# A ojo de buen cubero

**por**

**Fernando Etayo Gordejuela, Universidad de Cantabria**

*Scientia sine arte nihil est; ars sine scientia nihil est.*
(Jean Vignot, 1392)

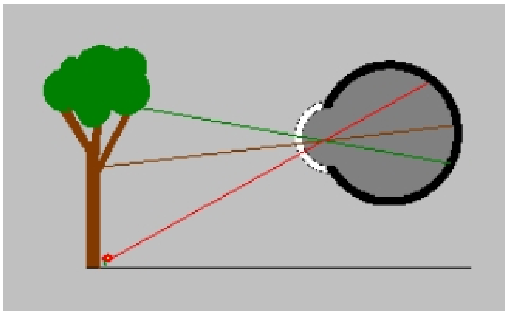
## 1. Introducción

¿Cómo funcionan unas gafas de visión 3D?
¿Qué diferencias hay entre ver con un ojo o ver con dos?
¿Calculamos bien distancias, a simple vista?
¿Podemos saber desde dónde se ha pintado un cuadro?
¿Podemos conocer el volumen de un objeto a partir de fotografías?
¿Por qué reconocemos que un cuadro tiene bien hecha la perspectiva?

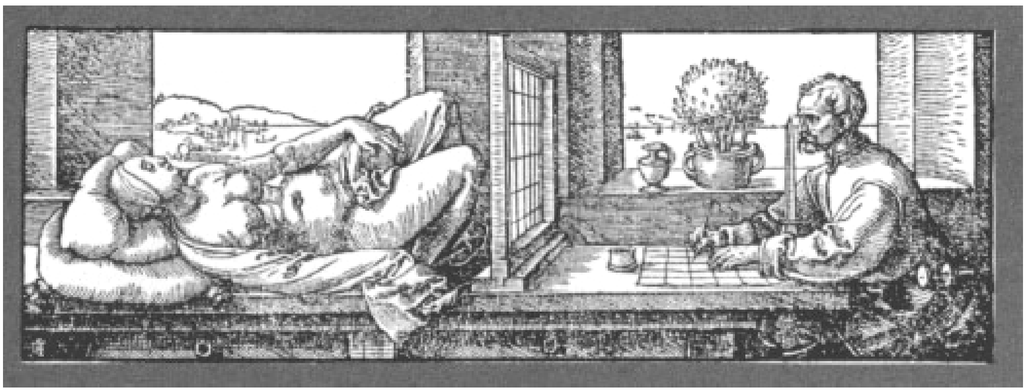
En esta exposición vamos a tratar de responder estas preguntas y otras similares, presentando muy brevemente los modelos matemáticos subyacentes a la visión. Nos centraremos en la comparación entre la visión con un sólo ojo (o un único punto de vista) y la visión con dos ojos (o dos puntos de vista). A la primera la llamaremos visión ciclópea y a la segunda estereoscópica. Como mostraremos existe un tipo de modelización matemática para cada tipo de visión: la geometría proyectiva en el primer caso, la epipolar en el segundo. A la visión ciclópea corresponden, además de nuestra propia visión con un solo ojo, la pintura y la fotografía. A la estereoscópica, además de nuestra visión binocular, la visión con gafas 3D, la fotogrametría y la reconstrucción de imágenes por ordenador.

Vamos pues a curiosear lo que hay en un cuadro, saliéndonos de él, como el muchacho de la pintura (Pere Borrell del Caso (1835–1910): *"Escapando de la crítica"*).

## 2. Cómo vemos: con un ojo. Visión ciclópea



En cualquier libro elemental de época escolar podemos encontrar una ilustración como la de la izquierda. Es la explicación de cómo funciona la visión: el mundo que nos rodea tiene tres dimensiones y nosotros lo vemos sobre nuestra retina, que tiene dos dimensiones. Cada punto del exterior determina un punto en nuestra retina: el obtenido como intersección de la recta que pasa por el punto exterior y nuestra pupila con la retina. Es decir, tenemos una aplicación matemática del espacio tridimensional en el espacio bidimensional de nuestra retina. No hace falta tener una predisposición matemática muy elevada para que nos preguntemos qué tipo de aplicación es, que propiedades conserva y cuáles no. El ojo humano es una cámara oscura, por lo que todo lo que digamos es igualmente aplicable a la fotografía.[1]



[1]Realmente tanto en el caso el ojo humano como en el de la fotografía interviene otro fenómeno que es el de la curvatura de las lentes, pero en esta exposición vamos a considerar sólo efectos lineales, es decir, como si no hubiera lente. En el mundo de la fotografía recibe el nombre de fotografía estenopeica o *pinhole*.

