

De las Trisectrices, la Cicloide y otras Curvas

por

Luis Carlos de Andrés, Universidad del País Vasco

Al preparar el contenido de esta charla y ver qué curvas iban a estar incluídas, me llamó la atención el hecho de que en muchos de los lugares de consulta aparece repetida una frase del estilo de “*curva ... estudiada por ..., para la resolución del problema ...*”, pero en casi ninguno se dice cómo se utiliza la tal curva para resolver el problema considerado. Esta frase indica que el estudio de las curvas no es un mero ejercicio de dibujo de las curvas por sí mismas, sino el de su relación con la resolución de ciertos problemas bien sean matemáticos, físicos o de ingeniería.

A partir de la definición, con un conjunto elemental de dibujo (regla, compás y escuadra) se puede obtener una gran cantidad de puntos, aunque no todos, de una curva y dibujar su forma aproximada; desde la aparición del ordenador es muy fácil obtener un dibujo de las curvas; naturalmente, una vez efectuado el trabajo previo de encontrar sus ecuaciones paramétricas, implícitas o polares y el aprendizaje del manejo de los recursos informáticos correspondientes.

Los dibujos que aparecen aquí están creados con Mathematica. También lo fueron las animaciones que se vieron en la charla pero como aquí no se pueden presentar, he sustituido algunas de ellas por diversas instantáneas del movimiento, por ejemplo las figuras 17, 30 y 42).

Otro punto a considerar es el de la elección de las curvas que se van a tratar, hay una gran cantidad de curvas “con nombre propio”, de las que he seleccionado unas cuantas y añadido algunas construcciones geométricas que ponen de manifiesto cómo aparecen en la resolución de problemas.

Las primeras curvas consideradas fueron, evidentemente, las rectas y las circunferencias. Con los instrumentos que permiten dibujarlas (regla no graduada y compás) en la antigüedad clásica se plantearon y resolvieron gran cantidad de problema geométricos, pero quedaron sin resolver (utilizando sólo los instrumentos anteriores) los tres problemas clásicos:

- Cuadratura del círculo: hallar un cuadrado con el mismo área que un círculo dado, o equivalentemente, hallar un segmento de recta con la misma longitud que una circunferencia dada.
- Duplicación del cubo: construir un cubo que tenga el doble volumen que uno dado, o equivalentemente hallar dos medias proporcionales entre dos segmentos dados.
- Trisección de un ángulo: dado un ángulo, hallar el ángulo que es su tercera parte.

A pesar de que se ha demostrado que estos tres problemas no son resolubles según el método clásico de utilizar sólo regla no graduada y compás, no es raro que cada poco aparezcan, ahora en Internet, “cuadradores”, “duplicadores” o “trisectores” aficionados. La mayoría de las veces los errores en sus construcciones son evidentes pero otras, las construcciones son tan enrevesadas que no es fácil encontrar dónde está el error.

Trisectrices

El tercer problema mencionado anteriormente es de una naturaleza distinta a la de los dos primeros en el sentido de que ningún círculo se puede cuadrar, ningún cubo se puede duplicar, pero sí que hay determinados ángulos que se pueden trisecar: son muy conocidas las determinaciones de la tercera parte de un ángulo llano o la tercera parte de un ángulo recto.

A continuación veremos algunas de las curvas que se han estudiado en relación con la resolución de este problema, por lo que reciben el nombre genérico de *trisectrices*.

Cuadratriz de Hipías

Históricamente (siglo V a.C.), ésta es la primera curva (es de suponer que en un

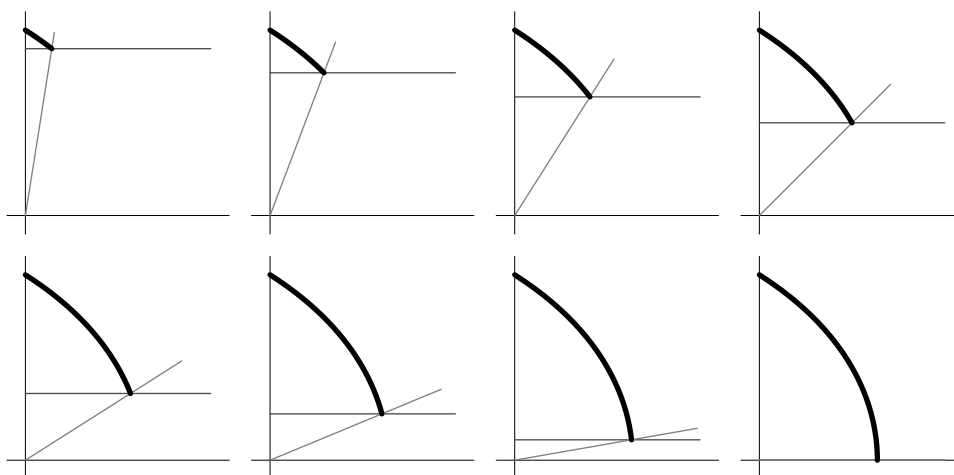


Figura 17 *Distintas fases de la construcción de la Cuadratriz de Hipías*

principio se llamaría *trisectriz de Hipías*), distinta de las rectas y circunferencias, que aparece, incluso antes que las cónicas. Esta curva está definida mecánicamente como el lugar de intersección de dos rectas: una horizontal que se mueve a velocidad constante en dirección vertical y otra que gira con velocidad angular constante, de forma que en el instante inicial ambas rectas son perpendiculares y en el instante final coinciden.

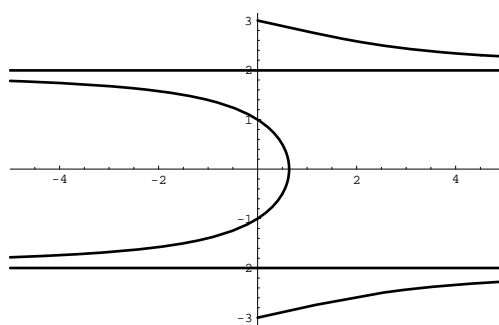


Figura 18 *Cuadratriz de Hipías*

Un pequeño cálculo permite hallar las ecuaciones paramétricas de la cuadratriz

de Hipías:

$$x(t) = (1 - t) \tan(\pi t/2), \quad y(t) = 1 - t, \quad t \in [0, 1]$$

y, si no imponemos restricciones a la variación del parámetro t , obtenemos la curva de la figura 18, en la que se ven unas rectas horizontales que son asíntotas de la curva correspondientes a los valores $t = 2k - 1$, $k \neq 1$.

