

Geometría proyectiva plana

por

Luis Ugarte Vilumbrales, Universidad de Zaragoza

Ninguna rama de las matemáticas puede competir con la geometría proyectiva en originalidad de ideas,... elegancia de demostración y alcance de conceptos. La ciencia nacida del arte resultó ser ella misma un arte.

Morris Kline

1. Los artistas del Renacimiento y el origen de la geometría proyectiva

La geometría proyectiva nace a raíz de los esfuerzos realizados por los artistas del Renacimiento para representar de manera más realista el mundo que les rodeaba. En el caso concreto de la pintura, ésta se había caracterizado hasta entonces por el uso de cierta simbología que llevaba implícita una clara desconexión de las obras con el mundo real. La ilustración de temas bíblicos era la principal finalidad de la pintura en el período medieval, los fondos de la obras solían ser dorados para sugerir que las escenas correspondían a alguna región celestial, las figuras eran más simbólicas que realistas y las formas solían ser planas y sin naturalidad.

El gran problema al que se enfrentaron los pintores del Renacimiento era cómo plasmar el mundo tridimensional real en un lienzo bidimensional. La clave para resolver esta cuestión fue la interpretación de una propiedad fundamental de la visión monocular, debida principalmente a Leone Battista Alberti (1404-1472). Sus ideas, presentadas en su obra "*Della Pittura*" en 1435, pueden resumirse de la siguiente

manera. Cuando contemplamos una escena tridimensional utilizando un solo ojo, la visión se produce debido a que los rayos de luz procedentes de los distintos puntos de la escena llegan hasta nuestro ojo. Si ahora situamos un lienzo transparente entre el ojo y la escena, esta colección de rayos de luz, o *proyección*, cortará al lienzo en una colección de puntos. Esta colección de puntos, o *sección*, es lo que el artista debe pintar para que cualquier observador de su pintura reciba la misma percepción de la escena tridimensional que si mirase directamente a ella, ahora bien, siempre y cuando el observador mire también con un solo ojo y desde el mismo punto. Este principio de proyección y sección es bien ilustrado en algunos grabados del pintor alemán Alberto Dürero (1471-1528). En el grabado de la Figura 1 podemos observar al artista marcando en una pantalla de cristal el punto en el que corta uno de los rayos



Figura 1

de luz, que va desde la escena (en este caso un jarrón) al ojo del artista (más rigurosamente, al punto de la pared en el que está fijada la cuerda). La colección de tales puntos es la sección obtenida en la pantalla de cristal.

Pero como el lienzo del artista no es transparente, la tarea de plasmar con exactitud la proyección deseada sigue siendo un gran problema. Existe además otra dificultad añadida y es que nuestro sentido de la vista involucra los dos ojos, cuestión que los pintores trataban de resolver jugando con el uso de sombras y la variación de la intensidad de la luz. Algunas obras de Leonardo da Vinci (1452-1519) o de

Rafael (1483-1520), entre otros, permiten hacernos una idea del éxito que los pintores del Renacimiento tuvieron en representar las escenas de manera más realista haciendo uso del principio de proyección y sección. En la Figura 2 se reproduce *La Escuela de Atenas* de Rafael.

Este esfuerzo por reflejar de forma más real los objetos tridimensionales llevó a muchos artistas y arquitectos del Rena-



Figura 2

cimiento a indagar en las leyes formales que rigen la proyección y sección. Una cuestión básica, planteada por Alberti, era el estudio de aquellas propiedades geométricas que tienen en común el objeto original y cualquiera de sus secciones. Es obvio que tanto las distancias como los ángulos no se conservan al proyectar y seccionar una figura. La búsqueda de una respuesta a esa cuestión les condujo, en el siglo XV, a la creación de los principios de una teoría de la perspectiva geométrica.

Con el objeto de dar solución a ciertas necesidades del arte y la arquitectura de la época, el autodidacta francés Gérard Desargues (1591-1661) publicó en París en 1639 un tratado original pionero en geometría proyectiva titulado *“Borrador de un ensayo de tratado de los resultados de los encuentros de un cono con un plano”*. En esta obra introdujo la noción de punto y de recta del infinito, probó la invarianza por proyección de una cuaterna armónica, desarrolló la teoría de polos y polares, etc... Algunas de estas nociones habían sido ya introducidas por autores clásicos como Pappus de Alejandría (290-350) o Apolonio de Perga (262-190 a.C.), pero ellos nunca razonaron en términos de proyección y sección. Este original enfoque de Desargues le llevó a introducir nuevos métodos de demostración de teoremas sobre secciones cónicas haciendo uso de la idea de perspectiva. Su plan de trabajo consistía en el estudio de resultados comunes a las tres cónicas (parábola, elipse e hipérbola) descubriendo para ello aquellas propiedades de la circunferencia que se conservan por proyección, ya que toda cónica se obtiene como sección de la proyección de una circunferencia. Consiguió de esta forma unificar los métodos de demostración de muchos teoremas conocidos sobre cónicas, y que hasta entonces requerían de métodos específicos para cada tipo de cónica, tal y como se conocían desde la obra clásica *“Secciones cónicas”* de Apolonio.

Sin embargo, su Borrador fue duramente atacado y despreciado por la mayoría de los matemáticos de la época, llegándose incluso a producir violentas polémicas y fuertes críticas no sólo sobre su obra sino también sobre el propio Desargues. De entre las razones de tal rechazo pueden destacarse fundamentalmente tres. La primera es que Desargues empleaba una curiosa terminología, un tanto excéntrica, con el fin de evitar ambigüedades, pero en vez de ganar en claridad hacía más difícil su lectura. La segunda razón fue el entusiasmo que había despertado la publicación en 1637 del *“Discurso del método”* de René Descartes (1596-1650), obra que contenía tres apéndices *Geometría*, *Dióptrica* y *Meteoros*, el primero de los cuales dio origen a la geometría analítica. Por último, y en lo que respecta a los ataques a su persona, el filósofo francés Gilles Deleuze (1925-1995) describe así el principal motivo por el que éstos fueron tan enérgicos: *“Desargues es condenado*

por el parlamento de París, combatido por el secretario del rey; sus prácticas de perspectiva son prohibidas. La ciencia real o de Estado sólo soporta y hace suya... la primacía del modelo fijo de la forma, de la cifra y de la medida. La ciencia real sólo soporta y hace suya la perspectiva estática, sometida a un agujero negro central que le niega toda capacidad heurística y deambuladora”.

Posteriormente, Desargues publicó su teorema fundamental sobre triángulos y otros resultados, entre ellos la invarianza de la razón doble por proyección, en un apéndice del libro de Abraham Bosse (1602-1676) titulado “*Método universal del Señor Desargues, para practicar la perspectiva*”. Con esta obra, publicada en 1648, Bosse intentó divulgar y hacer más populares las ideas de Desargues, de las cuales él fue un gran defensor.

A pesar del desprecio generalizado a la obra de Desargues, algunos matemáticos contemporáneos, al conocer los detalles de su trabajo, reconocieron el gran talento geométrico del autor. Entre ellos cabe destacar a Descartes, Pierre de Fermat (1601-1665) y Blaise Pascal (1623-1662). Este último, animado por el propio Desargues, obtuvo interesantes resultados usando el método de proyección y sección. Su teorema más famoso en geometría proyectiva es conocido como el *hexagrama místico de Pascal*, demostrado a la edad de dieciséis años. La geometría proyectiva fundada sobre la obra original de Desargues y sobre el “*Ensayo sobre las cónicas*” (1640) de Pascal quedó olvidada rápidamente hasta el punto de que los escasos ejemplares de estas obras se perdieron.