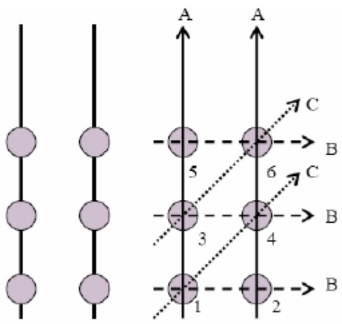
De hecho es el mismo problema que se ha planteado la Humanidad al tratar de representar mediante la pintura fielmente los objetos situados en el espacio. Podemos imaginar que el pintor sitúa su lienzo entre su ojo y la naturaleza que representa y que este lienzo es transparente, como en la famosa anterior ilustración de Durero.

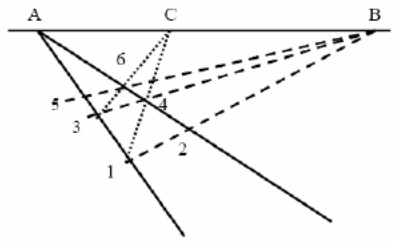
La aplicación matemática es la misma. Pasa del espacio de tres dimensiones al de dos. ¿Qué propiedades tiene?

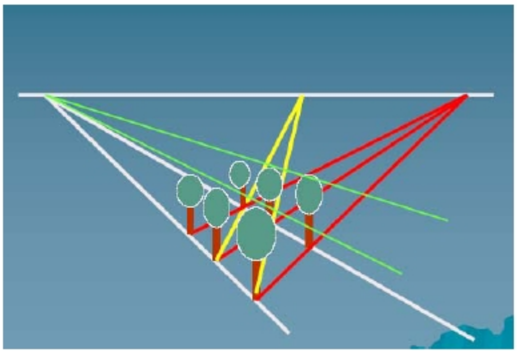
Desde luego, conserva las alineaciones, esto es, lleva rectas en rectas, pero bien claro es que no conserva el paralelismo, ni las distancias ni los ángulos. Desde un punto de vista matemático podemos decir que no es una aplicación *afín* y mucho menos una aplicación *conforme* o *métrica*. Para verificar lo anterior basta considerar una fotografía cualquiera.

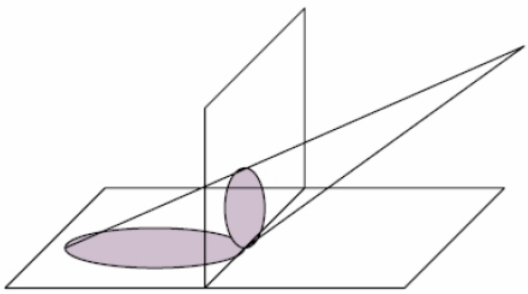
En la foto vemos paralelas que no se ven como tales (las de la barandilla derecha), ángulos que no se conservan (los travesaños verticales y horizontales de la barandilla son perpendiculares en la realidad y varían de ángulo en la foto) y, por último, tampoco se conservan distancias, porque vemos objetos de distinto tamaño cuando en realidad tienen el mismo (los escalones del principio y los del final). Vamos, que lo único seguro es que esos niños son mis hijos que están ante el Santuario de Begoña, de Bilbao.

Todo esto resulta muy desalentador, porque parece que nuestra visión es muy azarosa y muy difícil de definir en términos de leyes matemáticas. Pero hay algo que todos tenemos claro, y es la noción de si un dibujo está bien hecho en perspectiva o no. Para entender las leyes de nuestra visión (las que denominamos coloquialmente leyes de la perspectiva) pensemos en la siguiente situación: un pintor quiere plasmar en un cuadro una carretera flanqueada de árboles, situados los de una orilla enfrente de los de la otra, y a igual distancia. En la siguiente ilustración se recogen el plano y el cuadro realizado. Las líneas paralelas las vemos fugar (unirse) en el horizonte del cuadro.





Otro ejemplo que podemos considerar es el siguiente: cuando observamos el firmamento, para lo que tener uno o dos ojos es indiferente, podemos saber la dirección de las estrellas, pero no la distancia a que se encuentran.