La cuadratriz de Hipías no sólo resuelve el problema de la trisección de un ángulo, sino la división de un ángulo en un número cualquiera de partes iguales. La

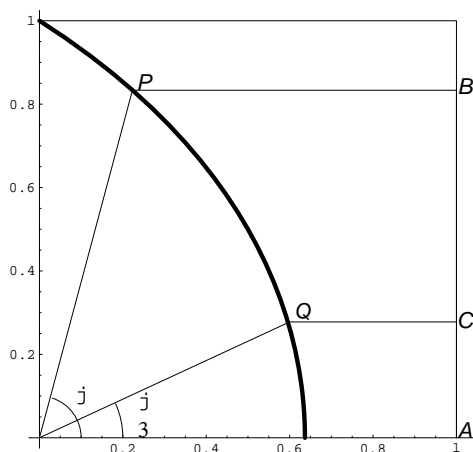


Figura 19 Trisección de un ángulo mediante la Cuadratriz de Hipías

división se efectúa del siguiente modo (figura 19): dado un ángulo AOP hallamos el punto P de corte con la cuadratriz y por P dibujamos la recta PB paralela al eje OX , dividimos el segmento AB (utilizando el teorema de Tales) en las partes iguales que deseemos (en nuestro caso 3) y hallamos el punto C . Deshaciendo el proceso anterior, obtenemos el punto Q y el ángulo AOQ es el ángulo buscado.

Un siglo más tarde, se utilizó esta curva para resolver la cuadratura del círculo, aunque en la propia construcción de la curva se supone conocida la solución del problema al relacionar un movimiento rectilíneo y un movimiento circular uniforme; voy a exponer la construcción que se ve en la figura 20 ya que utiliza dos teoremas fundamentales en geometría, el de Tales y el de Pitágoras: teniendo en cuenta que la cuadratriz corta al eje OX en el punto $\frac{2}{\pi}$, por el teorema de Tales obtenemos el punto $\frac{\pi}{2}$ y, a partir a este punto le sumamos 2 unidades y construimos la semicircunferencia con centro en el eje $= X$ y pasa por O y por $\frac{\pi}{2} + 2$, aplicando

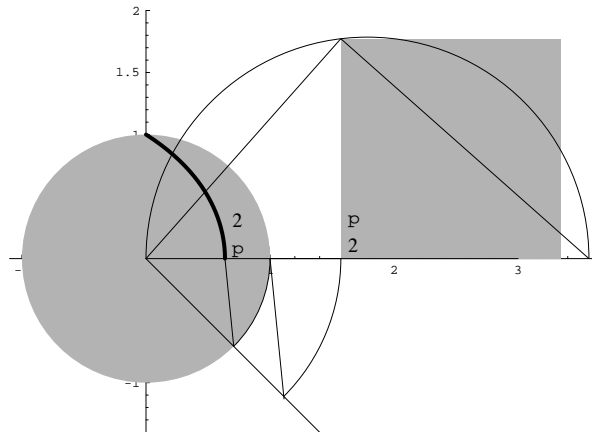


Figura 20 Cuadratura del círculo con la Cuadratriz de Hipías

el teorema de Pitágoras se obtiene que la perpendicular sobre $\frac{\pi}{2}$ mide $\sqrt{\pi}$, con lo cual el cuadrado tiene el mismo área, π , que el círculo.

Concoide de Nicómedes

La concoide de Nicómedes (siglo II a. C) aparece al trisecar un ángulo por medio del método de Arquímedes (siglo III a. C.), que se efectúa de la siguiente manera: dado un ángulo AOB (figura 21) dibujamos, con centro en el vértice O del

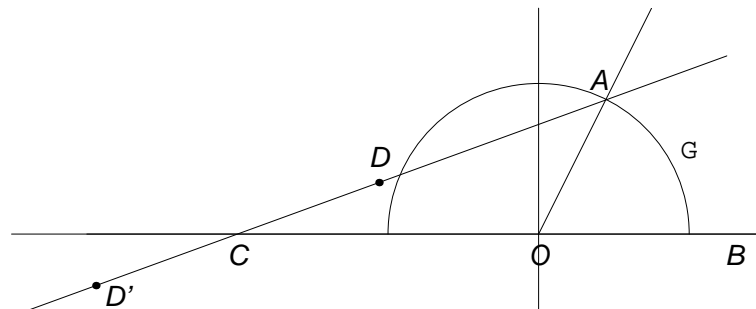


Figura 21 Método de Arquímedes

ángulo, una circunferencia Γ ; desde el punto A de intersección de la circunferencia con uno de los lados del ángulo, construimos una recta no paralela al otro lado del ángulo, esta recta corta al otro lado en un punto C . A partir de C tomamos los puntos D y D' de manera que la distancia de C a D y a D' es igual al radio de la circunferencia Γ . Cuando el punto D (o D') está sobre la circunferencia, el ángulo

ACB es la tercera parte del ángulo dado.

Si dibujamos todos los puntos D y D' obtenidos mediante este procedimiento obtenemos la *Concoide de Nicómedes* (llamada así porque tiene forma de concha).