Los métodos proyectivos en geometría no volvieron a ser considerados hasta finales del siglo XVIII, cuando el matemático francés Gaspard Monge (1746-1818) desarrolló su geometría descriptiva, que incluía una forma de representar y estudiar objetos tridimensionales a través de sus proyecciones sobre ciertos planos. La geometría sintética, es decir, la que sólo usa argumentos puramente geométricos, había sido eclipsada durante casi dos siglos por la geometría analítica de Descartes, hasta que Monge junto con un grupo de brillantes estudiantes, entre ellos Charles Julien Brianchon (1785-1864) y Jean-Victor Poncelet (1788-1867), se lanzó a la difícil batalla de intentar demostrar que los argumentos sintéticos podían ir más allá que los analíticos.

Pero el resurgimiento real de la geometría proyectiva fue debido a Poncelet, quien durante su estancia como prisionero de guerra en Saratoff (Rusia) a raíz de su participación como oficial en la campaña napoleónica, reconstruyó sin la ayuda de ningún libro sus conocimientos sobre geometría, obtuvo nuevas aportaciones

a la teoría proyectiva y concibió esta materia como una rama totalmente nueva y autónoma. Tras su libertad publicó en París en 1822 su gran obra sobre geometría proyectiva: *“Tratado de las propiedades proyectivas de las figuras”*. A raíz de esta obra fueron muchos los matemáticos que hicieron aportaciones a la geometría proyectiva, entre los que se encontraron Joseph Diez Gergonne (1771-1859), Michel Chasles (1793-1880), Jakob Steiner (1796-1863), Karl Georg Christian von Staudt (1798-1867), Julius Plücker (1801-1868), Arthur Cayley (1821-1895), Luigi Cremona (1830-1903), Edmond Laguerre (1834-1886), Theodor Reye (1838-1919), Moritz Pasch (1843–1930), Felix Klein (1849–1925), Federigo Enriques (1871-1946), Gino Fano (1871-1952), John Wesley Young (1879-1932) y Oswald Veblen (1880-1960). Durante el siglo XIX la mayoría de los resultados de Desargues y de Pascal a los que hemos aludido anteriormente tuvieron que ser redescubiertos de forma independiente por geómetras de la época. Afortunadamente Chasles encontró en una librería en 1845 una copia manuscrita del tratado de Desargues, que había sido realizada por Philippe de la Hire (1640-1718). Desde entonces el trabajo de Desargues fue situado en el lugar que le correspondía y fue reconocido por todos como un clásico en el desarrollo de la geometría proyectiva.

2. La recta del infinito

Supongamos que contemplamos un rectángulo desde un punto y que interponemos una pantalla de cristal entre éste y nuestro ojo. Como se muestra en la Figura 3, la sección sobre la pantalla será en general un cuadrilátero irregular y no ya un rectángulo. Si ahora cambiamos la posición de la pantalla entonces la sección también cambia, pero la impresión sobre nuestro ojo seguirá siendo la misma. Lo mismo sucede cuando observamos una circunferencia desde un punto exterior, distintas secciones de la misma pueden dar lugar a elipses más o menos achatadas, o incluso a parábolas o hipérbolas, pero la sensación creada por cada una de estas secciones sobre el ojo es la misma que la creada por la circunferencia.

Esta resulta ser una propiedad fundamental del proceso de proyección y sección de cualquier objeto tridimensional. Es natural plantearse entonces la siguiente cuestión: ¿qué propiedades comparten las distintas secciones para que produzcan la misma impresión sobre el ojo? Si ahora observamos un objeto desde dos posiciones distintas y tomamos secciones, ¿no deberían tener también ciertas propiedades comunes esas secciones puesto que provienen del mismo objeto?

La búsqueda de tales propiedades motivó el origen y desarrollo de la geometría proyectiva. Algunas propiedades que claramente varían de una sección a otra son,

por ejemplo, la longitud de un segmento, el área o la medida de un ángulo, por lo que el paralelismo de rectas no se conserva. Sin embargo, una línea recta seguirá siéndolo en (casi) todas las secciones de cualquier proyección, por lo que un punto que no pertenece a una recta dada se transformará al proyectar y seccionar en un punto que no pertenece a la recta transformada. Estas consideraciones, aunque triviales, sugieren que la respuesta a las cuestiones arriba planteadas no parece incumbir a la geometría euclídea ordinaria, sino que en esta “geometría” los elementos fundamentales parecen ser los de punto y recta, y la relación de incidencia (o pertenencia), y que no tienen cabida nociones como la distancia. Sin embargo, para estudiar las propiedades invariantes por proyección y sección se utilizó en un principio la geometría euclídea, pues era la única conocida en la época de Desargues.

Una importante innovación en geometría fue la adición de ciertos elementos ideales al espacio euclídeo, elementos que ahora conocemos como puntos del infinito, recta del infinito, etc... La introducción de la noción de punto en el infinito asociado a rectas paralelas se atribuye generalmente a Johann Kepler (1571-1630), aunque fue Desargues quien utilizó sistemáticamente esta idea en su tratado de secciones cónicas de 1639. Alberti ya había observado que dos rectas paralelas en una escena real deben dibujarse de manera que se corten en un punto, salvo que el lienzo sea también paralelo a dichas rectas. Por ello, las baldosas cuadradas del suelo no se ven como cuadrados en el lienzo. En la escena representada en la Figura 2 se pueden adivinar también rectas que convergen a un punto principal, o del infinito, y que en la realidad son rectas paralelas.

Veamos cómo surge la necesidad natural de añadir puntos del infinito al plano usual. Las rectas $A'C'$ y $B'D'$ de la Figura 3, que corresponden a los segmentos paralelos AC y BD , deben cortarse en algún punto I' del plano Π' que contiene al lienzo (suponemos éste no paralelo a AC). En efecto, el punto O y la recta AC determinan un plano Π_1 , y el punto O y la recta BD determinan otro plano Π_2 . Ambos planos cortan a Π' en las rectas $A'C'$ y $B'D'$, respectivamente, y la intersección de los tres planos determina el punto

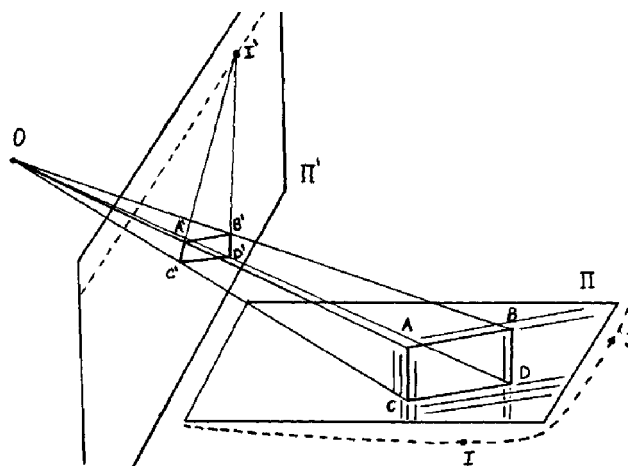


Figura 3

I' . Ahora bien, el punto I' no corresponde a ningún punto ordinario del plano Π que contiene a las rectas AC y BD , pues la recta OI' es de hecho paralela a Π . Para completar la correspondencia entre los puntos de las rectas $A'C'$ y AC , y entre los puntos de $B'D'$ y BD , Desargues añadió un *punto ideal* o *punto en el infinito* I a las rectas paralelas AC y BD . Así las rectas paralelas AC y BD se cortan en el punto I .

Supongamos ahora que BD es una recta variable contenida en el plano Π y paralela a AC . Es fácil ver que el punto de corte de las rectas $A'C'$ y $B'D'$ correspondientes es también I' , por lo que la recta BD debe contener el mismo punto ideal I que AC . Es decir, la colección de rectas paralelas a una recta dada tiene asociado un mismo punto ideal. Como existe un número infinito de colecciones de rectas paralelas, cabe considerar una infinidad de puntos ideales añadidos al plano euclídeo. Además, la colección de todos los puntos I' correspondientes a puntos del infinito I es precisamente la recta obtenida al cortar Π' con el plano paralelo a Π que pasa por O , por lo que Desargues hizo la hipótesis adicional de que los puntos del infinito yacen todos ellos en la llamada *recta del infinito*. Se obtiene así un plano ampliado al añadir esta nueva recta a las ya existentes.

