# Clasificación de superficies

por

**M. A. de Prada Vicente**

**Teorema de clasificación.** Cualquier superficie cerrada es homeomorfa a una esfera, o a un espacio obtenido removiendo un número finito de discos disjuntos de una esfera de dimensión 2, y "tapando" cada uno de ellos con una banda de Moebius (un bonete cruzado) o un toro con un agujero (un asa).

Equivalentemente, cualquier superficie es homeomorfa a una esfera, a una suma conexa de toros o a una suma conexa de planos proyectivos.

**Comentarios.**

La existencia de un teorema de clasificación de superficies es importante, hace que nuestro conocimiento de ellas sea más completo que el de variedades de dimensión superior.

Se sabe que cualquier superficie compacta simplemente conexa es homeomorfa a $\mathbb{S}^2$. No se conoce un resultado similar para variedades compactas de dimensión 3 (conjetura de Poincaré).

Existen invariantes topológicos fáciles de calcular, que permiten determinar si dos variedades compactas de dimensión 2 son equivalentes (homeomorfas) o no.

### ¿Qué es una superficie?

El concepto topológico de superficie es la abstracción matemática del concepto familiar de superficie en el espacio.

El equivalente natural de una superficie, para dimensiones superiores, es el de una variedad $n$-dimensional.

Una variedad $n$-dimensional, es un espacio topológico, localmente homeomorfo al espacio euclídeo de la misma dimensión $\mathbb{R}^n$.

Una variedad $n$-dimensional con borde, es un espacio topológico en el que cada punto tiene un entorno homeomorfo, bien a un disco abierto, $E^n$, en el espacio euclídeo de dimensión $n$, o bien al subespacio $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n : x_1 \geq 0\}$. El conjunto de los puntos con un entorno homeomorfo a $E^n$, se llama el interior de la variedad, el conjunto restante constituye el borde de la variedad. Las variedades sin borde, se llaman cerradas.

Entenderemos por superficie una variedad de dimensión 2, compacta y conexa.

La esfera, el toro y el plano proyectivo real son ejemplos fundamentales de superficies, en el sentido de que cualquier superficie cerrada se puede obtener a partir de ellas, mediante el proceso, que precisaremos más adelante, de formar sumas conexas.

Las superficies pueden ser de dos tipos: orientables o no orientables.

Dar una orientacion en el plano, por ejemplo, o en un pequeña región de él, es fijar el sentido de rotación en el plano, alrededor de un punto, que se considera como positivo y el que se considera como negativo; es elegir un sistema de coordenadas como positivo: si la matriz del cambio de base tiene determinante mayor que cero, decimos que las coordenadas son de la misma clase.

Si todo camino cerrado preserva la orientacion, es decir, si moviendo un círculo orientado a lo largo de un camino cerrado, no cambia la orientación cuando volvemos al punto de partida, la superficie se dirá orientable, y no orientable en caso contrario; es decir si existe al menos un camino cerrado que no la preserva. Un ejemplo de estas últimas lo proporciona la banda de Moebius, y naturalmente cualquier superficie que contenga un subconjunto homeomorfo a ella.

La banda de Moebius es el espacio topológico definido como sigue: Sea $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -10 \leq x \leq 10, -1 \leq y \leq 1\}$, y $\sim$ la relación de equivalencia que identifica, para cada $y \in [-1,1]$, los puntos $(10,y)$ y $(-10,-y)$. El espacio cociente $X \backslash \sim$ es la banda de Moebius.