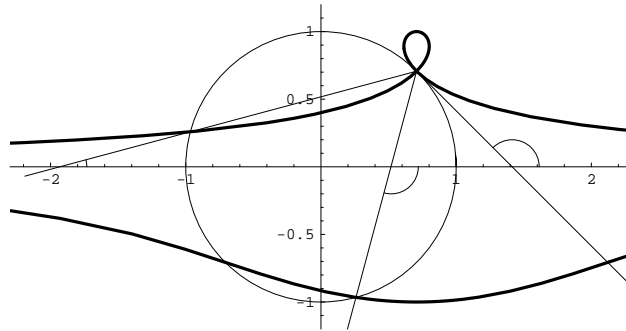


Figura 22 *Concoide de Nicomedes correspondiente al ángulo $\frac{\pi}{4}$*

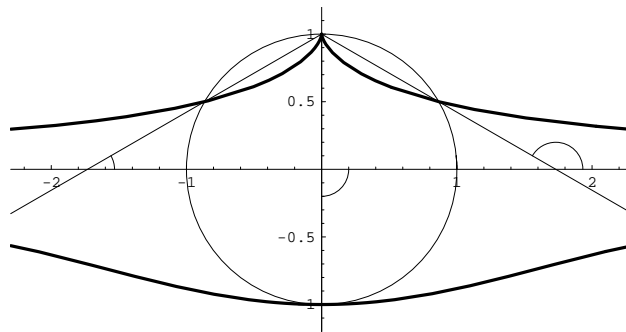


Figura 23 *Concoide de Nicómedes correspondiente al ángulo $\frac{\pi}{2}$*

Como un ángulo está determinado salvo un número entero de vueltas, los puntos de intersección de la conchoide con la circunferencia nos dan las tres posibles terceras partes del ángulo inicial.

Existen otros dos puntos, el propio A y el punto diametralmente opuesto a A , que siempre son puntos de intersección de la conchoide y la circunferencia puesto que evidentemente verifican la definición de los puntos D , estos puntos no proporcionan una tercera parte del ángulo inicial salvo en el caso particular de $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (figura 23),

en el que el punto diametralmente opuesto es doble (en este caso, la circunferencia y la concoide son tangentes).

La concoide de Nicómedes también se obtiene cuando trisecamos un ángulo utilizando el método de Hipócrates (siglo V a.C.) que aparece en la figura 24: supongamos el ángulo agudo AOB que queremos trisecar, construimos una recta auxiliar perpendicular a uno de los lados, esta recta corta a los lados del ángulo en A y en K . Para cada recta que pasa por O hallamos el punto P de manera que la distancia MP

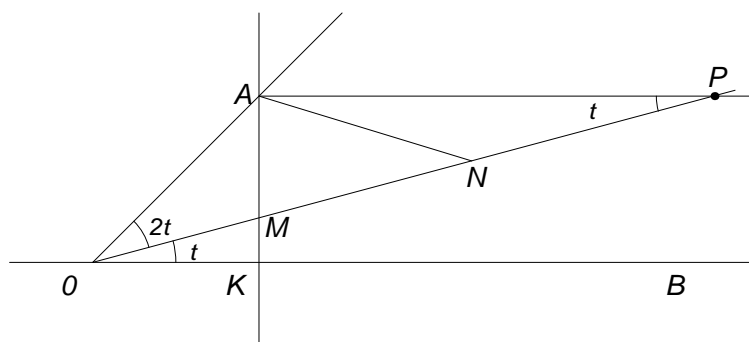


Figura 24 Método de Hipócrates para la trisección de un ángulo

sea el doble de la longitud del segmento OA , siendo M el punto de intersección de la recta variable OP con la recta auxiliar KA , cuando la recta AP es paralela al lado OB , el ángulo BOP es la tercera parte del ángulo BOA .

Igual que antes, fijada la recta auxiliar y los valores a (distancia de O a la recta auxiliar, longitud del segmento OK) y b (longitud de los segmentos MP), construimos los puntos P y obtenemos así la concoide de Nicómedes, cuyas ecuaciones paramétricas son

$$x(t) = a + b \cos t, \quad y(t) = b \sin t + a \tan t.$$

Eliminando el parámetro t en las ecuaciones anteriores, se obtiene la ecuación implícita de la concoide

$$(x - a)^2(x^2 + y^2) = b^2x^2.$$

En la figura 25 aparecen de izquierda a derecha las concoides de Nicómedes para $b > a$ (que corresponde a la trisección de un determinado ángulo agudo), para $b = a$ (que corresponde, según se vió en la figura 23, a la trisección de un ángulo recto) y para $b < a$.

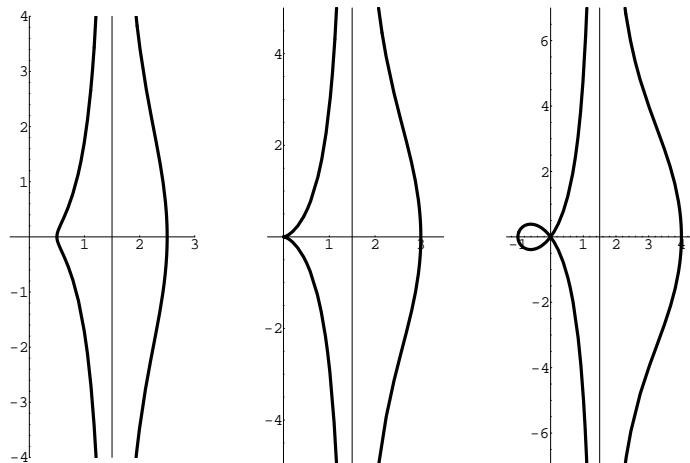


Figura 25 Concoides de Nicómedes para $a = 1.5$ y $b = 1, 1.5$ y 2.5

Para $b > a$ la curva tiene un bucle y un punto doble, para $b = a$, el bucle se reduce a un punto cúspide y para $b < a$, todos los puntos de la curva son regulares. En cualquiera de los tres casos la recta $x = a$ es asíntota de la curva.