Un fenómeno similar se da en la llamada anamorfosis de perspectiva: si pintamos una figura en el suelo puede hacernos el mismo efecto que si la tuviéramos levantada en un plano perpendicular.

De hecho, elegir desde qué punto ver una ilustración puede darnos imágenes insospechadas de ella. Así por ejemplo, en el cuadro *"Los embajadores"* de Holbein, pintado en 1533, existe una extrañan figura oblicua a los pies de ambas personas.

Si miramos el cuadro agachados debajo de la esquina izquierda (ilustración superior, derecha) descubrimos que esa extraña figura es:

Hoy día las pinturas en el suelo de Julian Beever también utilizan el mismo efecto: la siguiente pintura


se convierte, mirándola desde el punto adecuado, en

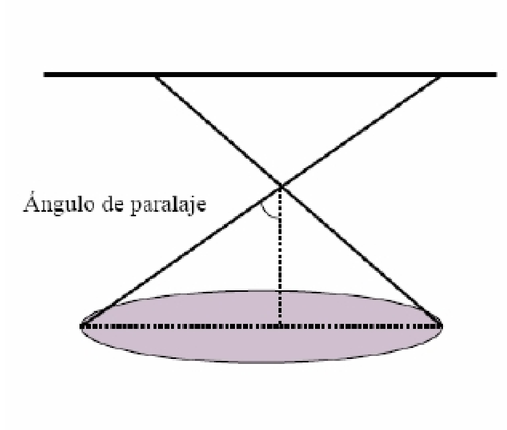

También así se han podido realizar muchos trucos cinematográficos, aprovechando que nuestra vista no sabe calcular distancias ni tamaños (por ejemplo, los del recientemente fallecido especialista español Emilio Ruiz del Río). Así la nave que parte del Perú en la película *"El Puente de San Luis Rey"* (basada en la célebre novela homónima de Thornton Wilder)

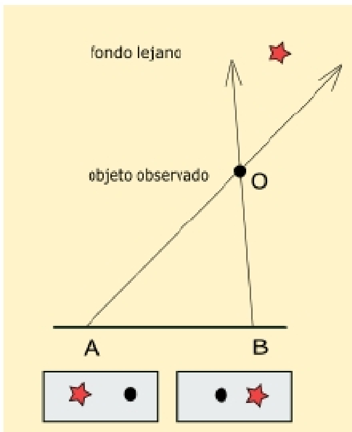
no es sino una maqueta de navío navegando por un estanque, cuyas aguas se confunden con las verdaderas del mar:

## 3. Cómo vemos: con dos ojos. Visión estereoscópica

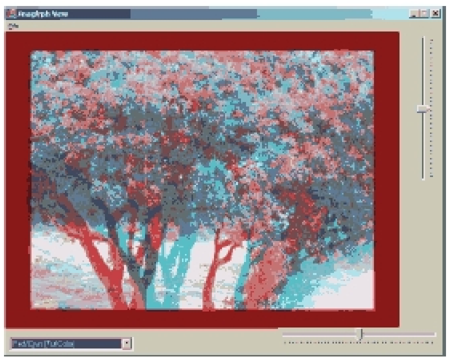
La visión con dos ojos o estereoscópica permite medir profundidades si el objeto de nuestra atención está suficientemente cerca. Porque cada uno de los ojos toma una imagen del objeto y nuestro cerebro las procesa, obteniendo una única imagen a partir de las dos. Este es un fenómeno muy importante y que incita a buscar una respuesta matemática: cada ojo, por separado, no sabe medir distancias, profundidades, y, sin embargo, cuando actúan de modo conjunto, sí miden distancias. ¿Por qué?

Este fenómeno es bien conocido en Astronomía: cuando se observa la posición de una estrella cercana en un momento dado y seis meses más tarde, esto es, cuando la Tierra ha recorrido la mitad de su órbita alrededor del Sol, la posición de la estrella ha variado. Se llama ángulo de paralaje anual a la mitad del ángulo que forman las dos trayectorias de la estrella.




Conociendo el ángulo de paralaje, y la distancia de la Tierra al Sol, podemos saber la distancia a la que está situada la estrella cercana.