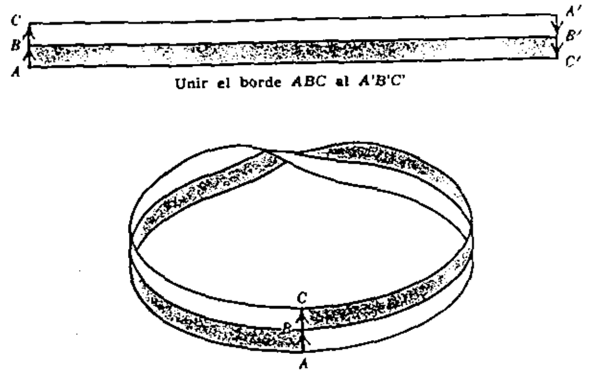


Fig. 1. *Construcción de una banda de Moebius*

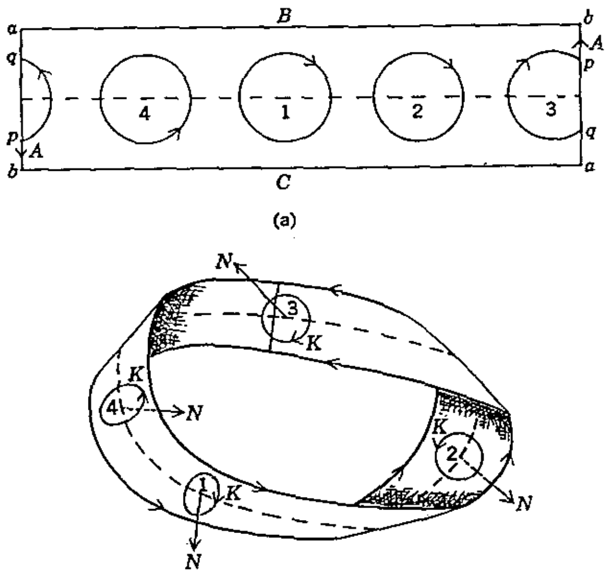


Fig. 2. No-orientabilidad de una banda de Moebius

Admitiremos que todas las superficies admiten una triangulación. (Teorema demostrado por Radó (1925)).

Investigaremos las superficies, imaginando que están cortadas en pequeños trozos, triángulos curvilíneos, por ejemplo, y considerando la forma en que estos trozos se pueden pegar, como un puzzle.

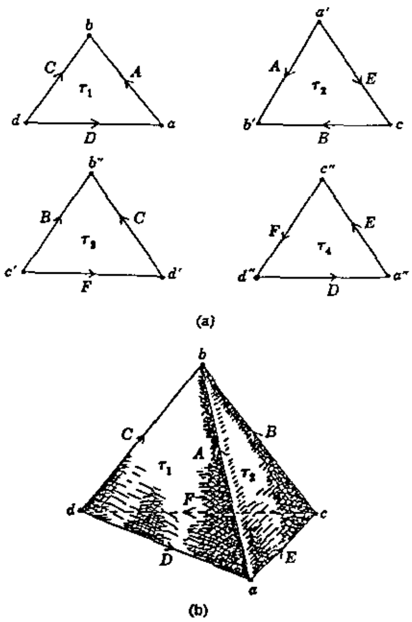

Fig. 3. Una superficie cerrada como un conjunto de triángulos emparejados. (a) Los triángulos; (b) la superficie "ensamblada" como un tetraedro.

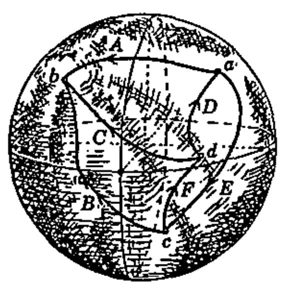

Fig. 4. Una representación de la esfera, equivalente a (b)

Topológicamente, las superficies de un tetraedro y una esfera son equivalentes.