Esta curva se utiliza también para duplicar el cubo, es decir para obtener la raíz cúbica de 2 (figura 26). Para ello dibujamos la concoide para $a = b = 1$ y el ángulo $ACB = \frac{\pi}{3}$, por la semejanza de los triángulos OCD y OAB se obtiene

$$\frac{p}{p+1} = \frac{1}{r+1} = \frac{m}{q}. \quad (3.1)$$

En el triángulo ACB se tiene $q = \sqrt{3}r$ y, por el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OCD ,

$$p^2 = 1 + m^2. \quad (3.2)$$

Entonces de (3.1) y (3.2) se obtiene

$$m = \frac{\sqrt{3}r}{1+r} \quad \text{y} \quad p^2 = \frac{3r^2}{(1+r)^2}.$$

De la primera igualdad de (3.1) se obtiene $r = 1/p$ y, entonces $p^3(2+p) = 2(2+p)$ de donde $p = \sqrt[3]{2}$.

Trisectriz de Ceva

La construcción de la trisectriz de Ceva (1648–1734) se basa en el método de Arquímedes pero empezando por la solución (figura 27): Para cada recta que pasa

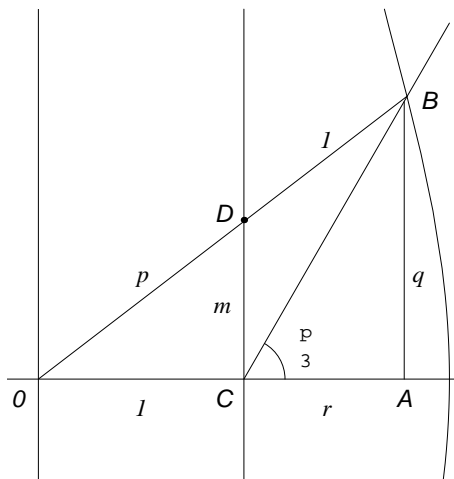


Figura 26 Obtención de $\sqrt[3]{2}$ con la Concoide

por O construimos el punto P de manera que las longitudes de los segmentos OA , AB y BP son iguales.

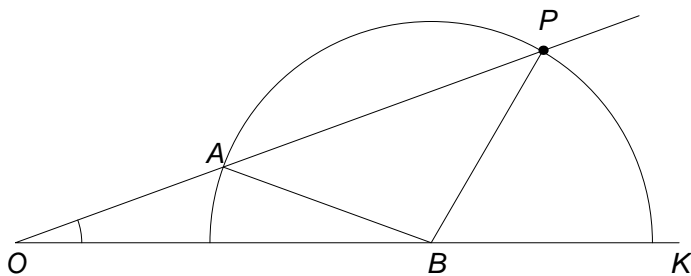


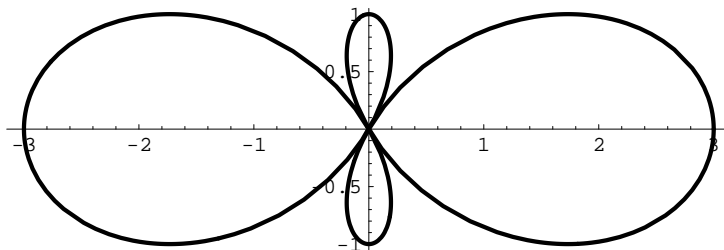
Figura 27 Construcción de un punto de la trisectriz de Ceva

Construyendo los puntos P correspondientes a las rectas que pasan por O , obtenemos así la curva de la figura 28, cuyas ecuaciones paramétricas son

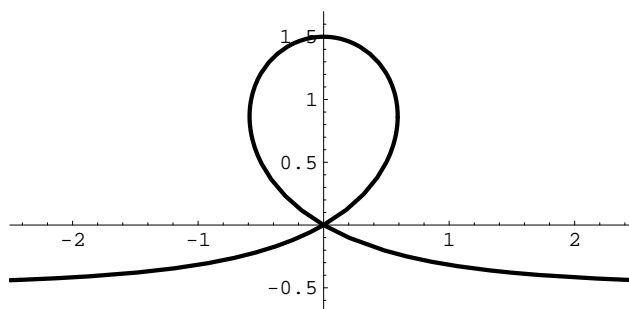
$$x(t) = 2 \cos t + \cos(3t), \quad y(t) = \sin(3t)$$

y, eliminando el parámetro t , obtenemos su ecuación cartesiana

$$(x^2 + y^2)^3 = (3x^2 - y^2)^2.$$

Figura 28 *Trisectriz de Ceva***Trisectriz de MacLaurin**

La trisectriz de MacLaurin (1698–1746) es la curva cuya ecuación cartesiana es $x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$, sus ecuaciones paramétricas son

Figura 29 *Trisectriz de MacLaurin*

$$x(t) = a \frac{3 - t^2}{1 + t^2}, \quad y(t) = at \frac{3 - t^2}{1 + t^2}$$

y que aparece dibujada en la figura 29 (con un giro de $\pi/2$) para $a = 0.5$. Como se puede ver esta curva tiene un punto doble en el origen, un bucle y la recta $x = -a$ es asíntota de la curva. En la figura 30 se observa cómo esta curva se utiliza para trisecar un ángulo cualquiera: el ángulo con vértice en el punto $(1, 0)$ es el triple del correspondiente que tiene vértice en $(0, 0)$.

Esta curva es *autoinversa* (la figura 31 está girada $\pi/2$): cualquier recta que pase por el punto C corta a la trisectriz en 2 puntos P y Q , el producto de las longitudes de los segmentos CP y CQ es constante e igual al cuadrado del radio de la circunferencia con centro el punto C y que pasa por el punto doble de la trisectriz de MacLaurin.