Un fenómeno parecido es el de los anaglifos: Son imágenes que provocan una sensación de efecto tridimensional. Requieren, para verse, el empleo de las gafas 3D. La idea es casi superponer dos imágenes, pero de modo que cada ojo vea sólo una de ellas. Para ello se tinta cada imagen en rojo o en azul y usando las gafas (en las que cada lente tiene filtro de un color) cada ojo ve sólo una imagen. Entonces se tiene sensación de visión binocular (cada ojo percibe dos imágenes un poco desplazadas entre sí).

En resumen, tenemos las siguientes propiedades y problemas planteados.

- La visión ciclópea permite pasar de 3D a 2D.
- La visión estereoscópica permite medir profundidades, reconstruir, es decir, pasar de 2D a 3D a partir de dos imágenes.
- Problema 1: ¿qué tipo de aplicación es la que pasa de 3D a 2D en visión ciclópea?
- Problema 2: ¿por qué a partir de dos imágenes planas podemos reconstruir imágenes 3D?

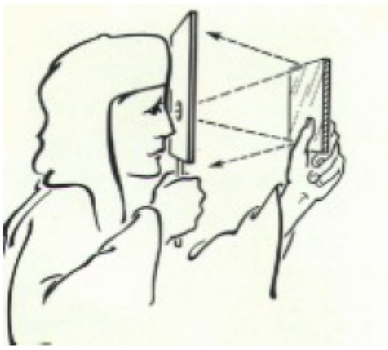
Y la naturaleza conoce esta situación: Los animales depredadores tienen visión binocular, para poder medir distancias. Las potenciales presas buscan tener el mayor campo visual posible: un ojo a cada lado.

## 4. La perspectiva en el Arte

El problema de "representar fielmente" la realidad en una pintura es anterior al de la obtención del modelo matemático subyacente. Abreviando los antecedentes más o menos experimentales (por ejemplo Giotto, 1267–1337, ya realiza fugas, aunque le falta consistencia) se puede decir que Alberti (1404–1472) en su tratado sobre la Pintura de 1435 formula las preguntas precisas:

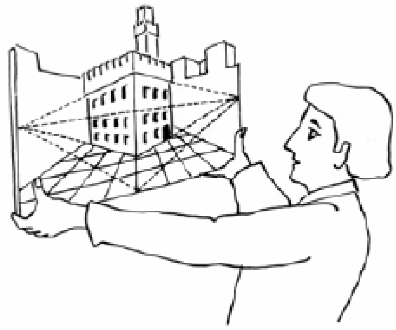
- *¿Qué se conserva por proyección, si no lo hacen ni la longitud ni los ángulos?*
- *¿Qué relación hay entre dos secciones de la misma figura?*
- *¿Cuáles son las propiedades comunes a dos secciones cualesquiera?*

Estas preguntas son de naturaleza plenamente matemática, y tenían una motivación real muy clara. Poco tiempo después, Bruneleschi (1377–1446) enuncia los llamados "experimentos" que dan apoyo teórico a lo que se estaba consiguiendo ya dibujar con corrección. El primer experimento se pregunta cómo se puede saber si un cuadro tiene buena perspectiva. La respuesta es si lo retratado en el cuadro se puede prolongar fuera de éste coincidiendo con lo que se ve en la realidad (la manera de exponerlo era más complejo, usando un espejo).



Una idea parecida se puede ver en varios cuadros de Magritte (1898–1967), en los que aparece una pintura y su prolongación en la realidad circundante fuera de la pintura.

El segundo experimento trata sobre cómo se puede representar a la vez dos fachadas del palacio de la señoría de Florencia. La respuesta es que fugando a dos puntos, que determinan la línea del horizonte (o del infinito, diremos luego) del cuadro.

Leonardo da Vinci (1452–1519) amplía la variedad de recursos para dar profundidad a un cuadro, al introducir la denominada perspectiva aérea, mediante las siguientes técnicas: "Sfumatto", esto es, desvanecimiento del detalle; colores en el fondo azulados, semejantes a los de la atmósfera: y disminución del volumen de los objetos del fondo. Pero con ello trascendemos de nuestra búsqueda de la geometría que liga los objetos del espacio tridimensional con su proyección sobre un plano.