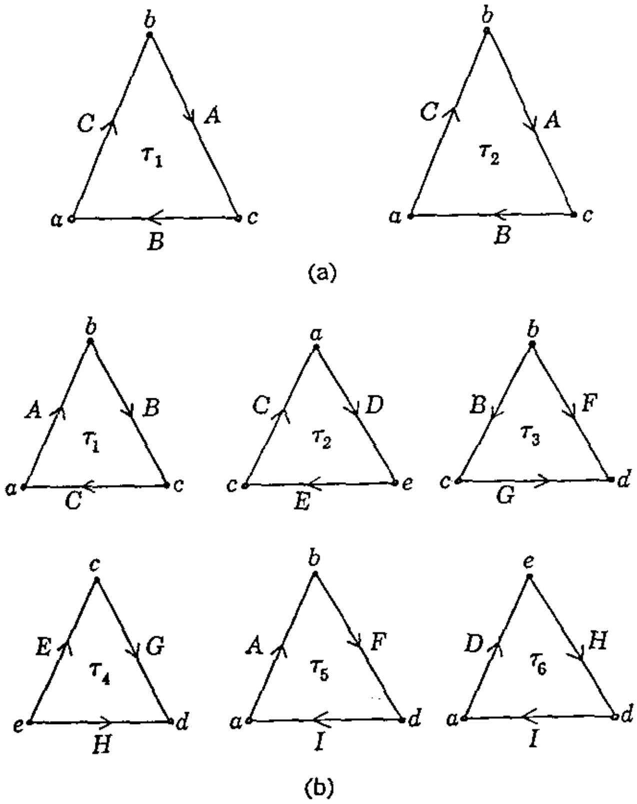


Fig. 5. Otras dos representaciones de la esfera

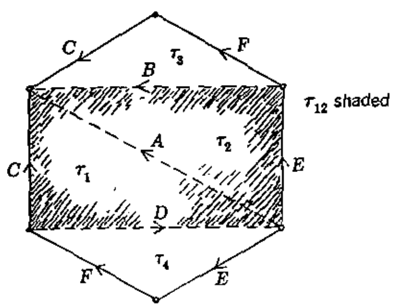


Fig. 6. Reunión de los triángulos de la Fig. 3 (a) en una región poligonal

En este sentido, decir que la superficie es *conexa*, es decir que se puede pasar de un triángulo a otro, recorriendo una sucesión de triángulos adyacentes, con aristas identificadas. En caso contrario, nos encontraríamos con dos colecciones de triángulos (cerrados) disjuntas, que contradirían la conexión.

Dada una colección de triángulos, con especificación de los pares de aristas que se identifican, tendremos que deformar las regiones, para hacer coincidir las aristas, y pegar los triángulos para construir una superficie.

Es evidente que si dos aristas están identificadas, también lo están sus vértices inicial y final.

Si hay aristas libres no identificadas con otras, como por ejemplo en el disco cerrado, éstas constituyen el borde. En caso contrario, la superficie se llama cerrada; por ejemplo: una esfera o un toro.

Si tenemos $n$ triángulos, para pegarlos, teniendo en cuenta la identificación de las aristas, quizás haya que darles la vuelta, o cambiar su forma o su tamaño.

Primero pegamos dos, para obtener una región cuadrilátera, luego la tercera, y obtendremos una región pentagonal, etc. Continuando paso a paso, se obtiene una región poligonal de $n + 2$ aristas, algunas de cuyas aristas exteriores, tendran que identificarse para obtener una superficie.

Esto sugiere la siguiente definición:

**Representación poligonal**

Una superficie es una región plana, acotada por un polígono, algunas de cuyas aristas están identificadas a pares, de acuerdo con direcciones establecidas.

Para ilustrar esta definición, es suficiente dibujar una región poligonal y asignar direcciones a sus aristas, un símbolo a cada una (ningún símbolo puede estar repetido más de dos veces). Es fácil ver que la misma superficie admite representaciones poligonales distintas.

Un símbolo conveniente para una representación poligonal de una superficie cerrada, se obtiene como sigue:

1) Se selecciona un sentido positivo.

2) Se selecciona una arista, como primera del símbolo.

3) Se escriben las aristas en orden cíclico, empezando por la primera y recorriendo el polígono en el sentido elegido positivo; cada arista llevará un superíndice $+1$ ó $-1$, dependiendo de su orientación (omitiremos el signo $+1$ en la representación del símbolo).