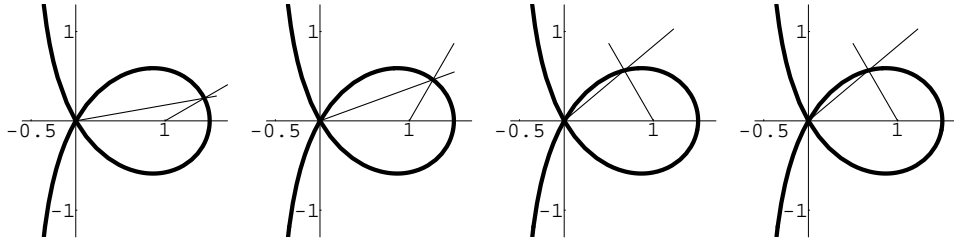


Figura 30 *Trisección de ángulos mediante la Trisectriz de MacLaurin*

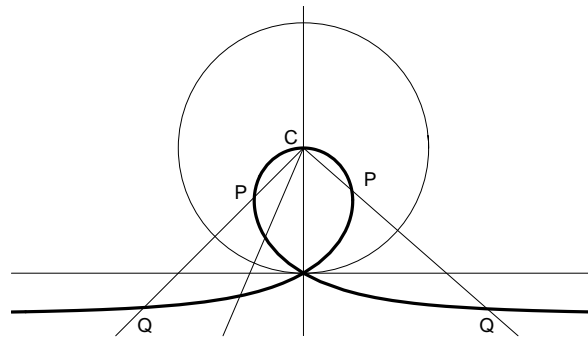


Figura 31 *Propiedad autoinversa de la Trisectriz de MacLaurin*

Trisectriz de Catalan (de Tschirnhausen)

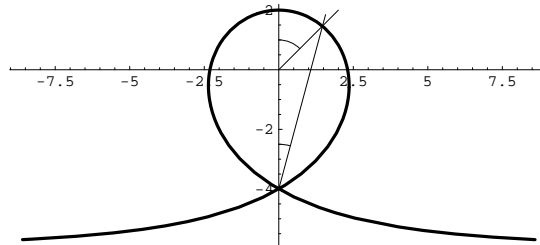
Para concluir con las trisectrices veremos la trisectriz de Catalan (1814–1894) (también llamada trisectriz de Tschirnhausen (1651–1708)), su ecuación cartesiana es

$$(x^2 + y^2)(6 + x) = 32$$

y sus ecuaciones paramétricas son

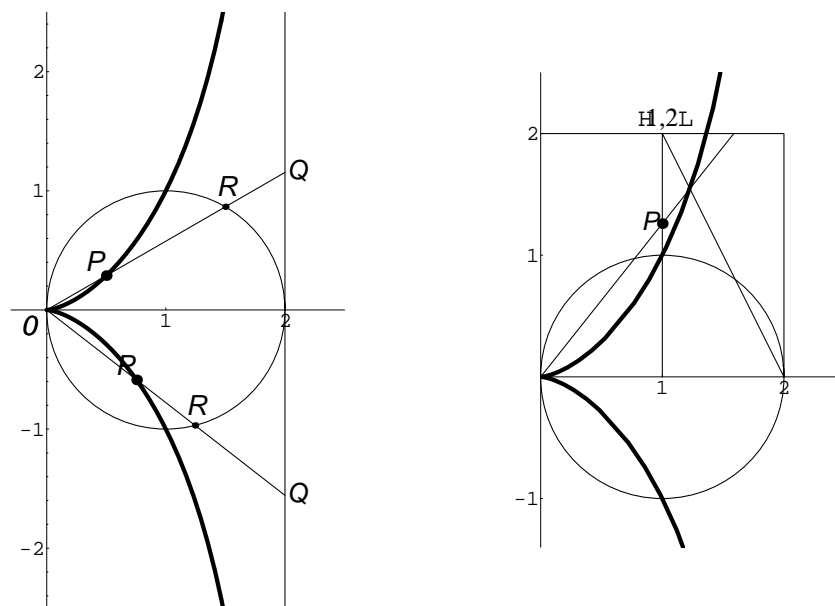
$$x(t) = \frac{2 \cos t}{\cos(t/3)}, \quad y(t) = \frac{2 \sin t}{\cos(t/3)}.$$

Es muy parecida a la trisectriz de MacLaurin (aquí también se ha efectuado un giro de $\pi/2$) y efectúa la trisección de un ángulo del mismo modo, en este caso el ángulo con vértice en O y uno de los lados sobre eje y es el triple del ángulo con vértice en $(0, -4)$

Figura 32 *Trisectriz de Catalan*

Cisoide de Diocles

Para resolver el problema de la duplicación del cubo, Diocles (siglo II a.C.) construyó la curva que lleva su nombre, que está definida como sigue (izquierda de la figura 33): dada una circunferencia Γ y una recta L tangente a ella, trazamos las rectas que pasan por el punto O , diametralmente opuesto al de tangencia; estas rectas cortan a la circunferencia en un punto R y a la recta en el punto Q . La cisoide de Diocles es el conjunto de los puntos P tales que $OR = PQ$. Esta curva se llama

Figura 33 *Cisoide de Diocles*

así porque tiene la forma del borde de una hoja de hiedra.

La cisoide tiene estas ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x(s) = 2a \sin^2 s, \\ y(s) = \frac{2a \sin^3 s}{\cos s}, \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{2at^2}{1+t^2}, \\ y(t) = \frac{2at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$

y su ecuación cartesiana es $x^3 + y^2(x - 2a) = 0$, donde a es el radio de la circunferencia. (en la parte izquierda de la figura 33 aparece representada para valor de $a = 1$).

La cisoide permite calcular $\sqrt[3]{2}$ (parte derecha de la figura 33): construimos el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ y $(2, 0)$ y lo dividimos por la mitad con la recta que pasa por $(1, 0)$ y $(1, 2)$. La recta que pasa por $(2, 0)$ y $(1, 2)$ corta a la cisoide en un punto, uniendo ese punto con el $(0, 0)$ obtenemos el punto P , es fácil comprobar que $OP = \sqrt[3]{2}$.