La principal ventaja al trabajar en el plano ampliado es que podemos dar a los teoremas un enunciado “universal”, eliminando las distinciones que se establecen en la geometría euclídea. Por ejemplo, ahora dos rectas distintas cualesquiera se cortan exactamente en un punto, y dos puntos distintos cualesquiera siguen determinando una y sólo una recta.

Este plano ampliado constituirá nuestro modelo intuitivo de plano proyectivo, en el cual la recta del infinito no se distingue de las ordinarias. Aparentemente la incorporación de la recta del infinito y el uso de las convenciones anteriores no parece conducir a ninguna contradicción. Abordaremos este asunto en la última sección.

3. En busca de un invariante proyectivo: la razón doble

Como el objetivo de la geometría proyectiva es el estudio de propiedades que se mantienen invariantes por proyecciones y secciones, resulta natural preguntarse si dados k puntos alineados puede definirse un invariante proyectivo asociado a ellos. Veamos primero que k debe ser mayor o igual que cuatro, es decir, no puede existir un tal invariante para pares ni para ternas de puntos alineados.

Sean A, B, C tres puntos cualesquiera de una recta p y A', B', C' otros tres puntos cualesquiera de otra recta p' . Llamando $O = AA' \cap BB'$ al punto de intersección de las rectas AA' y BB' , es claro que por proyección desde O el par A, B se transforma en el par A', B' . Por otro lado, para transformar A, B, C en la terna A', B', C' necesitamos usar en general dos proyecciones. En efecto, elegimos primero dos puntos distintos cualesquiera O_1 y O_2 sobre la recta AA' , y consideramos los puntos de intersección $B_1 = BO_1 \cap B'O_2$ y $C_1 = CO_1 \cap C'O_2$. Entonces llamando q a la recta B_1C_1 , la terna A, B, C se transformará en A', B', C' por la proyección de p sobre q desde O_1 seguida de la proyección de q sobre p' desde O_2 .

Sin embargo, si se consideran dos cuaternas de puntos alineados entonces ya no es posible llevar en general una sobre otra por proyecciones y secciones sucesivas. El motivo es que existe un invariante proyectivo asociado a cuatro puntos alineados, que recibe el nombre de *razón doble* (también llamado *razón cruzada* o *relación anarmónica*).

El concepto de razón doble tiene su origen en los griegos, quienes investigaron muchas de sus propiedades. Desargues demostró en el apéndice de la obra de Bosse de 1648 que esta razón es invariante por proyección y sección, aunque incluso Pappus conocía ya ciertos resultados al respecto. Este concepto recibió un nuevo impulso a principios del siglo XIX, con la noción de magnitud con sentido introducida por Lazare Nicholas-Marguerite Carnot (1753–1823) en su *Geometría de la posición* de 1803, y por August Ferdinand Möbius (1790–1868) en su obra *Der barycentriche calcul* de 1827, lo que dio lugar a una notación más cómoda y eficaz. El tratamiento moderno de la razón doble se debe principalmente a las obras de Möbius y de Chasles. Un estudio de esta noción exento de consideraciones métricas fue desarrollado por von Staudt.

Consideremos una recta “orientada”, es decir, una recta en la que hemos elegido un sentido como el positivo. Dados dos puntos ordinarios A y B , indicaremos por \overline{AB} la distancia con su signo o sentido del punto A al punto B . Así por ejemplo $\overline{BA} = -\overline{AB}$.

La expresión “razón doble” proviene del hecho de que esta cantidad va a estar definida como un cociente o razón de *razones simples*, concepto que introducimos a continuación. Dado un segmento ordinario AB y un punto ordinario P , distinto de B , alineado con A y B , llamaremos *razón simple* o *razón en la que el punto P divide al segmento AB* al cociente $(AB, P) = \overline{AP}/\overline{PB}$. Es claro que este cociente no depende de la orientación asignada a la recta AB .

Supongamos ahora que el segmento AB está fijado y que el punto P se mueve a lo largo de la recta que contiene al segmento. Tanto si P se aleja por la derecha como por la izquierda, la razón simple (AB, P) tiende a -1 . Esto sugiere definir *la razón simple en la que el punto ideal I divide a un segmento dado como -1* , es decir, $(AB, I) = -1$. Por otro lado, si $P = B$ entonces se conviene en representar la razón simple (AB, B) por el símbolo ∞ , es decir, “ampliamos el cuerpo de números reales con ∞ ”. De esta manera, dado un segmento AB , es fácil comprobar que la correspondencia entre los puntos de la recta ampliada que contiene al segmento y los valores del cuerpo de números reales ampliado con ∞ es uno a uno.

Una forma alternativa de calcular la razón simple, que a su vez nos dará una pista de cómo definir el invariante proyectivo que buscamos, es la siguiente: Si C es cualquier punto de la recta ampliada que contiene al segmento AB , entonces

$$(AB, C) = \frac{OA \cdot \overline{\text{sen } \angle AOC}}{OB \cdot \overline{\text{sen } \angle COB}},$$

donde O es un punto cualquiera que no pertenece a dicha recta, y donde los ángulos $\overline{\angle AOC}$ y $\overline{\angle COB}$ se consideran con signo (ver Figura 4).

Para probar esta igualdad, llamemos h a la longitud de la perpendicular que va desde O a la recta AB . Si C es un punto ordinario, entonces el área (con signo) del triángulo OAC es igual a $\overline{AC} \cdot h/2 = OA \cdot OC \cdot \overline{\text{sen } \angle AOC}/2$. Razonando de la misma manera para el triángulo OBC , de la definición de razón simple concluimos el resultado para C ordinario. Si C es ideal entonces el resultado se obtiene directamente, pues en tal caso la razón simple es igual a -1 .

□ QED

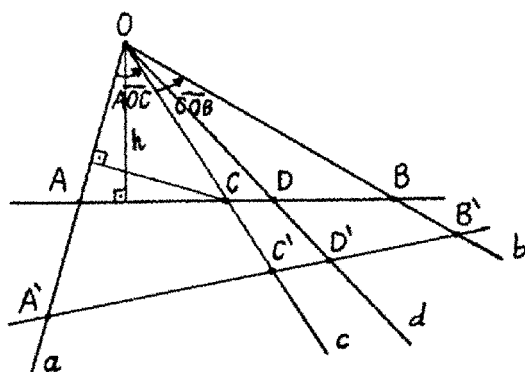


Figura 4

La expresión anterior muestra que el cociente OA/OB “estropea la invarianza proyectiva” de la razón simple. La idea es cancelar este cociente considerando un cuarto punto. Es decir, dados A, B, C, D cuatro puntos ordinarios distintos y alineados, definimos su *razón doble* como el cociente de razones simples dado por

$$(AB, CD) = \frac{(AB, C)}{(AB, D)}.$$

(La razón doble depende del orden en que se elijan los puntos, aunque es fácil ver

que los $4! = 24$ posibles valores que puede tomar la razón doble de cuatro puntos dados se reducen en realidad a sólo seis.) Proyectemos A, B, C, D desde un punto exterior O a otros cuatro puntos alineados A', B', C', D' , como se muestra en la Figura 4. Entonces,

$$\begin{aligned} (AB, CD) &= \frac{(AB, C)}{(AB, D)} = \frac{(OA \cdot \overline{\text{sen } \angle AOC}) / (OB \cdot \overline{\text{sen } \angle COB})}{(OA \cdot \overline{\text{sen } \angle AOD}) / (OB \cdot \overline{\text{sen } \angle DOB})} \\ &= \frac{\overline{\text{sen } \angle AOC} \cdot \overline{\text{sen } \angle DOB}}{\overline{\text{sen } \angle AOD} \cdot \overline{\text{sen } \angle COB}} = \frac{\overline{\text{sen } \angle A'OC'} \cdot \overline{\text{sen } \angle D'OB'}}{\overline{\text{sen } \angle A'OD'} \cdot \overline{\text{sen } \angle C'OB'}} = \frac{(A'B', C')}{(A'B', D')} = (A'B', C'D'). \end{aligned}$$

Luego, aunque ni la distancia ni la razón simple (que es una razón de distancias) se conservan por proyección, sin embargo *la razón de razones simples sí es un invariante proyectivo*.