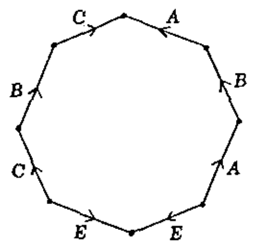


Fig. 7. Representación poligonal octogonal

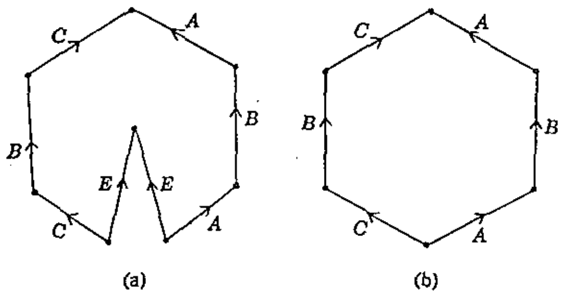


Fig. 8. Dos representaciones equivalentes

Cualquier colección de letras, en las que ninguna aparece más de dos veces, y los superíndices están arbitrariamente distribuídos, representa una superficie (se llama su símbolo poligonal).

Modos permitidos de cambiar los símbolos, sin cambiar las superficies representadas (representaciones equivalentes) son:

1) En aristas libres, se puede cambiar el superíndice $+1$ por $-1$, y viceversa. En aristas identificadas, cambiar simultáneamente el superíndice, en las dos apariciones de la arista.

2) Escribir un símbolo en orden inverso.

3) Mover bloques de letras, desde el final de un símbolo al comienzo.

Dado un símbolo de dos aristas $AA^{-1}$, se puede imaginar una cremallera a lo largo de las aristas identificadas, y, al cerrarla, deformar la superficie en una esfera. Fig. 9

## Algunas superficies elementales y sus representaciones poligonales

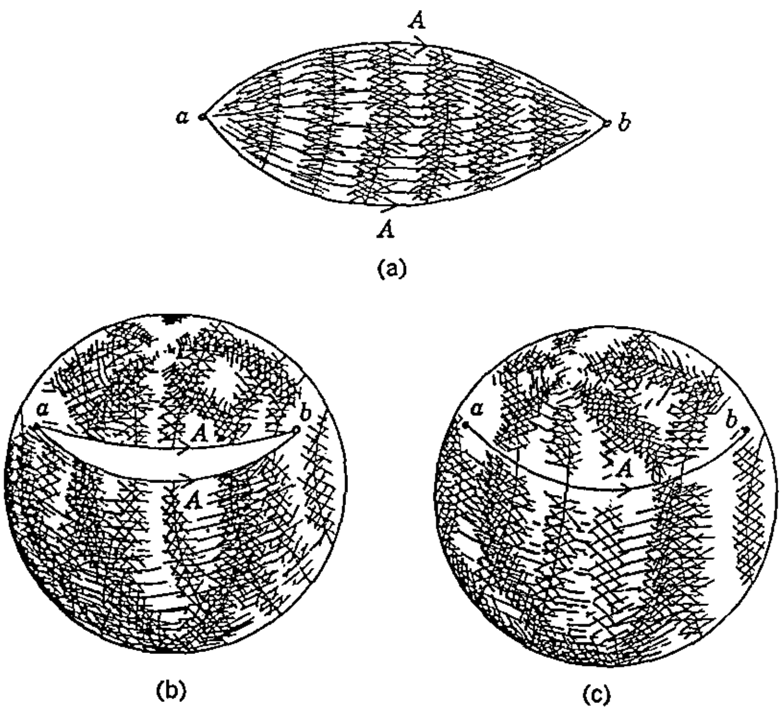


Fig. 9. La esfera

## El toro

El toro de dimensión dos se puede definir como una superficie homeomorfa a la superficie de un anillo sólido o una rosquilla.

De modo más preciso, como:

(1) Cualquier espacio topológico homeomorfo al producto de dos circunferencias $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(2) Cualquier espacio topológico homeomorfo al siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(x,y,z) : [(x^2+y^2)-2]^{\frac{1}{2}} + z^2 = 1\}.$$

(rotación del círculo $(x-2)^2 + z^2 = 1$ alrededor del eje OZ).

(3) Cualquier espacio topológico homeomorfo al espacio cociente del cuadrado unidad en $\mathbb{R}^2$, obtenido identificando los lados opuestos del cuadrado en la forma siguiente: Se identifican los puntos $(0,y)$ con $(1,y)$ para $0 \le y \le 1$, y los puntos $(x,0)$ con $(x,1)$ para $0 \le x \le 1$.