La línea del horizonte de un cuadro marca la altura de los ojos del pintor. Podemos encontrarla hallando los puntos de intersección de paralelas horizontales. En los cuadros con el horizonte alto, el pintor y, por tanto, el espectador se encuentran muy encima de la escena, y, en el suelo del primer término, da la impresión que pueden verse los propios pies. Las formas están muy jerarquizadas e individualizadas por sus diferentes tamaños, intuyéndose el espacio entre ellas. Es utilizado por los pintores flamencos del XVI: por ejemplo, en muchas pinturas de Bruegel (1525–1569).

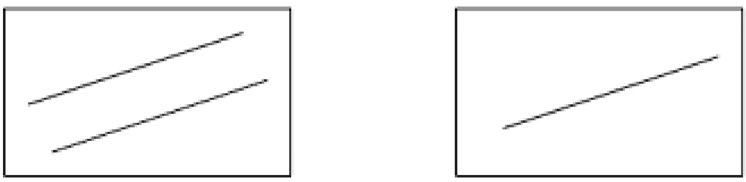
En los cuadros con horizonte bajo predominan las horizontales. Las formas y las figuras están comprimidas, dando la impresión de poco espacio entre ellas. Es utilizado por los pintores italianos del XVI y XVII: por ejemplo, Tintoretto (1518–1594) y con posterioridad Canaleto (1697–1768), pero ya lo había sido antes, con Piero della Francesca (1420–1492) o Mantenga (1431–1506).

## 5. Explicación matemática de la visión ciclópea: Geometría Proyectiva

El espacio proyectivo se obtiene añadiendo al espacio afín (de puntos ordinarios) los puntos del infinito (los puntos impropios), que forman un hiperplano. Así el plano proyectivo es la unión del plano afín y la recta del infinito (donde se "cortan las paralelas"). La recta proyectiva es la recta afín con el punto del infinito. Y el espacio proyectivo tridimensional se obtiene añadiendo al afín el plano de infinito.

Esta definición del espacio proyectivo a partir del afín tiene un inconveniente: la distinta naturaleza aparente de los puntos ordinarios y de los del infinito. Sin embargo, esa diferencia es aparente y no real, como se pone de manifiesto con la siguiente construcción, que por sencillez realizamos para dimensión dos:

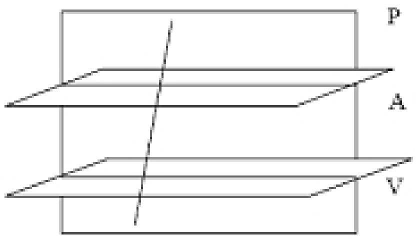
1. Un plano afín tiene asociado siempre un espacio vectorial (dos puntos determinan el vector que los une). A cada recta afín se le asocia su dirección, que es una recta vectorial. Dos rectas afines son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección.



Plano afín A con dos rectas paralelas – Plano vectorial V de dirección

2. El plano afín y su plano vectorial asociado se pueden sumergir en un espacio vectorial $E$ de dimensión tres (el plano vectorial como subespacio vectorial).

E



3. Cada recta vectorial del espacio ambiente $E$ corta al plano afín $A$ en un único punto o está contenida en $V$. Se llama punto proyectivo a cada recta vectorial de $E$. Las rectas contenidas en el plano vectorial $V$ se denominan puntos del infinito.

4. Un subespacio proyectivo de dimensión $k$ es el conjunto de rectas vectoriales de un subespacio vectorial de dimensión $k + 1$. En particular, las rectas contenidas en un plano P forman una recta proyectiva, que tiene como puntos afines los de $P \cap A$ y como punto del infinito $P \cap V$. Cada recta afín con su punto del infinito (que es su dirección) define una recta proyectiva. Dos rectas afines son paralelas si y sólo si tienen la misma dirección, esto es, el mismo punto del infinito.

Este modelo del espacio proyectivo no es tan extraño a la intuición como pudiera parecer. De hecho, cuando observamos la bóveda celeste, por cada dirección vemos sólo un punto, ocupado o no por una estrella, de la que, en todo caso, nos resulta imposible saber la distancia a la que está. La gran ventaja que tiene el modelo es que se pueden utilizar todas las propiedades del Álgebra Lineal. En particular, para dar coordenadas se pueden utilizar las llamadas coordenadas homogéneas: un punto proyectivo es una recta vectorial de un espacio vectorial de una dimensión mayor, o, lo que es lo mismo, una clase de equivalencia de vectores respecto de la relación siguiente: dos vectores no nulos son equivalentes si y sólo si son proporcionales (esto es, si definen la misma recta vectorial). Por tanto, las coordenadas de un punto proyectivo son las de uno cualquiera de los vectores que lo genera. Así en un plano proyectivo un punto tendrá tres coordenadas $(a : b : c)$ homogéneas, esto es, $(a : b : c) = (\lambda a : \lambda b : \lambda c)$ cualquiera que sea la constante $\lambda$ no nula.