Observemos que la razón doble la hemos definido para puntos ordinarios, pero teniendo en cuenta la invarianza por proyección y los convenios anteriores, es claro cómo definir la razón doble cuando uno de los puntos es ideal, o incluso cuando los cuatro puntos son ideales, es decir, están alineados en la recta del infinito. Llegamos así a obtener un invariante proyectivo asociado a cada cuaterna de puntos alineados del plano ampliado.

Cuatro puntos A, B, C, D tales que su razón doble (AB, CD) es igual a -1 se dice que forman una *cuaterna armónica*, o que el punto B es el *conjugado armónico* de A con respecto a C y D . Por ejemplo, dos puntos ordinarios, su punto medio y el punto ideal de la recta en la que yacen forman una cuaterna armónica, es decir, el conjugado armónico del punto medio de un segmento cualquiera es el punto del infinito de la recta. Más adelante veremos la relación de este concepto con la teoría de polares respecto a una cónica.

Por último, definimos la razón doble de cuatro rectas a, b, c, d concurrentes en un punto ordinario O como

$$(ab, cd) = \frac{\overline{\text{sen } \angle AOC} \cdot \overline{\text{sen } \angle DOB}}{\overline{\text{sen } \angle AOD} \cdot \overline{\text{sen } \angle COB}},$$

donde A, B, C, D son puntos cualesquiera de las rectas a, b, c, d , respectivamente. La extensión al caso en que O es ideal es obvia, pues a, b, c, d serían paralelas y simplemente basta tomar $(ab, cd) = (AB, CD)$, donde A, B, C, D son los puntos obtenidos al cortar las cuatro rectas por una transversal cualquiera. Usaremos también la notación $O(AB, CD)$ para indicar esta razón doble.

Con estas definiciones es evidente que *la razón doble de cuatro rectas concurrentes es igual a la razón doble de los cuatro puntos obtenidos al cortarlas por una transversal cualquiera, propiedad que utilizaremos reiteradamente en lo que sigue.*

4. El teorema de Desargues de los dos triángulos

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos en un mismo plano. El **teorema de Desargues** afirma que AA' , BB' y CC' concurren en un punto si y sólo si los puntos $P = BC \cap B'C'$, $Q = AC \cap A'C'$ y $R = AB \cap A'B'$ están sobre una recta. Es decir, las rectas que unen los vértices son concurrentes si y sólo si los lados correspondientes se cortan en puntos alineados.

Veamos una demostración muy sencilla basada en la invarianza de la razón doble por proyección y sección. Consideremos los tres puntos auxiliares $X = AB \cap CC'$, $X' = A'B' \cap CC'$ e $Y = PQ \cap CC'$, tal y como se indican en la Figura 5.

Supongamos primero que las rectas AA' , BB' y CC' concurren en O . Entonces,

$$\begin{aligned} C(YP, QR) &= (XB, AR) = O(XB, AR) \\ &= (X'B', A'R) = C'(X'B', A'R) = C'(YP, QR). \end{aligned}$$

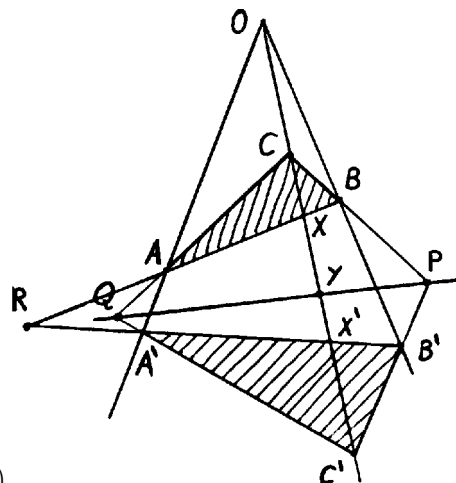


Figura 5

Dicho de otro modo, la razón doble de las tres rectas CY, CP, CQ, CR concurrentes en C es igual a la razón doble de las tres rectas $C'Y, C'P, C'Q, C'R$ concurrentes en C' . Cortando transversalmente por la recta $t = YPQ$, obtenemos que $(YP, QR_1) = (YP, QR_2)$, siendo $R_1 = t \cap CR$ y $R_2 = t \cap C'R$. Pero de la definición de razón doble se sigue que esta igualdad se da si y sólo si $(YP, R_1) = (YP, R_2)$. Ahora bien, como hemos visto antes, fijado el segmento YP la razón simple establece una correspondencia uno a uno entre los puntos de la recta ampliada t y los valores del cuerpo de números reales “ampliado con ∞ ”, lo que implica que necesariamente $R_1 = R_2 = R$. En particular, R pertenece a la recta $t = YPQ$, es decir, P, Q, R están alineados.

El recíproco es similar: si P, Q, R están alineados entonces

$$(RA, XB) = C(RA, XB) = C(RQ, YP) = C'(RQ, YP) = (RA', X'B'),$$

de donde por un razonamiento análogo al de antes se deduce que necesariamente $AA', XX'(= CC')$ y BB' son rectas concurrentes en un punto. \square

Como aplicación del teorema de Desargues tenemos un sencillo método constructivo para resolver el siguiente problema: *“Utilizando sólo una regla (sin marcar), trazar por un punto dado la recta que pasa por el punto de intersección de otras dos rectas dadas que se cortan fuera de nuestro alcance”*.

Sea A el punto dado y denotemos por p y q las rectas dadas. Marcamos dos puntos cualesquiera B y C sobre p y q , respectivamente, formando así un triángulo ABC . Trazamos una recta cualquiera t que corte a los tres lados BC , AC y AB del triángulo ABC dentro de los límites del dibujo en los puntos P, Q, R , respectivamente. Trazamos ahora una recta (distinta de BC) que pase por P , la cual cortará a p y q en B' y C' , respectivamente. Las rectas $B'R$ y $C'Q$ determinan un punto A' . Del teorema de Desargues concluimos que AA' es la recta buscada.

5. Pascal y su “mysterium hexagrammicum”

El teorema del “hexagrama místico” de Pascal muestra una propiedad básica de los hexágonos inscritos en una cónica, y es uno de los resultados fundamentales de la geometría proyectiva plana. Comencemos viendo primero una propiedad importante sobre circunferencias y razones dobles: *si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una circunferencia y si V, V' son otros dos puntos cualesquiera de ella, entonces $V(AB, CD) = V'(AB, CD)$* . Aquí tanto V como V' pueden coincidir con alguno de los cuatro puntos dados, en cuyo caso, si por ejemplo $V = A$, la recta VA debe entenderse como la tangente a la circunferencia dada en el punto A .

La demostración de este resultado es simple, pues basta aplicar las relaciones angulares elementales en un círculo. Fijémonos en la cuerda AC , y sea O el centro de la circunferencia dada. Si V no coincide con A entonces $\text{sen } \overline{\angle AVC} = \text{sen } \frac{\overline{\angle AOC}}{2}$, ya que el ángulo (orientado) con el que vemos la cuerda AC desde el centro de la circunferencia es siempre el doble del ángulo (orientado) con el que la vemos desde un punto cualquiera V de ella. Por otro lado, como el ángulo (orientado) que forma una cuerda con la recta tangente a la circunferencia en uno de sus extremos es igual a la mitad del ángulo (orientado) con el que vemos la cuerda desde el centro, resulta

que en el caso $V = A$ también tenemos $\text{sen } \overline{\angle AVC} = \text{sen } \frac{\overline{\angle AOC}}{2}$. Razonando de manera similar para las restantes cuerdas AD , CB y DB , concluimos que

$$V(AB, CD) = \frac{\text{sen } \overline{\angle AVC} \cdot \text{sen } \overline{\angle DVB}}{\text{sen } \overline{\angle AVD} \cdot \text{sen } \overline{\angle CVB}} = \frac{\text{sen } \frac{\overline{\angle AOC}}{2} \cdot \text{sen } \frac{\overline{\angle DOB}}{2}}{\text{sen } \frac{\overline{\angle AOD}}{2} \cdot \text{sen } \frac{\overline{\angle COB}}{2}}$$

es una cantidad independiente del punto V considerado sobre la circunferencia.