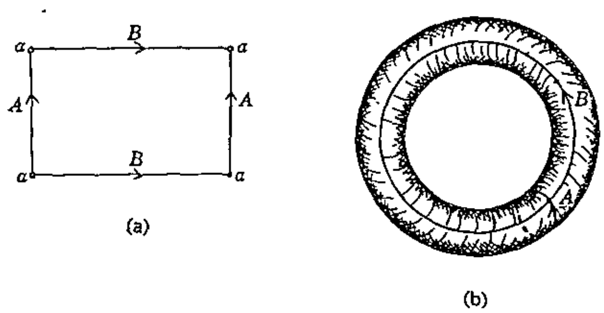


Fig. 10. (a) Construcción de un toro a partir de un cuadrado. (b) El toro

## El plano proyectivo

El plano proyectivo real no es homeomorfo a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^3$, por ello es más difícil de visualizar.

El plano proyectivo real se define como el espacio topológico homeomorfo al espacio cociente de $X = \mathbb{R}^3 - \{0\}$, obtenido identificando pares de puntos diametralmente opuestos. Dos puntos de coordenadas $(x_1, x_2, x_3)$ e $(y_1, y_2, y_3)$, donde una al menos de las coordenadas no es cero, representan el mismo punto si existe algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (distinto de cero) tal que $x_i = \lambda y_i : i = 1, 2, 3$, es decir si están sobre una misma recta que pasa por el origen. Podemos interpretar un punto del plano proyectivo como una recta en $\mathbb{R}^3$, a la que le falta el origen, que pasa por el origen.

La razón del nombre de plano proyectivo, viene de la geometría proyectiva, en la que un punto tiene coordenadas homogéneas $(x_1, x_2, x_3)$, siendo $x_1, x_2, x_3$ números reales, uno al menos distinto de cero, y el término "homogénea" significa que $(x_1, x_2, x_3)$ e $(y_1, y_2, y_3)$ representan el mismo punto, si se verifica la condición anterior, es decir: si existe algún $\lambda \in \mathbb{R}$ (distinto de cero) tal que $x_i = \lambda y_i : i = 1, 2, 3$.

Equivalentemente: Sea $H = \{x, y, z) \in \mathbb{S}^2 : z \geq 0\}$ el hemisferio superior cerrado de $\mathbb{S}^2$. Es evidente que, de cada par de puntos de $\mathbb{S}^2$ diametralmente opuestos, uno al menos se encuentra en $H$. Si los dos se encuentran en $H$, entonces están sobre el ecuador, que es el borde de $H$. Por tanto, se puede definir el plano proyectivo como el espacio cociente de $H$ obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos del borde de $H$. Como $H$ es homeomorfo al disco cerrado unidad, $E^2$, del plano, el espacio cociente de $E^2$ obtenido identificando los puntos diametralmente opuestos del borde es un plano proyectivo.