Trocoides

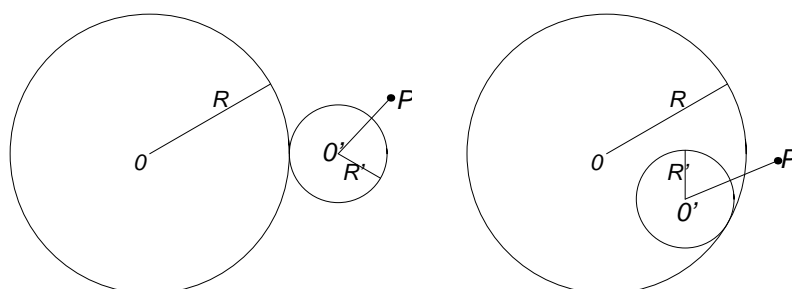


Figura 34 *Generación de la epitrocoide y la hipotrocoide*

Las trocoides son curvas obtenidas a través de puntos asociados a una circunferencia que rueda sobre otra circunferencia. Estas curvas están relacionadas con los *epiciclos*: curvas con las que se trataba de explicar los movimientos anómalos de los planetas en el sistema astronómico geocéntrico. Los planetas tienen movimiento de retroceso respecto de las estrellas “fijas”, lo que se pretendía explicar diciendo que los planetas están sobre una circunferencia que gira sobre otra.

Supongamos una circunferencia fija de centro O y radio R y otra circunferencia móvil de centro O' , tangente a la primera y con radio R' , sea P el punto solidario

con esta circunferencia móvil y a distancia $\lambda R'$ del centro O' . Las trocoides son las curvas descritas por el punto P cuando la segunda circunferencia rueda sin deslizar sobre la circunferencia fija.

Cuando la circunferencia móvil rueda por la parte de fuera de la fija las curvas se llaman *epitrocoides* (corresponden al caso $R' > 0$) y cuando la circunferencia móvil rueda por dentro de la fija, las curvas obtenidas se denominan *hipotrocoides* ($R' < 0$). El caso particular de que el punto generador P esté sobre la circunferencia móvil ($\lambda = 1$) las curvas obtenidas se denominan *epicicloide* o *hipocicloide*, según los casos.

Sus ecuaciones paramétricas, identificando los puntos del plano con los números complejos, son

$$z(t) = (R + R')e^{it} - \lambda R' e^{i\frac{R+R'}{R'}t}.$$

Epitrocoides

Veremos aquí algunas epitrocoides que tienen nombre propio:

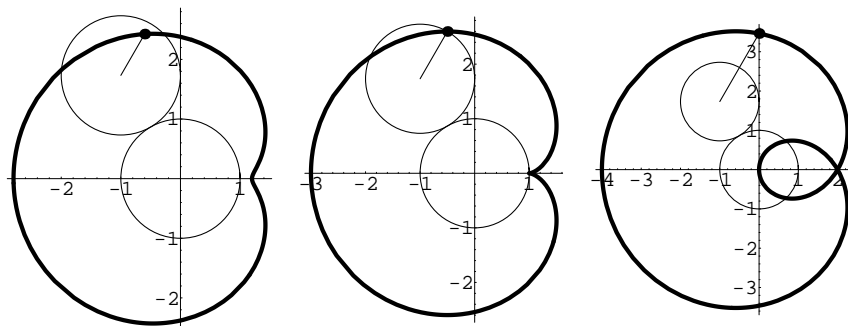


Figura 35 *Caracoles de Pascal*: $R = R' = 1$ y $\lambda = 0.8, 1$ y 2

El **Caracol de Pascal** (1588–1651) (figura 35) es la epitrocoide obtenida cuando el radio de las dos circunferencias es el mismo. La **cardioides** (en el centro de la figura 35) es la epicicloide caso particular del caracol de Pascal.

La **nefroide**, en forma de riñón (figura 36), es la epitrocoide obtenida cuando el radio de la circunferencia móvil es la mitad del radio de la circunferencia fija.

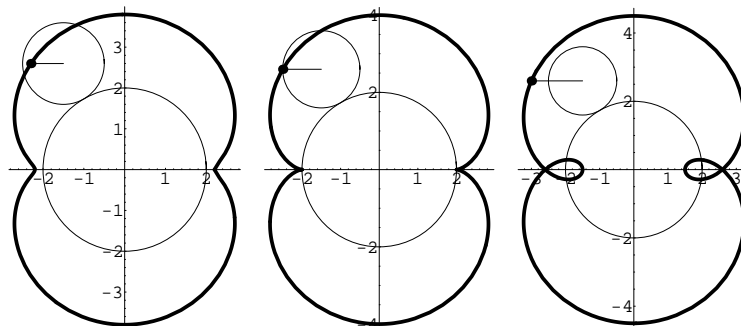


Figura 36 *Nefroides*: $R = 2$, $R' = 1$ y $\lambda = 0.8, 1$ y 1.5

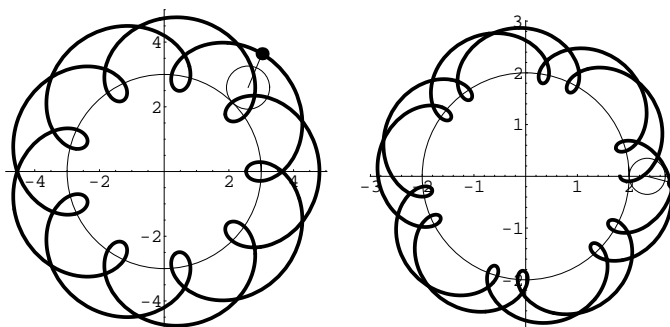


Figura 37 *Epitrocoides* de razón racional ($R = 3$, $R' = 2/3$, $\lambda = 1.7$) e irracional ($R = 2$, $R' = \pi/9$, $\lambda = 1.5$)

Según sea la relación entre los radios de las dos circunferencias se obtienen distintos tipos de trocoides:

- si la relación R/R' es entero, sólomente hace falta dar una vuelta para obtener la curva, por ejemplo el caracol de Pascal y la nefroide.
- si la relación R/R' es un número racional, es necesario dar varias vueltas a la circunferencia fija para obtener toda la curva (figura 37 izquierda).
- si la relación R/R' no es racional, la curva no se cierra y se obtiene un conjunto denso en una corona circular (figura 37 derecha).