QED

Esta propiedad que acabamos de probar no sólo es cierta para una circunferencia, sino que también es válida para cualquier cónica. En efecto, proyectando la circunferencia desde un punto exterior al plano que la contiene y seccionando por planos obtenemos las distintas cónicas. Ahora bien, como la razón doble es un invariante proyectivo, el resultado demostrado para la circunferencia sigue siendo válido para cualquiera de estas secciones cónicas (ver Figura 6): si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una cónica y si V, V' son otros dos puntos cualesquiera de ella, entonces $V(AB, CD) = V'(AB, CD)$.

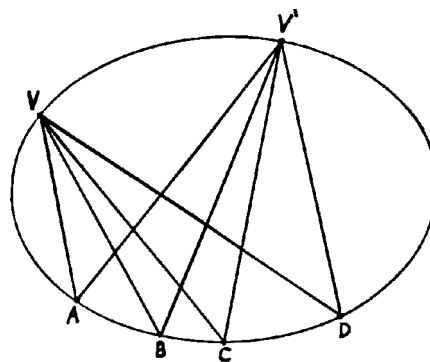


Figura 6

Estamos ya en condiciones de dar una sencilla demostración del **teorema del hexágono inscrito de Pascal**: Dado un hexágono inscrito en una cónica, los tres pares de lados opuestos se cortan en puntos alineados.

Llamemos $ABCDEF$ a nuestro hexágono, es decir, los seis puntos ordenados (en principio distintos) A, B, C, D, E y F de la cónica determinan un hexágono inscrito en ella que puede no ser convexo en general, como sucede en la Figura 7. Debemos demostrar que los puntos $L = AB \cap DE$, $M = BC \cap EF$ y $N = CD \cap FA$ de intersección de los tres pares de lados opuestos están alineados. Como estamos en una cónica, por la propiedad que acabamos de probar, sabemos que $A(EB, DF) = C(EB, DF)$. Cortemos ahora las cuatro rectas concurrentes en A por la transversal ED , y las cuatro rectas concurrentes en C por la transversal EF , obteniendo de esta manera las cuaternas de puntos alineados $E, L, D, H = AF \cap ED$ y $E, M, K = CD \cap EF, F$, respectivamente, cuyas razones dobles son iguales. Pero razonando igual que en la parte final de la demostración del teorema de Desargues, como $(EL, DH) = (EM, KF)$ necesariamente LM, DK y HF son

rectas concurrentes. Por lo tanto, el punto $N = DK \cap HF$ está en la recta LM o, dicho de otro modo, L, M y N están alineados. $\square QED$

Dado un hexágono inscrito en una cónica, la recta que pasa por los tres puntos en los que los pares de lados opuestos se cortan recibe el nombre de *recta de Pascal* del hexágono. Cabe observar que dados seis puntos A, B, C, D, E, F sobre una cónica hay 60 hexágonos distintos que los tienen por vértices, dependiendo del orden en el que se escojan. En efecto, en principio tenemos $6!$ permutaciones, pero cada seis de ellas obtenidas por permutación cíclica de una dada dan lugar al mismo hexágono (por ejemplo, $BCDEFA$ es el mismo que $ABCDEF$),

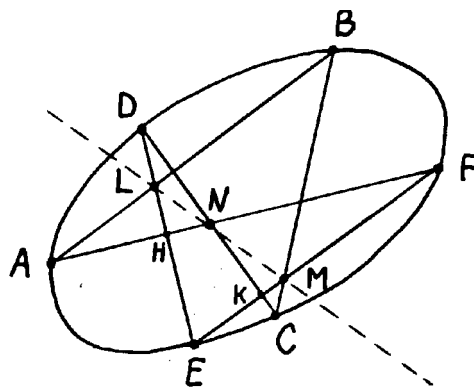


Figura 7

y cada permutación y la que resulta de invertir el orden de los puntos dan lugar también al mismo hexágono (por ejemplo, $FEDCBA$ es el mismo que $ABCDEF$); por lo tanto, el número total de hexágonos distintos es $6!/(2 \cdot 6) = 60$. Ahora cada uno de estos hexágonos tiene asociada su propia recta de Pascal. Muchas propiedades han sido investigadas sobre la configuración formada por las rectas de Pascal: por ejemplo, se ha demostrado que estas 60 rectas concurren tres a tres en 20 puntos, llamados *puntos de Steiner*, y que a su vez éstos se encuentran de cuatro en cuatro sobre 15 rectas, denominadas *rectas de Plücker*.

Adaptando ligeramente la demostración del teorema de Pascal es sencillo ver que el resultado sigue siendo válido cuando permitimos que dos vértices consecutivos coincidan, siempre que en tal caso sustituyamos el lado que desaparece por la tangente a la cónica en el vértice. Por este procedimiento se obtienen las siguientes *situaciones límite del teorema de Pascal*:

- 1) En todo *pentágono* $ABCDE$ inscrito en una cónica, la tangente en A corta al lado CD en un punto que está alineado con los puntos de intersección $AB \cap DE$ y $BC \cap EA$. (Esto corresponde al caso límite $F = A$ en el teorema de Pascal.)
- 2) En todo *cuadrilátero* $ABCD$ inscrito en una cónica, el punto de intersección de la tangente a la cónica en A con la tangente a la cónica en C está alineado con los puntos $AB \cap CD$ y $BC \cap AD$. (Esto corresponde al caso $F = A$ y $D = C$ en el teorema de Pascal.) También se verifica que los puntos de

intersección de la tangente a la cónica en A con BC y de la tangente en B con AD están alineados con el punto de intersección $AB \cap CD$. (Esto corresponde al caso límite $F = A$ y $C = B$.)

- 3) Finalmente, en todo *triángulo* inscrito en una cónica, los puntos en los que las tangentes en los vértices cortan a los lados opuestos están sobre una recta.

Un resultado clásico descrito por Pappus en la proposición 139 del libro VII de su obra titulada *Colección Matemática* afirma que si los vértices de un hexágono yacen alternativamente sobre dos rectas entonces los pares de lados opuestos se cortan en puntos alineados, es decir, si A, B, C son tres puntos de una recta y A', B', C' son tres puntos de otra, entonces los puntos de intersección $AB' \cap A'B$, $BC' \cap B'C$ y $AC' \cap A'C$ están alineados. Este resultado, conocido como el **teorema de Pappus**, puede pensarse como un caso particular del teorema de Pascal (más bien, como un caso degenerado) cuando la cónica se reduce a dos rectas, por ejemplo cuando una hipérbola degenera en sus asíntotas. Es muy fácil dar una demostración inspirándose en la prueba del teorema de Pascal que hemos visto antes.

El teorema de Pascal nos permite dar una ingeniosa aplicación a la construcción de cónicas: *Utilizando sólo una regla, podemos obtener cuantos puntos deseemos de una cónica de la que sólo conocemos cinco de sus puntos.*

Sean A, B, C, D y E conocidos, y tracemos, por ejemplo, por A una recta l cualquiera sobre la cual queremos hallar el punto X en el que l corta a la cónica. Considerando este sexto punto X (que aún no conocemos) tendríamos un hexágono $AXBCDE$ inscrito en la cónica, del cual conocemos su recta de Pascal p ya que esta recta une los puntos $L = AX \cap CD = l \cap CD$ y $M = BC \cap EA$. Ahora bien, como p debe pasar también por el punto $N = XB \cap DE = p \cap DE$, resulta que el punto X buscado se obtiene al cortar la recta BN con DE . Variando ahora la recta l , obtenemos por este procedimiento cuantos puntos queramos de la cónica.