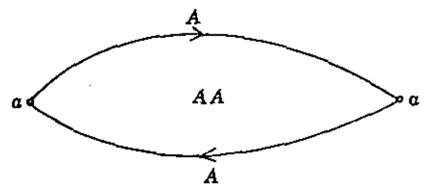


Fig. 11. Representación poligonal del plano proyectivo

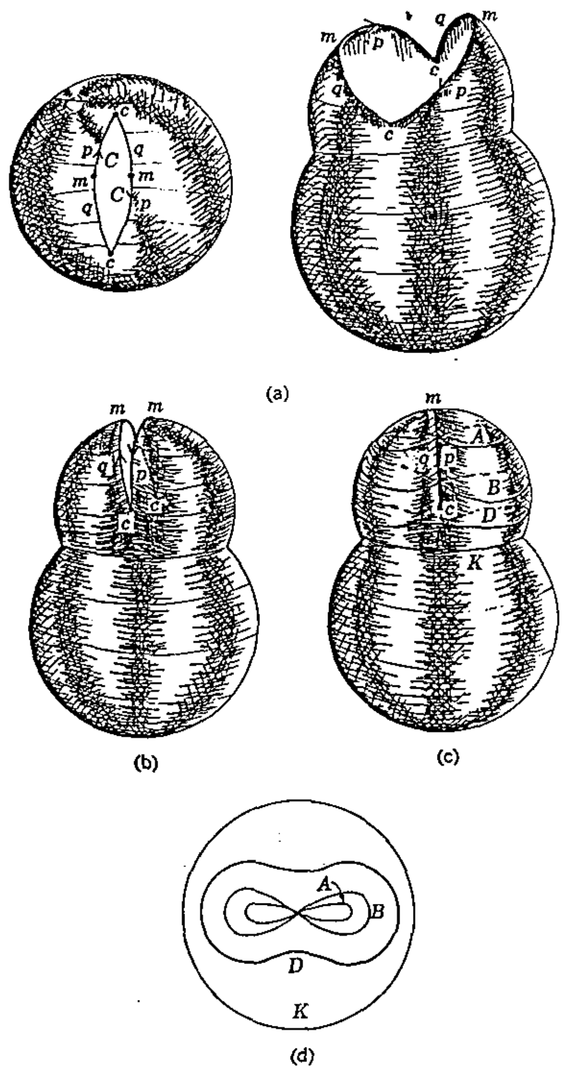


Fig. 12. La esfera con un bonete cruzado

Deformamos el disco $CC$ hasta obtener una esfera con un agujero. "Hinchamos" una parte de la esfera conteniendo el agujero para obtener una ampolla (Fig. 12 (a)). Identificamos las aristas $cpm$ y $cqm$ del agujero (Fig. 12 (b) y (c)). Fig. 12 (d), muestra un corte horizontal entre los puntos $m$ y $c$.

La parte de la esfera por encima del círculo $K$ es un bonete cruzado. La esfera con un bonete cruzado es equivalente al plano proyectivo.

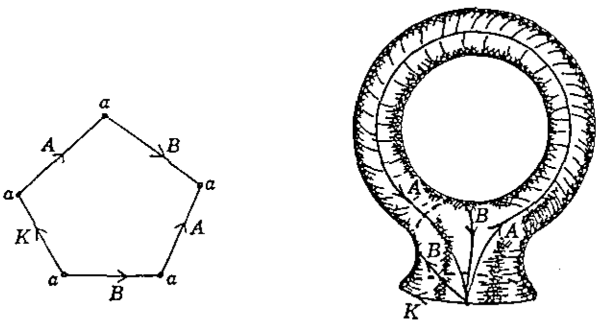

Fig. 13. El asa (el toro con un agujero)

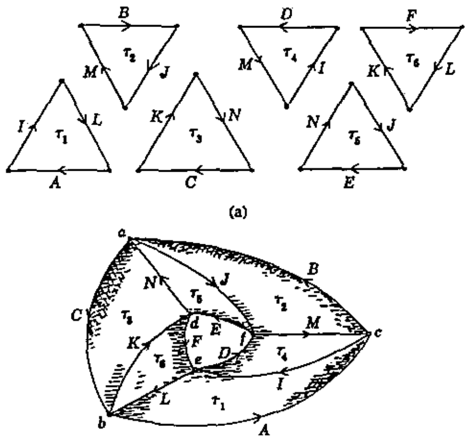

Fig. 14. Una superficie con frontera,
(a) Los triangulos, (b) la superficie "ensamblada"