Hipotrocoides

La **elipse**: es la hipotrocoide en la que la relación de radios de las circunferencias es $R/R' = 2$ (figura 38 a la izquierda); en el caso particular de que el punto gene-

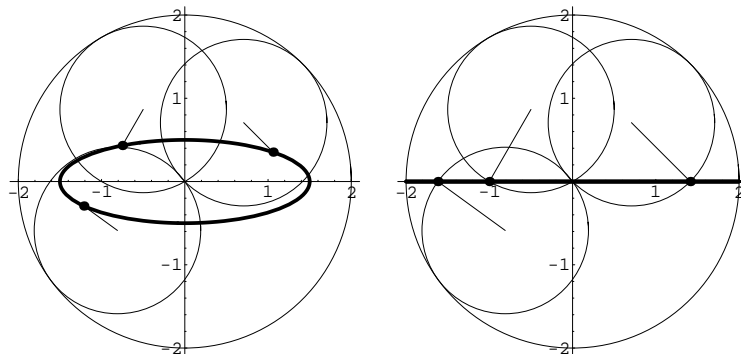


Figura 38 *Elipse y diámetro de la circunferencia fija*

rador esté sobre la circunferencia móvil (hipocicloide) la elipse degenera en uno de los diámetros de la circunferencia fija (figura 38 a la derecha).

Las **hipocicloides**: otras hipotrocoides con nombre propio son el Deltoide (figura 39 a la izquierda con los valores $R = 3$, $R' = -1$, $\lambda = 1$), el Astroide (figura 39 en el centro, $R = 3$, $R' = -3/4$, $\lambda = 1$), y la Estrella de mar (figura 39 a la derecha con los valores $R = 3$, $R' = -1.2$, $\lambda = 1$), con 3, 4, 5, puntos cúspide, respectivamente.

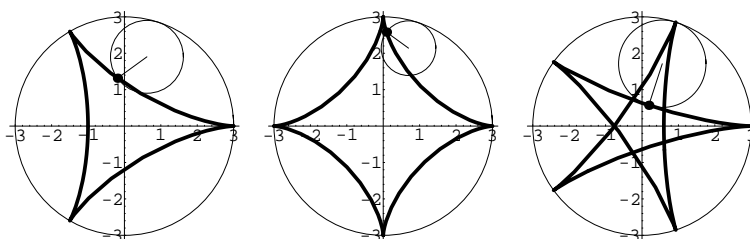


Figura 39 *Deltoide, astroide y estrella de mar*

Igual que sucede con las epitrocoides, dependiendo de la relación entre los radios de las circunferencias se han de efectuar una o varias vueltas sobre la circunferencia fija para obtener la curva; por ejemplo, para el deltoide y el astroide, sólomente es necesario recorrer la circunferencia fija una vez, mientras que en la estrella de mar hay que hacerlo 2 veces. En el caso de que la relación sea un número irracional, la curva no se cierra y es un conjunto denso en una corona circular.

Asociadas a estas hipocicloides tenemos las hipotrocoides que pasan por el cen-

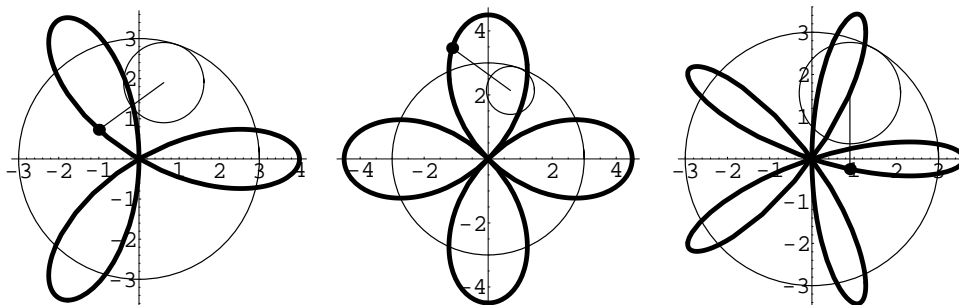


Figura 40 *Rodoneas de 3, 4 y 5 pétalos*

tro de la circunferencia fija, que ahora es un punto múltiple. Estas curvas se conocen como *Rodoneas* (en forma de rosa). En la figura 40 vemos el trébol y las rosas de cuatro y cinco pétalos.

La Cicloide

La *cicloide* es el lugar descrito por un punto asociado a una circunferencia de radio R a distancia λR del centro de la circunferencia, que rueda sin deslizar sobre

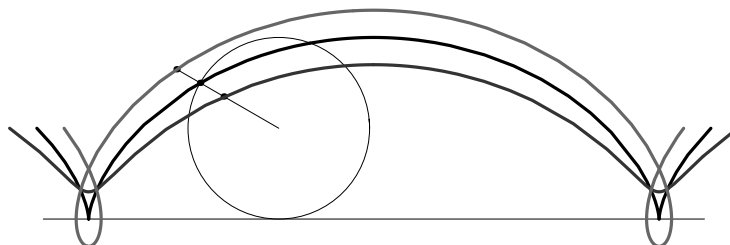


Figura 41 *Cicloides*

una recta; según que el punto generador esté en la circunferencia, en el interior o en el exterior del círculo limitado por ella, es decir, según que el valor de λ sea 1, menor que 1 o mayor que 1, obtenemos *la cicloide*, *la cicloide acortada* o *la cicloide alargada*.

Las ecuaciones paramétricas de las cicloides son

$$x(t) = R(t - \lambda \sin t), \quad y(t) = R(1 - \lambda \cos t).$$

Igual que en el caso de las trocoides, para $\lambda = 1$ aparecen puntos cúspide, para

$\lambda < 1$ todos los puntos son regulares y para $\lambda > 1$ aparecen puntos dobles y bucles.