Más aún, teniendo en cuenta los casos límite del teorema de Pascal podemos idear fácilmente métodos constructivos para resolver los siguientes problemas: si de una cónica conocemos cuatro puntos y la tangente a la cónica en uno de ellos, o tres puntos y las tangentes en dos de ellos, entonces usando solamente una regla podemos hallar cuantos puntos de la cónica deseemos y la tangente a la cónica en uno de los puntos dados.

6. El teorema de Brianchon

Intuitivamente uno tiende a considerar el plano ampliado como un conjunto de puntos, pero también podemos considerarlo como una colección de rectas. Cuando pensemos en el plano como plano puntual emplearemos la notación \mathcal{P} , mientras que \mathcal{R} indicará que lo estamos entendiendo como plano reglado. Vamos a mostrar ahora una interesante transformación proyectiva de \mathcal{P} sobre \mathcal{R} con la ayuda de una circunferencia auxiliar fijada en el plano.

Sea $O(r)$ una circunferencia dada de centro O y radio r . A cada punto ordinario A distinto de O le hacemos corresponder la recta p_A , que llamaremos *polar de A* , construida de la siguiente manera: si A' es el punto de la recta OA tal que $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = r^2$, entonces p_A es la recta perpendicular a OA que pasa por A' . Definimos la polar de O como la recta del infinito del plano. Por último, si A es un punto ideal entonces su polar es el diámetro de la circunferencia cuya dirección es perpendicular a la “dirección A ”.

De esta manera tenemos definida una aplicación uno a uno del plano puntual \mathcal{P} sobre el plano reglado \mathcal{R} , pues dada una recta l cualquiera es obvio que existe un único punto A , llamado *polo de l* , tal que l es la recta polar de A , es decir, $l = p_A$.

En las obras de Apolonio y Pappus pueden encontrarse resultados sencillos sobre polares, aunque fueron Desargues y La Hire los pioneros en el desarrollo de esta teoría. Poncelet fue más allá y utilizó esta transformación para enunciar su principio de reciprocidad polar, que luego veremos. Estas ideas condujeron posteriormente a Gergonne a establecer el principio general de dualidad de la geometría proyectiva.

La “transformación polo-polar” tiene propiedades muy interesantes. En primer lugar, es evidente que si A es un punto de la circunferencia entonces su polar es la recta tangente a la circunferencia en A . Veamos a continuación que *cuando A es exterior a la circunferencia, su polar es la recta que une los puntos de contacto de las tangentes a la circunferencia trazadas desde A* . En efecto, si A es ideal esto es evidente por la propia definición de polar, por lo que basta verlo para A ordinario: sea T uno de esos puntos de contacto y H el pie de la perpendicular a OA trazada desde T ; como los triángulos OTA y OHT son semejantes tenemos que $\overline{OT}/\overline{OA} = \overline{OH}/\overline{OT}$, es decir, $\overline{OA} \cdot \overline{OH} = (\overline{OT})^2 = r^2$, lo que implica $H = A'$.

Otra propiedad elemental, pero sumamente útil, es que $B \in p_A$ si y sólo si $A \in p_B$, es decir, *un punto está en la polar de otro si y sólo si éste yace en la polar del primero*. Para verlo, basta probar que si $B \in p_A$ entonces $A \in p_B$.

Además, si A o B son ideales, o si alguno de ellos es el centro de la circunferencia, entonces el resultado se sigue de la definición de polar. Supongamos que A y B son ordinarios, y sea B' el punto de la recta OB tal que $\overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2$. Como $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} = r^2$, resulta que $\overline{OA}/\overline{OB'} = \overline{OB}/\overline{OA'}$ y los triángulos OAB' y OBA' son semejantes. Luego, $\angle OB'A = \angle OA'B = 90^\circ$ y $B'A$ es necesariamente la polar de B , en particular, $A \in p_B$.

Esta propiedad tiene una consecuencia inmediata: *las polares de puntos alineados son rectas concurrentes*, es decir, en la transformación polo-polar las “rectas” de \mathcal{P} (entendidas como colecciones de puntos alineados) van a parar a “puntos” de \mathcal{R} (entendidos éstos como colecciones o haces de rectas concurrentes).

En 1806 Brianchon, siendo todavía estudiante en la Escuela Politécnica de París, demostró por polaridad su célebre resultado, ahora conocido como **teorema de Brianchon**: *Si un hexágono (no necesariamente convexo) se circunscribe a una cónica, entonces las tres rectas que unen pares de vértices opuestos son concurrentes.*

La siguiente demostración es esencialmente la dada por el propio Brianchon. Supongamos en primer lugar que la cónica es una circunferencia, y sea $ABCDEF$ el hexágono circunscrito a ella (Figura 8). Queremos ver que AD , BE y CF son

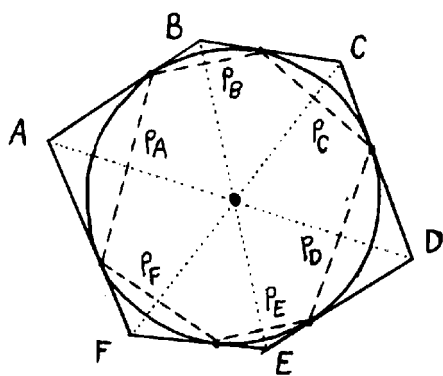


Figura 8

concurrentes. Como AB, BC, CD, DE, EF y FA son tangentes a la circunferencia, tenemos que las rectas polares p_A, p_B, p_C, p_D, p_E y p_F dan lugar a un hexágono inscrito. El teorema de Pascal que hemos probado en la sección anterior implica entonces que los puntos de intersección $L = p_A \cap p_D$, $M = p_B \cap p_E$ y $N = p_C \cap p_F$ de sus tres pares de lados opuestos están alineados. Por lo tanto, las rectas polares asociadas a L, M y N serán concurrentes. Pero estas rectas son precisamente $AD = p_L, BE = p_M$ y $CF = p_N$, ya que

como $L \in p_A$ y $L \in p_D$ resulta que $A, D \in p_L$, etc... Luego, el teorema de Brianchon queda probado para una circunferencia.

Ahora bien, si proyectamos un hexágono circunscrito a una circunferencia y seccionamos por un plano, ésta se transformará en una cónica, el hexágono correspondiente estará circunscrito a dicha cónica, y obviamente las tres rectas que unen

los pares de vértices opuestos seguirán siendo concurrentes, por lo que el resultado sigue siendo válido para toda cónica. \square

Al igual que en el teorema de Pascal, pueden obtenerse varios casos límite del teorema de Brianchon para pentágonos, cuadriláteros y triángulos circunscritos a una cónica. Es también posible dar algunas aplicaciones a la construcción de cónicas, como por ejemplo: *conocidas cinco tangentes, trazar cuantas tangentes queramos a la cónica.*

Resulta curioso que el teorema de Brianchon, aunque basado en el de Pascal, vió la luz un siglo y medio después de la publicación de éste, coincidiendo con el resurgimiento de la geometría proyectiva.

7. Reciprocidad polar y el principio de dualidad

El uso de polares nos ha permitido dar una prueba sencilla de teorema de Brianchon, clave en geometría proyectiva ya que jugó un papel fundamental en el reconocimiento del principio de dualidad. De hecho, el artículo de Brianchon fue una de las primeras publicaciones en que se empleó la teoría de polos y polares para obtener nuevos resultados geométricos. Sin embargo, la definición de recta polar que hemos dado no es satisfactoria desde el punto de vista proyectivo ya que involucra el uso de distancias y ángulos, magnitudes que no se conservan por proyección y sección.