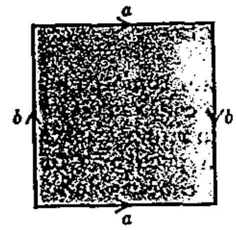


Fig. 15. Construcción de la botella de Klein a partir de un cuadrado

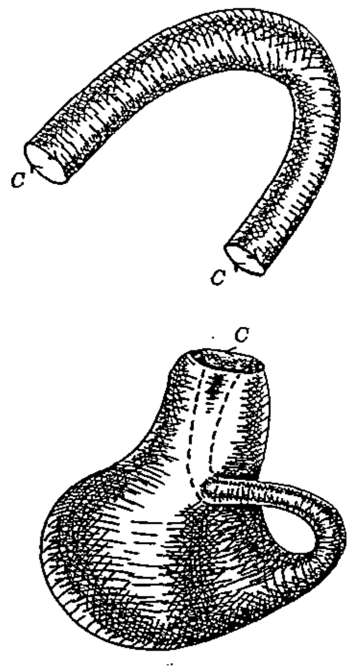


Fig. 16. La botella de Klein

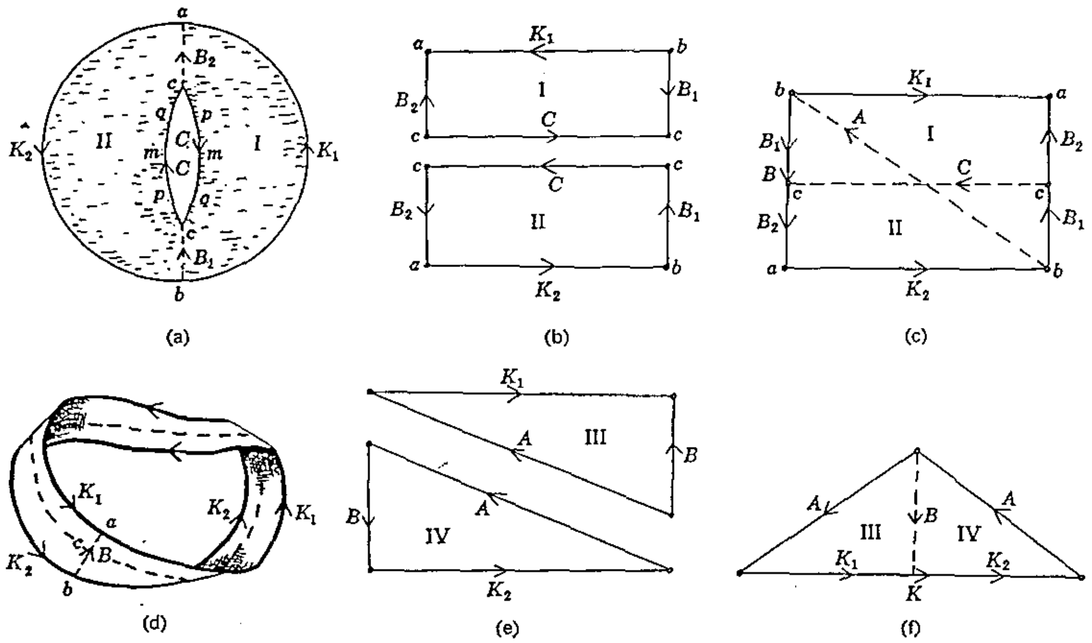


Fig. 17. Banda de Moebius y bonete cruzado

Cortamos el bonete cruzado de Fig. 12 (c), y lo extendemos sobre el plano. Obtenemos la representación de la Fig. 17 (a). Después cortamos a o largo de las línea de puntos $B_1$ y $B_2$, separando la superficie en las partes I y II (Fig. 17 (b)), que aparecen deformadas como rectángulos. Movemos los rectángulos para unirlos a lo largo de $C$. Reemplazamos las aristas $B_1$ y $B_2$ por una única arista $B$. Observamos que las dos aristas $B$ están identificadas (mirad sus vértices!). El resultado es una banda de Moebius (Fig. 17 (d)). Otra representación se obtiene cortando en (Fig. 17 (c)) por la diagonal $A$ (Fig. 17 (e)), y pegando como se indica en la (Fig. 17 (f)).

La Fig. 18 muestra como cortar una botella de Klein, para obtener dos bandas de Moebius.