Desde el punto de vista de la Geometría y la Topología superiores el espacio proyectivo es muy rico en propiedades: el espacio proyectivo real es una variedad diferenciable, compacta, conexa, orientable si es de dimensión impar y no orientable si es de dimensión par. Tiene curvatura seccional constante y a la esfera como su recubridor universal de dos hojas. El espacio proyectivo complejo es una variedad de Kähler de curvatura holomórfica constante. La recta proyectiva compleja se identifica con la esfera de Riemann y las transformaciones de Möbius son homografías. Se define el fibrado principal de variedad total $\mathbb{S}^{2n+1}$ sobre $P_n(\mathbb{C})$ de fibra la circunferencia.

Pero sigamos con lo que concierne a la representación visual. La visión ciclópea es una aplicación proyectiva, llamada proyección cónica (no es aplicación afín ni vectorial), y, por tanto, las propiedades que conserva son las que conservan las aplicaciones proyectivas. En particular, la alineación de puntos y las razones dobles.

Existe otra propiedad muy importante en Geometría Proyectiva: la Geometría Proyectiva comprende a la Afín, ésta a la Conforme y ésta a la Euclídea. Esta cadena de contenidos se conoce como **Estratificación de las Geometrías**. En la tabla de la página siguiente describimos la situación, en que cada geometría está comprendida en la inferior.

Esta relación de contenidos fue establecida en el siglo XIX, junto con más propiedades. Por ejemplo, Laguerre estableció en 1853 la fórmula que lleva su nombre y que permite hallar el ángulo de dos rectas como $1/2i$ veces el logaritmo neperiano de la razón doble de sus puntos del infinito y de los cíclicos (estos puntos forman la cónica del absoluto, están en el infinito del plano proyectivo complejo y cualquier circunferencia pasa por ellos). Este tipo de relaciones tiene un gran valor estético, porque permite reconstruir propiedades de las Geometrías Afín y Métrica a partir de las de la Proyectiva. Pero, he aquí lo sorprendente de nuestra historia, son también propiedades esenciales para la reconstrucción de imágenes por ordenador, dando una vez más ejemplo de cómo los conocimientos teóricos pueden resultar fundamentales para aplicaciones imposibles de soñar en la época en que se formularon.

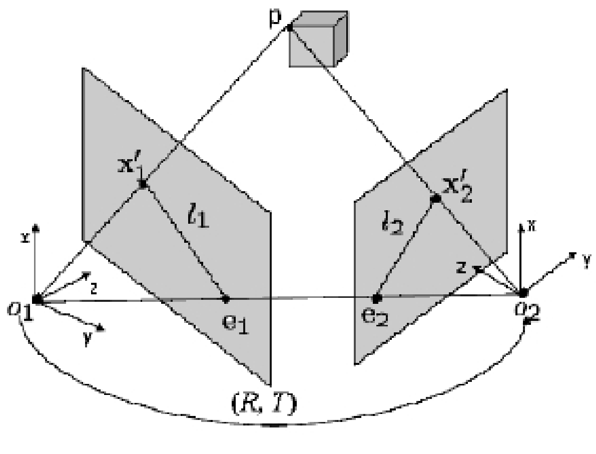
| **Geometría** | **Aplicaciones propias** | **Propiedades (invariantes de la geometría)** | **Objetos preservados** |
|---|---|---|---|
| Euclídea | Movimientos = rotaciones + traslaciones | Distancias | |
| Métrica o conforme | Semejanzas = movimientos + homotecias | Ángulos | Las aplicaciones conformes son aplicaciones proyectivas que preservan la cuádrica del absoluto |
| Afín | Aplicaciones afines | Paralelismo, razón simple, baricentros | Las aplicaciones afines son aplicaciones proyectivas que preservan el hiperplano del infinito |
| Proyectiva | Aplicaciones proyectivas | Razón doble | |