Veamos que esta noción admite una definición alternativa que sí es proyectiva y que nos permitirá extender la teoría de polos y polares con respecto a cualquier cónica en general. Sea B un punto de la recta polar p_A de un punto A respecto a una circunferencia que suponemos fijada. No es difícil demostrar que si la recta AB corta a la circunferencia en C y D , como se ilustra en la Figura 9, entonces estos cuatro puntos forman una cuaterna armónica, es decir, $(AB, CD) = -1$. En particular, los conjugados armónicos de A con respecto a los puntos de corte de cualquier recta secante a la circunferencia están todos alineados, pues yacen en la recta p_A .

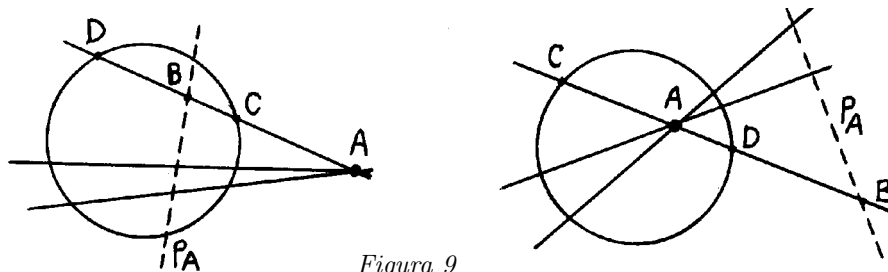


Figura 9

Por proyección y sección, esta propiedad se traslada automáticamente a cualquier cónica. Por tanto, fijada una cónica en el plano, si una recta variable que pasa por un punto dado A es secante a ella, entonces los conjugados armónicos de A con respecto a los puntos de corte con la cónica están todos alineados en una recta l . Esto sugiere definir la *recta polar de A respecto a la cónica*, denotada p_A , como la recta l así obtenida. El punto A se dice entonces que es el *polo de p_A con respecto a la cónica*.

En consecuencia, fijada una cónica en el plano, tenemos definida una transformación polo-polar de \mathcal{P} sobre \mathcal{R} con respecto a ella. Las propiedades elementales sobre polares (respecto a una circunferencia) vistas en la sección anterior siguen siendo válidas para la transformación polo-polar con respecto a una cónica, ya que eran propiedades proyectivas. Más aún, es fácil demostrar que esta transformación conserva las razones dobles, es decir, si A, B, C, D están alineados entonces $(p_A, p_B, p_C, p_D) = (AB, CD)$.

Las propiedades de esta transformación polo-polar, también llamada *reciprocidad* respecto a la cónica, condujeron a Poncelet a establecer en 1818 su *principio de reciprocidad polar*, que puede resumirse grosso modo de la siguiente manera. Imaginemos que hemos obtenido una propiedad proyectiva de una configuración de puntos \mathcal{F} . Si ahora fijamos una cónica en el plano, entonces obtendremos otra configuración \mathcal{F}' , llamada *recíproca polar* de \mathcal{F} , al transformar los puntos de \mathcal{F} en sus rectas polares con respecto a la cónica dada. Debemos tener en cuenta que si en la configuración de partida \mathcal{F} un punto recorre una curva \mathcal{C} entonces la correspondiente familia de rectas polares envolverá una curva \mathcal{C}' en la configuración \mathcal{F}' obtenida, y es así como deben entenderse las transformaciones de curvas. Pues bien, el principio de reciprocidad polar establece que de la propiedad proyectiva de \mathcal{F} obtendremos automáticamente una propiedad proyectiva correspondiente para la configuración \mathcal{F}' , en la que los papeles que juegan las palabras “punto” y “recta” se han intercambiado. Por ejemplo, el teorema de Brianchon se obtiene a partir del teorema de Pascal sin más que aplicar este principio, y esto es lo que en esencia hemos utilizado en su demostración.

Pero el principal problema para aplicar este principio radica en que es necesaria la presencia de una cónica auxiliar. Sin embargo, Gergonne insistía en la parte general del principio y defendía que podía ser aplicado a todos los teoremas en los que sólo intervinieran propiedades proyectivas. En 1826 introdujo el concepto general de *dualidad*, según el cual a partir de un teorema (proyectivo) dado se obtiene un nuevo teorema, llamado *dual* o *correlativo*, sin más que intercambiar las palabras

“punto” y “recta”. Además, una demostración del teorema dual se obtiene a partir de la demostración del teorema inicial simplemente intercambiando de nuevo estas palabras, es decir, dualizando el razonamiento.

Este principio de dualidad llevó a Gergonne a descubrir nuevos resultados y publicó una serie de pares de teoremas duales utilizando un curioso sistema de dobles columnas, que consistía en escribir enfrente de cada teorema la correspondiente proposición correlativa. Por ejemplo, el teorema de Pascal y el de Brianchon constituyen un par de teoremas duales. El teorema de Desargues es un ejemplo de resultado “autodual”, es decir, su dual es exactamente el mismo que el de partida. Dualicemos ahora el teorema de Pappus, el cual establecía que si los vértices de un hexágono yacen alternativamente sobre dos rectas, entonces los tres pares de lados opuestos se cortan en puntos alineados. Por tanto, su *teorema dual* afirma que *si los lados de un hexágono concurren alternativamente en dos puntos, entonces las tres rectas que unen los vértices opuestos son concurrentes*.

En torno al principio de dualidad se desató una gran polémica entre Gergonne y Poncelet, en la que Gergonne llegó incluso a acusar de plagio a Poncelet. Aunque en un principio hubo cierta amistad entre ellos, pronto se convirtieron en adversarios a raíz de las discusiones que surgieron entre los partidarios de los métodos sintéticos en la geometría, como Poncelet, y los defensores de las técnicas analíticas, como Gergonne. Éste había fundado en 1810 sus *Annales de mathématiques pures et appliquées*, una de las primeras revistas periódicas en matemáticas, en la cual Poncelet publicó su principio de reciprocidad. A partir de este hecho comenzaron a defender sus puntos de vista y a publicar artículos en los *Annales* hasta que en 1826, a raíz de la publicación de Gergonne de su principio general de dualidad, estalló la controversia sobre la prioridad en la obtención de este principio y se convirtieron en grandes enemigos, hasta el punto de que sus ataques mutuos tuvieron gran repercusión en la época.

8. Fundamentación axiomática de la geometría proyectiva plana

A lo largo de las secciones anteriores hemos trabajado en todo momento en un modelo intuitivo de plano proyectivo, esencialmente siguiendo el desarrollo histórico de la geometría proyectiva. Pero queda abierta la cuestión de la consistencia de este modelo, es decir, ¿hasta qué punto podemos asegurar que al seguir desarrollando esta teoría no llegaremos nunca a una contradicción?

En 1882, Pasch llevó a cabo el primer intento de fundamentación axiomática de

la geometría proyectiva. Posteriormente, Veblen y Young establecieron un conjunto independiente de axiomas y presentaron una organización de la geometría proyectiva basada en ideas previas de Klein, según las cuales la geometría proyectiva es el marco general dentro del cual aparecen diferentes especializaciones, como la geometría euclídea y las geometrías no euclídeas. En concreto, Klein había dado en 1871 una interpretación proyectiva de las geometrías no euclídeas, en particular un modelo de la geometría hiperbólica descubierta independientemente por Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), Karl-Friedrich Gauss (1777-1855) y Janos Bolyai (1802-1860), en la que se cumplen los cuatro primeros postulados de Euclides, pero no el quinto referente a las paralelas. Para obtener este modelo Klein consideró una cónica en el plano, a la que llamó *el absoluto*, y generalizó resultados anteriores debidos fundamentalmente a Cayley, como el hecho de que las propiedades métricas de las figuras son en realidad sus propiedades proyectivas relativas al absoluto. Pero Klein fue más lejos ya que concibió que el concepto de grupo ofrecía posibilidades unificadoras para la geometría. En su disertación inaugural de 1872 como *Privat Dozent* en Erlangen mostró cómo la noción de grupo podía ser aplicada de manera cómoda para caracterizar las distintas geometrías que surgieron durante el siglo XIX (*programa Erlangen*), y llegó a la conclusión de que éstas son subgeometrías de la geometría proyectiva.

