 + (2-\sqrt{3})^6$
- Resolver $8 \cdot x^{-6} + 999 \cdot x^{-3} = 125$
- Comprueba que $1+3+\dots+(2n-1) = n^2$ para $n = 2, 3, 4, 5$ y 6 . Demuéstralo para cualquier n natural
- Demostrar que $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n+1}{n}$

PEDRO PUIG-ADAM

“Aprended a ser un poco aprendices de todo
para vuestro bien y, al menos, especialistas
en algo para bien de los demás”
Puig-Adam



Visita el panel de este matemático que fue uno de los principales impulsores de la didáctica de las matemáticas en nuestro país. Contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿De qué importante personaje español fue profesor?
- ¿Qué problema le propuso el ingeniero Juan de la Cierva?
- Aparte de las Matemáticas, ¿qué otras aficiones tenía?
- ¿Qué es lo que se considera como lo más importante de su obra?
- ¿A qué comisión internacional perteneció?
- ¿En qué dos centros educativos impartió clases?
- ¿Para qué servía el ingenio electrónico que inventó?
- Escribió libros de texto, ¿con qué otro matemático de la exposición?

Para ampliar la información: búsqueda en Internet.

- Localiza el nombre de la tesis con que consiguió el doctorado en 1921.
- ¿A qué otros grandes matemáticos españoles consideraba sus maestros?
- El 12 de Mayo se celebra el aniversario de su nacimiento. En su honor ese día se celebra ¿qué?
- En 1952 fue nombrado miembro de la Academia de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. ¿De qué trataba el discurso de ingreso que pronunció?
- Busca y copia su ***Decálogo de la didáctica matemática media***.

Actividades extras:

Pedro Puig-Adam, junto con Rey Pastor elaboraron una serie de libros para la enseñanza media bajo el adjetivo de *Método Intuitivo*. Esos libros tuvieron una gran repercusión en la enseñanza de la matemática a esos niveles. A continuación, aparecen una serie de problemas tomados de esos manuales. Se incluyen las indicaciones originales que

aparecen en el libro.

1^{er} ciclo de ESO:

- El famoso cuadro “Las Meninas” fue pintado por Velázquez en 1656, a los 57 años de edad, después de vivir 34 años en Madrid, donde se había instalado a los 4 años de casado. Deducir el año del nacimiento y la edad a la que se casó.
- Un caracol asciende cada día 5 metros por una pared, y durante la noche su propio peso le hace descender 2 m. Al cabo de 3 días. ¿habrá llegado a una maceta colocada en una ventana a una altura de 10 m. respecto del suelo?
- (Obsérvese que no se trata de una simple multiplicación por 3, por la índole especial del problema).
- Un hortelano lleva manzanas; encuentra tres guardas; da al primero la mitad de las manzanas mas 2; al segundo, la mitad de las que le quedan mas 2, y al tercero, la mitad de las sobrantes mas 2. Se queda con una manzana. ¿Cuántas llevaba? (Este problema es de origen árabe y se encontró en una aritmética del siglo XII, se resuelve fácilmente por retroceso).
- Hemos hecho 12 jugadas. Cada vez que ganaste te di 2 pesetas, cada vez que perdiste me diste 3. Terminé ganado 21 pesetas. ¿Cuántas jugadas perdí y cuántas gané?
- (Razónese así: Si las hubiera ganado todas tendría 36 pesetas; por cada jugada perdida tengo 5 pesetas menos).
- Piensa un número. Dóblalo y añade al resultado 14. Toma la mitad de lo que obtengas y resta de esa mitad el número pensado. Resulta invariablemente 7. ¿Por qué?
- Una sala tiene 7 m. de largo, 52 dm. De ancho y 325 cm. de alto. Calcular el área del suelo en dm^2 y el volumen en cm^3 .
- En el comercio de ciertas maderas se emplean unidades inglesas: pies y pulgadas (1 pie = 12 pulgadas). De una tabla de 15 pies y 8 pulgadas se corta otra de 6 pies y 11 pulgadas, ¿cuál es la longitud de la tabla restante?
- Un reloj adelante 2 m. y 28 s. cada hora; ajustado hoy a mediodía, ¿qué hora marcará pasado mañana a las 9?
- Un buey atado a un árbol con una cuerda de 10 m. de longitud tarda diez días en consumir la hierba que está a su alcance. ¿ Cuántos días tardará si se alarga la cuerda 2 m.?

2º ciclo de ESO:

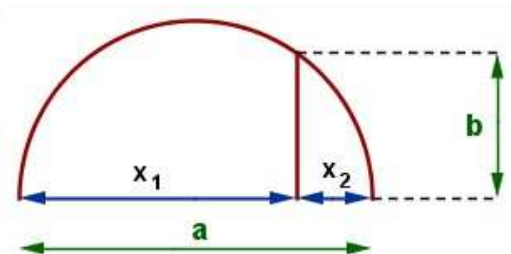
- Un señor promete a su criado 10 monedas y una capa al año. Después de siete meses le despide, correspondiéndole 2 monedas y la capa; ¿cuántas monedas vale ésta? (Problema aritmético del siglo XVI – Clavius)