## 6. Explicación matemática de la visión estereoscópica: Geometría Epipolar

La fotogrametría, que comenzó a mediados del siglo XIX, y la visión por computador, de segunda mitad del XX, tienen un planteamiento común entre sí y común con nuestra visión binocular: a partir de dos imágenes diferentes de un mismo objeto ser capaces de reconstruir las verdaderas proporciones del objeto. Una imagen se obtiene realizando una proyección cónica, que es una aplicación proyectiva y, por tal, conserva alineaciones y razones dobles, pero no razones simples, ni ángulos, ni distancias. ¿Cómo, pues, a partir de dos imágenes se va a poder reconstruir las proporciones de un objeto, esto es, los ángulos y el tamaño relativo de sus lados? Conocer el tamaño absoluto no es sino fijar una unidad de medida (o dar un testigo en la imagen, como se hace en las fotos de excavaciones arqueológicas).

La parte de la Geometría Proyectiva que estudia esta cuestión es la llamada Geometría Epipolar. La disposición que tenemos es la siguiente: supongamos que tomamos dos fotos de un mismo objeto. Cada punto $p$ del objeto tendrá dos imágenes, una en cada foto.

- Los puntos $O_1$ y $O_2$ son los centros de las cámaras.
- Los puntos $x'_1$ y $x'_2$ son las proyecciones del punto $p$ sobre los planos imágenes.
- Los puntos $e_1$ y $e_2$ son los epipolos: dónde ve cada cámara a la otra.
- El plano determinado por $O_1$, $O_2$ y $p$ se llama epipolar.
- Las rectas $l_1$ y $l_2$ son las rectas epipolares, que se definen como la intersección del plano epipolar con los planos imágenes. Pasan por los epipolos.




Si supiéramos la matriz del movimiento $(R, T)$, rotación y traslación, que lleva una cámara en la otra, podríamos determinar las verdaderas proporciones del objeto. Pero la situación que tenemos es otra: conocemos las dos imágenes de cada punto de nuestro objeto. Calculemos la matriz de la aplicación que hace corresponder a cada punto del primer plano imagen la línea correspondiente del segundo, esto es, en nuestro caso, al punto $x'_1$ le hace corresponder la línea $l_2$. Esta aplicación es una correlación proyectiva degenerada. Su matriz $F$ se llama matriz fundamental (esencial cuando las cámaras están calibradas, esto es, cuando se conocen su parámetros internos) y verifica la restricción epipolar: $(x_1')^t F x_2' = 0$, donde $x_1'$ y $x_2'$ denotan las coordenadas en columna de los puntos $x_1'$ y $x_2'$, y $t$ la matriz transpuesta. Esta condición se deriva de que la recta epipolar $l_2$ pasa por el punto $x_2'$.

Hacen falta conocer ocho puntos, porque lo que se quiere obtener es la matriz fundamental, que es una matriz homogénea 3 por 3 (es una correlación proyectiva). Por tanto, se trata de poner un sistema con ocho ecuaciones del tipo $(x_1')^t F x_2' = 0$. Este procedimiento se denomina algoritmo de los ocho puntos. Así que hacen falta conocer al menos las imágenes de ocho puntos en ambas fotos. Hay que emparejar puntos de una y otra imagen. Esto se hacía al principio de la fotogrametría por medios mecánicos y después por procedimientos informáticos de *matching*.

El resultado importante es que conociendo la matriz fundamental podemos calcular las matrices del movimiento que lleva una cámara en otra, $R$ y $T$. De hecho, existen sólo cuatro posibles pares de matrices $(R, T)$ que den lugar a la misma matriz fundamental, pero sólo en un caso los puntos tendrán todos profundidad positiva respecto de ambas cámaras (esto es, se verán sus imágenes realmente, no quedarán los puntos del objeto detrás de la cámara). Este resultado había sido anticipado por el Teorema de Kruppa (1913), que establece que dadas las imágenes de cinco puntos (en posición general) mediante dos proyecciones cónicas, existen como mucho once posiciones posibles para los centros de las proyecciones.

Las cámaras se dicen calibradas si se conocen sus parámetros internos (como la distancia focal). La reconstrucción de imágenes tiene las siguientes propiedades:

1. Con cámaras sin calibrar sólo se puede hacer reconstrucción proyectiva.

2. Con cámaras calibradas se puede hacer reconstrucción euclídea.

3. Dar la calibración de las cámaras equivale a determinar el plano del infinito y la cónica del absoluto.

4. Con cámaras sin calibrar, si conocemos la cónica del absoluto (y el plano del infinito) podemos hacer reconstrucción euclídea (y calibrar las cámaras).