Volviendo a la fundamentación axiomática de la teoría, se pueden considerar distintos conjuntos de postulados para la geometría proyectiva plana. Los que damos a continuación se deben a K. Menger (publicados en 1948 en la revista *American Mathematical Monthly*) y en ellos los términos primitivos son “punto”, “recta” y “sobre”:

- I. *Hay una y sólo una recta sobre cada dos puntos distintos, y uno y sólo un punto sobre cada dos rectas distintas.*
- II. *Existen dos puntos y dos rectas tales que cada uno de los puntos está sólo sobre una de las rectas y cada una de las rectas está sólo sobre uno de los puntos.*
- III. *Existen dos puntos y dos rectas, no estando los puntos sobre las rectas, tales que el punto sobre las dos rectas está sobre la recta que pasa sobre los dos puntos.*

Estos postulados son especialmente interesantes porque resultan ser autoduales, lo que permite admitir de inmediato el principio de dualidad en la geometría proyectiva plana desarrollada a partir de ellos. Diremos *plano proyectivo* al objeto consti-

tuido por dos conjuntos no vacíos de elementos llamados “puntos” y “rectas”, con una relación “sobre” entre puntos y rectas, cumpliendo los postulados I, II y III.

Un hecho significativo es que ni el teorema de Desargues de los dos triángulos ni el teorema de Pappus están implicados por estos postulados. Es decir, estos teoremas son independientes de ellos. Cuando un plano proyectivo cumple el teorema de Desargues se dice que es *desarguesiano*, y si cumple el de Pappus se llama *pappiano*. Puede demostrarse que *todo plano proyectivo pappiano es desarguesiano*.

Otra cuestión interesante es que en ningún momento hemos exigido que el número de puntos de un plano proyectivo sea infinito. De hecho, pueden considerarse geometrías proyectivas, llamadas *finitas*, que sólo contienen un número finito de puntos y rectas distintos, como la geometría proyectiva de los siete puntos de Fano, o la geometría finita de Young de los nueve puntos y doce rectas.

Una contribución sustancial a la geometría proyectiva fue el desarrollo de métodos analíticos realizado por Plücker, quien utilizó sistemáticamente coordenadas homogéneas en el plano, llegando a obtener la contrapartida analítica del principio de dualidad. Si $[x, y, z]$ denotan las coordenadas homogéneas de un punto cualquiera del plano, la ecuación de una recta se escribe como $ax + by + cz = 0$, para ciertas constantes a, b, c . Plücker tuvo la idea de considerar x, y, z como constantes y hacer variar $[a, b, c]$, con lo que la ecuación anterior determina el haz de rectas que pasan por el punto fijo $[x, y, z]$. Por tanto, la ecuación $ax + by + cz = 0$ puede especificar indistintamente una recta como un lugar de puntos o un punto como un lugar de rectas, lo que llevó a Plücker a explicar analíticamente el principio general de dualidad de Gergonne.

Con la introducción posterior de la noción de espacio vectorial, uno llega fácilmente a obtener un modelo algebraico de nuestro plano ampliado. Situando el ojo en el origen $O = (0, 0, 0)$ del espacio tridimensional real \mathbb{R}^3 , resulta que todos los puntos P a lo largo de cada rayo que parte de O son idénticos, porque el ojo sólo ve un punto en cada dirección. Por tanto, estos puntos deben ser identificados por la relación de equivalencia \sim siguiente: $P = (x, y, z) \sim P' = (x', y', z')$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que $x' = \lambda x, y' = \lambda y, z' = \lambda z$. El conjunto cociente $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ obtenido a partir de $\mathbb{R}^3 - \{O\}$ por esta relación de equivalencia, denominado *plano proyectivo real*, es un modelo del plano ampliado.

Pero exactamente la misma construcción se puede llevar a cabo partiendo de un cuerpo \mathbb{K} cualquiera y considerando la correspondiente relación \sim sobre $\mathbb{K}^3 - \{O\}$, o en general sobre $V - \{O\}$, siendo V un espacio vectorial cualquiera de dimensión 3

sobre \mathbb{K} . Obtenemos así un *plano proyectivo* $\mathbb{P}^2(V)$ sobre el cuerpo \mathbb{K} al cocientar $V - \{O\}$ por la relación \sim . Se puede probar que estos planos proyectivos cumplen los postulados I, II y III anteriores y que el teorema de Desargues es válido, es decir, proporcionan ejemplos de geometrías desarguesianas. Cabe notar que la dualidad es consecuencia directa del hecho algebraico bien conocido por el que todo espacio vectorial V es isomorfo a su dual V^* , lo cual implica que los espacios $\mathbb{P}^2(V)$ y $\mathbb{P}^2(V^*)$ se identifican, y las rectas de $\mathbb{P}^2(V)$ son precisamente los puntos de $\mathbb{P}^2(V^*)$. Sin embargo, estos planos proyectivos no son pappianos en general: en efecto, puede demostrarse que el teorema de Pappus se cumple si y sólo si el cuerpo \mathbb{K} es conmutativo. En particular, cuando \mathbb{K} es un cuerpo finito se obtienen geometrías finitas.

Aunque hemos hecho referencia en todo momento al plano proyectivo, es claro que muchas de las ideas vistas se extienden a dimensión superior y es posible desarrollar una geometría proyectiva n -dimensional. Por ejemplo, partiendo de un espacio vectorial V de dimensión $n + 1$ sobre un cuerpo \mathbb{K} , podemos definir un espacio proyectivo n -dimensional $\mathbb{P}^n(V) \equiv V - \{O\} / \sim$. Resulta que el teorema de Desargues es válido para triángulos en cualquier espacio proyectivo así definido, aunque los triángulos estén contenidos en planos distintos, y la demostración es en esencia la misma que en dimensión dos. Sin embargo, desde el punto de vista de la fundamentación axiomática de la geometría existen algunas diferencias importantes entre el plano y los espacios proyectivos de dimensión superior a dos. Por ejemplo, el teorema de Desargues se cumple en toda geometría de incidencia de dimensión ≥ 3 , mientras que existen geometrías (planas) no desarguesianas.

Para finalizar, cabe destacar que la geometría proyectiva tiene en la actualidad interesantes aplicaciones a teoría de códigos, criptografía, teoría de comunicación o visión artificial, entre otros campos.

Bibliografía

Algunos clásicos sobre Geometría Proyectiva y Geometría en general:

- [1] *Mathematics in the modern world*. Readings from Scientific American. With introductions by Morris Kline, W. H. Freeman and Co., San Francisco, 1968.
- [2] H.S.M. Coxeter, *Projective Geometry*, second edition, Springer-Verlag, New York, 1987.

- [3] H. Eves, *Estudio de las geometrías*, tomo 1, UTEHA, México D.F., 1969.
- [4] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Co., New York, 1952.
- [5] D. Pedoe, *An introduction to Projective Geometry*, Macmillan Publishing Co., New York, 1963.
- [6] Luis A. Santaló, *Geometría Proyectiva*, EUDEBA, Buenos Aires, 1966.
- [7] O. Veblen y J.W. Young, *Projective Geometry*, volumen 1, Blaisdell Publishing Co., New York, 1966.

Geometría Proyectiva y aplicaciones:

- [8] A. Beutelspacher y U. Rosenbaum, *Projective Geometry: from foundations to applications*, Cambridge University Press, 1998.
- [9] M.A. Penna, *Projective Geometry and its applications to computer graphics*, Prentice Hall, 1991.

Geometría Proyectiva en la red:

- [10] *Exposición permanente sobre Geometría Proyectiva (Universidad Complutense de Madrid):*
ochoa.mat.ucm.es/~jesusr/expogp.html.
- [11] *The MacTutor History of Mathematics archive:*
www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history.
- [12] *Eric Weisstein's world of Mathematics:*
mathworld.wolfram.com.