El rostro humano de las matemáticas

- Calcular a qué hora del martes la fracción de día transcurrido es igual a la fracción de semana transcurrida. (Se supone la semana empezando en lunes.)
- Con un bote de pintura se ha pintado 3,5 m. de valla de 2 m. de alto. ¿Qué longitud se podrá pintar con el mismo bote de una valla de 1,75 de alto?
- Si la longitud del trozo adoquinado por 12 obreros en 15 días es 200 metros, ¿cuánto tardarán 18 obreros en adoquinar toda la calle, cuya longitud es 850 metros?
- Demostrar que todo cuadrilátero en el que las diagonales se dividen en partes iguales es paralelogramo.
- Probar que en todo cuadrilátero convexo el perímetro es mayor que la suma de las diagonales y menor que el doble de esta suma.
- Si por los vértices de un triángulo trazamos la paralela al lado opuesto se forma otro triángulo. Demostrar que los lados de éste son dobles que los del dado.
- Demostrar que la mediana de un triángulo rectángulo correspondiente a la hipotenusa es igual a la mitad de esta. (*Es posible enunciarlo diciendo que la mediana correspondiente a la hipotenusa de un triángulo rectángulo divide a éste en dos triángulos isósceles*)
- Hallar el lugar geométrico de los puntos medio de los segmentos determinados por un punto fijo y cada punto de una recta.
- Un tejado tiene 17 hileras de tejas; en la más alta tiene 40 tejas; en la más baja, 360 tejas. Calcular el número de tejas del tejado.
- Desde un cierto punto del suelo se ve un árbol bajo ángulo de 42° . ¿Bajo qué ángulo se verá colocándose a distancia doble? ¿Bajo qué ángulo a distancia triple?
- El plano de una casa es un rectángulo de 10×12 m., la pendiente del tejado es de 32° . Calcular la superficie del tejado.

Bachillerato:

- Para resolver la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$ de forma geométrica, se puede dibujar un segmento de medida "a". Se dibuja la semicircunferencia que pasa por los extremos de ese segmento y tiene su centro en el punto medio. Se traza desde la circunferencia un segmento perpendicular al inicial con una media igual a "b". Ese segmento divide al segmento original en dos partes que son las soluciones de la ecuación. Demuestra que efectivamente x_1 y x_2 verifican la ecuación $x^2 - ax + b^2 = 0$.
- Se sabe que la relación entre la potencia P y la resistencia R de una cierta máquina es de la forma $P = a \cdot R + b$ (es decir, lineal), pero se desconocen los coeficientes. Experimentalmente se ha determinado que a una resistencia $R = 20$ kg, corresponde



El rostro humano de las matemáticas

una potencia $P=7$ kg., y que a $R=80$ corresponde $P=14,2$. Determinar los coeficientes y representar gráficamente la función.

- Demostrar que los puntos medios de las bases de un trapecio, el punto de intersección de los lados no paralelos y el de intersección de las diagonales están alineados.
- Demostrar que la suma de las distancias de un punto cualquiera interior a un triángulo equilátero a sus lados es constante e igual a la altura.
- Hallar el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de cuadrados de distancia a los cuatro vértices de un cuadrado es constante.
- Multiplicando los dos miembros de la desigualdad $1 < 2$ por $\log \frac{1}{2}$ resulta $\log \frac{1}{2} < 2 \cdot \log \frac{1}{2}$; o sea, $\log \frac{1}{2} < \left(\log \frac{1}{2}\right)^2$; de donde $\frac{1}{2} < \left(\frac{1}{2}\right)^2$; o sea, $\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$, lo que es falso. ¿Dónde está el error?
- El desnivel h en metros entre dos puntos viene dado aproximadamente por $h = 18400 \cdot \log \frac{p_1}{p_2}$ donde p_1 y p_2 son las presiones en los puntos inferior y superior, respectivamente. Calcular la altura de una montaña sobre el nivel del mar ($p_1=760$ mm) sabiendo que la presión en la cumbre es de $p_2=650$ mm.
- (Complemento al anterior: Hallar la función que da el desnivel, desde el nivel del mar, en función de la presión p_2 de otro punto. Representa dicha función)
- En un círculo de radio 1 se inscribe un cuadrado; en éste se inscribe un círculo; en este, otro cuadrado; y así sucesiva e indefinidamente. Calcular el límite de la suma de las áreas de todos los círculos. Ídem de todos los cuadrados.
- En virtud de una cláusula testamentaria, un heredero tiene que entregar a su hermana 16.000 pesetas al cabo de diez años. Desea saldar inmediatamente este compromiso. Calcular el valor actual del mismo al 4,5 %.
- Una ciudad que en 1925 tenía 120.000 habitantes, tiene en 1941 180.000. ¿Qué tanto por ciento de aumento anual ha experimentado?
- Un comerciante quiere dotar a su hijo, que acaba de nacer, de un capital de 50.000 pesetas cuando llegue dicho hijo a los 25 años. ¿Qué anualidad debe colocar al 6%?
- De un bosque que contiene hoy medio millón de m^3 de madera se talan anualmente $15.000 m^3$. Calcular el volumen de madera del bosque al cabo de diez años, suponiendo que crece en un 2,5% anual.
- La fórmula de Herón permite calcular el área de un triángulo a partir de las medidas de los lados. Dicha fórmula dice que si a , b y c son las medidas de los lados y p es el semiperímetro $(p = \frac{a+b+c}{2})$, el área del triángulo es $A = \sqrt{p \cdot (p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)}$. Las medidas de los tres lados de un triángulo valen

5,2 ; 5,8 y 4,25 cm respectivamente. Halla su área.

- Existen también las fórmulas de Briggs que permiten calcular los ángulos de un triángulo en función de las medidas de sus lados. Son las siguientes.

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-a)}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-c)}{p \cdot (p-b)}} \quad ; \quad \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(p-a) \cdot (p-b)}{p \cdot (p-c)}}$$

- Utilízalas para hallar los ángulos del triángulo anterior.
- Utiliza ahora el Teorema de los Cosenos para hallar los ángulos del triángulo anterior y compáralo con lo obtenido por el método de Briggs.