5. Si conocemos el tipo de movimiento (por ejemplo, que sea traslación), podemos determinar fácilmente la cónica del absoluto.

En el caso general en que las cámaras no estén calibradas, para obtener la reconstrucción euclídea hay que determinar el hiperplano del infinito (lo que da la reconstrucción afín) y la cónica del absoluto (que permite la reconstrucción conforme) de acuerdo con la estratificación de las geometrías establecida en el siglo XIX y comentada en la sección anterior.

En esta historia no debemos olvidar al coronel de ingenieros francés Aimé Laussedat, quien, en 1858, empieza a dibujar mapas cartográficos a partir de vistas, manuales primero, fotográficas después, dando origen a la fotogrametría. En 1863 la Real Academia de Ciencias de Madrid convocaba un concurso para: "Determinar los errores probables que deben resultar en los planos topográficos deducidos de dos perspectivas fotográficas, teniendo en cuenta todas las causadas que pueden influir en su producción". Ganó Laussedat con la memoria *"Sobre la aplicación de la fotografía al levantamiento de planos"*.

## 7. Algunas conclusiones

♠ Arte, ingeniería y ciencias puras y aplicadas están indisolublemente engarzados. Ideas básicas son empleadas en disciplinas diferentes. En el caso presente son:

- La proyección cónica (de una vista).
- La visión estéreo, o de dos vistas, geometría epipolar y paralaje.

♠ Las Matemáticas avanzan

- De la realidad a la matematización (p. ej., la Geometría proyectiva).
- De la Matemática a la realidad (p. ej., las Geometrías no euclídeas).

♠ Muchas veces las Matemáticas más puras se acaban aplicando al cabo del tiempo (p. ej., la estratificación de las geometrías).

## Agradecimiento

El autor quiere aprovechar la ocasión para expresar públicamente su agradecimiento a Marta y Raúl por la organización del ciclo, por su constancia en el desarrollo de tantas y tantas actividades de divulgación y atención a alumnos, cuya importancia suele ser inversamente proporcional al reconocimiento oficial que reciben, y por su gran amabilidad y acogida.

## Bibliografía


### Generales:

**[1]** J. Lowell Coolidge: *A History of Geometrical Methods*, Dover, New York, 2003.
**[2]** H. Damisch: *El origen de la perspectiva*, Alianza, Madrid, 1997.
**[3]** W. M. Ivins, Jr.: *Art and Geometry. A study in space intuitions*, Dover, New York, 1964.
**[4]** M. Kemp: *La ciencia del arte. La óptica en el arte occidental de Brunelleschi a Seurat*, Akal, Madrid, 2000.
**[5]** D. Pedoe: *La Geometría del Arte*, Gustavo Gili, Barcelona, 1979.
**[6]** L. da Vinci: *Tratado de la Pintura*, Akal, Madrid, 2007.
**[7]** H. Wölfflin: *Conceptos fundamentales de la Historia del Arte*, Optima, Barcelona, 2002.
**[8]** S. Woodford: *Cómo mirar un cuadro*, Gustavo Gili, Barcelona, 2004.

### De visión por computador:

**[9]** R. I. Hartley, A. Zisserman: *Multiple View Geometry in Computer Vision*, Cambridge University Press, 2004.
**[10]** Y. Ma, S. Soatto, J. Kosecká, S. Shankar Sastry: *An Invitation to 3-D Vision*, Springer, New York, 2004.
**[11]** I. Herman: *The Use of Projective Geometry in Computer Graphics*, Springer, Berlín, 1992.

### En la web:

**[12]** D. Mery, Asignatura: *"Visión por Computador"*, Universidad Católica de Chile (2004). `http://www2.ing.puc.cl/~dmery/vision/visionc.pdf`. Pretende resumir el curso de la asignatura de Visión por computador de la ingeniería de informática de la universidad de Chile.



**Fernando Etayo Gordejuela**
Universidad de Cantabria
Departamento de Matemáticas y Computación
Facultad de Ciencias
Avda. de los Castros s/n, 39005 Santander
e-mail: `etayof@unican.es`