La cicloide ($\lambda = 1$) tiene la propiedad de la *tautocronía*: si dejamos caer sin

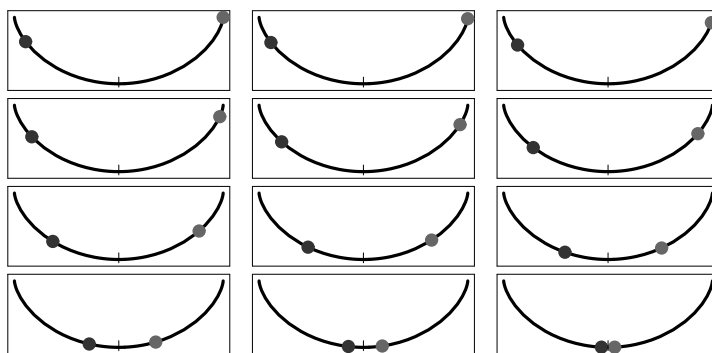


Figura 42 Posiciones de dos bolas cayendo sin velocidad inicial por una cicloide

velocidad inicial a lo largo de una cicloide invertida una bola sólo sometida a la acción de la gravedad, el tiempo que tarda la bola en llegar al punto más bajo de la cicloide es independiente de la altura desde la que hemos dejado caer la bola.

Esta propiedad, unida al hecho de que la evolvente de una cicloide es otra ci-

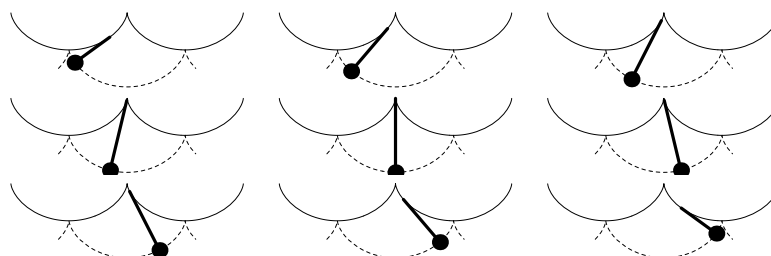


Figura 43 Péndulo de Huygens

cloide igual que la primera pero desplazada, permite construir un péndulo cicloidal (péndulo de Huygens (1629–1695)) que tiene la propiedad de que el periodo de oscilación es independiente de la amplitud.

Ruedas poligonales

Hay un chiste sobre ingenieros que dice que el ingeniero industrial inventor de la rueda, la inventó con forma cuadrada y como, si el suelo es llano, el problema de

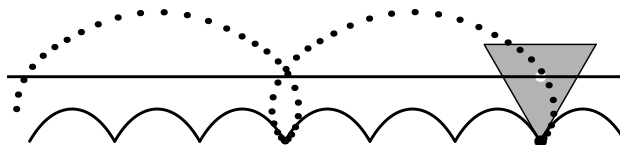


Figura 44 “Rueda” triangular

los saltos aparece cuando se apoya en el suelo uno de los vértices del cuadrado, otro ingeniero mejoró el invento minimizando el número de los saltos, es decir, disminuyendo el número de vértices, e inventó la rueda triangular. Un tercer ingeniero

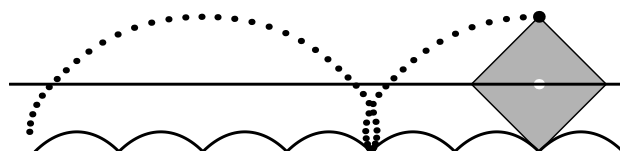


Figura 45 “Rueda” cuadrangular

(en este caso de Caminos) observó que, si el suelo tiene forma especial, una rueda poligonal puede girar de forma que el centro de la rueda no dé saltos. Al final un matemático vino en ayuda del último ingeniero y halló que el suelo tiene que tener la forma de arcos de *catenaria*.

Obsérvese en las figuras 44, 45 y 46 que a medida que aumentamos el número de lados del polígono que rueda, el suelo se va haciendo más llano, cuando el número de lados crece indefinidamente, la rueda es una circunferencia, el suelo es una recta y la curva punteada es una cicloide.

Con el suelo en forma de arcos de catenaria conseguimos que el centro del polígono no dé saltos verticales, pero da saltos “horizontales” en el sentido de que el movimiento de avance no es uniforme.

La catenaria (figura 47) está también relacionada con la fuerza de la gravedad puesto que es la forma que adopta un hilo de densidad homogénea sostenido por dos puntos y sometido a la acción de la gravedad, su ecuación cartesiana es

$$y = \cosh at.$$

La forma de la catenaria es parecida a la de una parábola, incluso Galileo, al estudiar la forma que adopta la cadena, las confundió. Esta curva es la generatriz plana del *catenoide* que es la única superficie de revolución minimal.

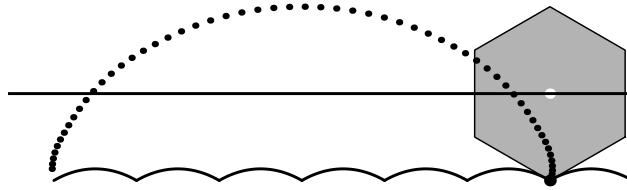


Figura 46 “Rueda” hexagonal

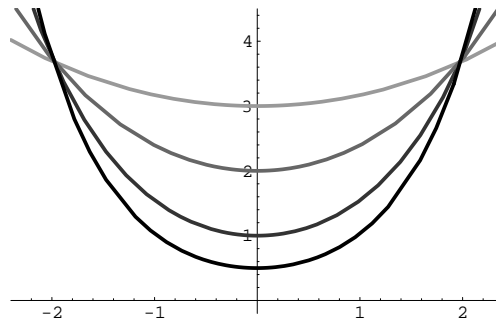


Figura 47 Catenarias que pasan por dos puntos fijados

Bibliografía

He consultado principalmente en los libros:

L.A. Cordero, M. Fernández y A. Gray: *Geometría diferencial de curvas y superficies con Mathematica.*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

C.G. Gibson: *Elementary Geometry of Differentiable Curves.* Cambridge University Press, 2001.

A. Gray: *Modern differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica.* CRC Press, 1998.

S. Wagon: *Mathematica in action.* Springer Telos, 2000.

y en las páginas de internet:

<http://www-history.msc.st-andrews.ac.uk>

<http://mathcurve.com>