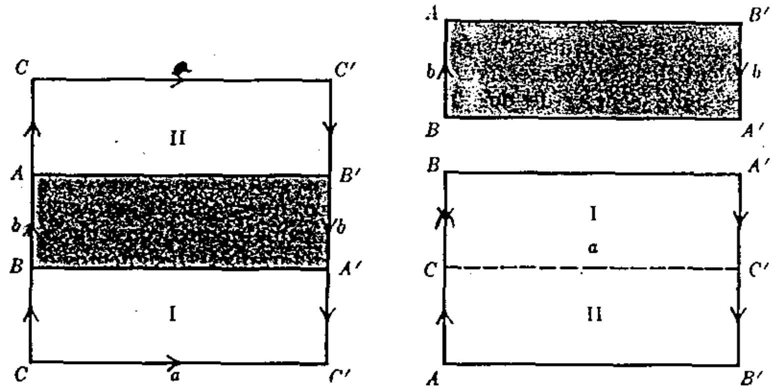


Fig. 18. La botella de Klein como unión de dos bandas de Moebius

## Orientabilidad y no orientabilidad

**Teorema.** Un símbolo poligonal representa una superficie no orientable si contiene dos aristas emparejadas (identificadas) con el mismo superíndice.

El plano proyectivo no es orientable, contiene un subconjunto homeomorfo a una banda de Moebius.

**Sumas conexas** El teorema de clasificación enuncia que cualquier superficie cerrada, se puede obtener a partir de la esfera, del toro y del plano proyectivo real, mediante sumas conexas.

Veremos como se pueden obtener ejemplos de superficies compactas, formando lo que se llaman *sumas conexas*. La suma conexa de dos superficies se forma cortando un disco en cada una, y pegando las dos superficies a lo largo de los bordes de estos discos. Hacer una suma conexa con un toro o un plano proyectivo es lo mismo que pegar un *asa* o un *bonete cruzado* en la frontera de un disco cortado de la esfera.

El teorema de clasificación enunciado, dice que todas las superficies compactas, conexas, sin borde pueden obtenerse de este modo.

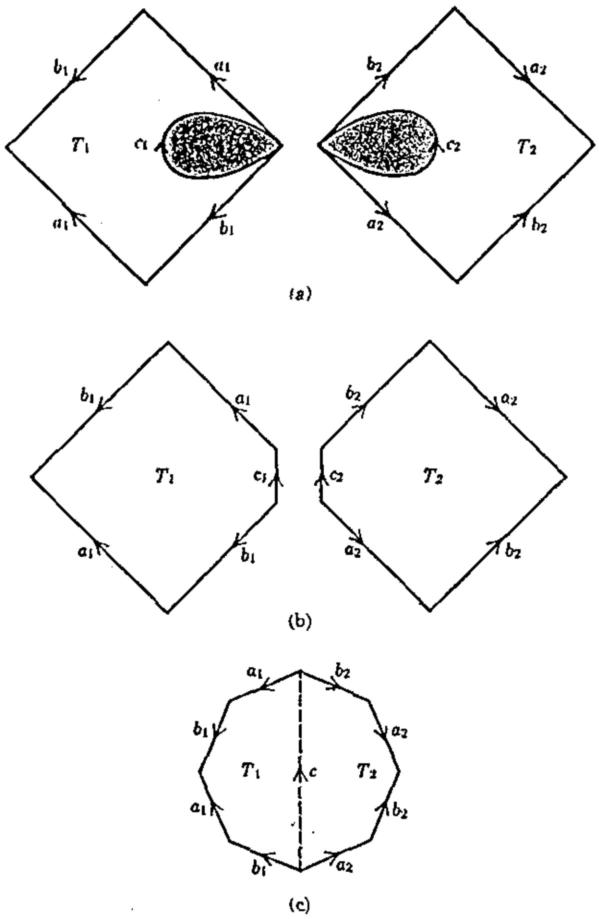


Fig. 19. Suma conexa de dos toros o esfera con dos asas.
(a) Dos toros disjuntos $T_1$ y $T_2$. (b) Los toros disjuntos con discos recortados. (c) Pegados a lo largo de los bordes de los discos

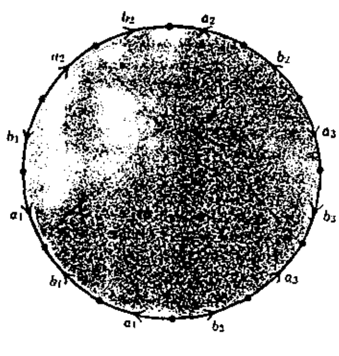

Fig. 20. Suma conexa de tres toros o esfera con tres asas

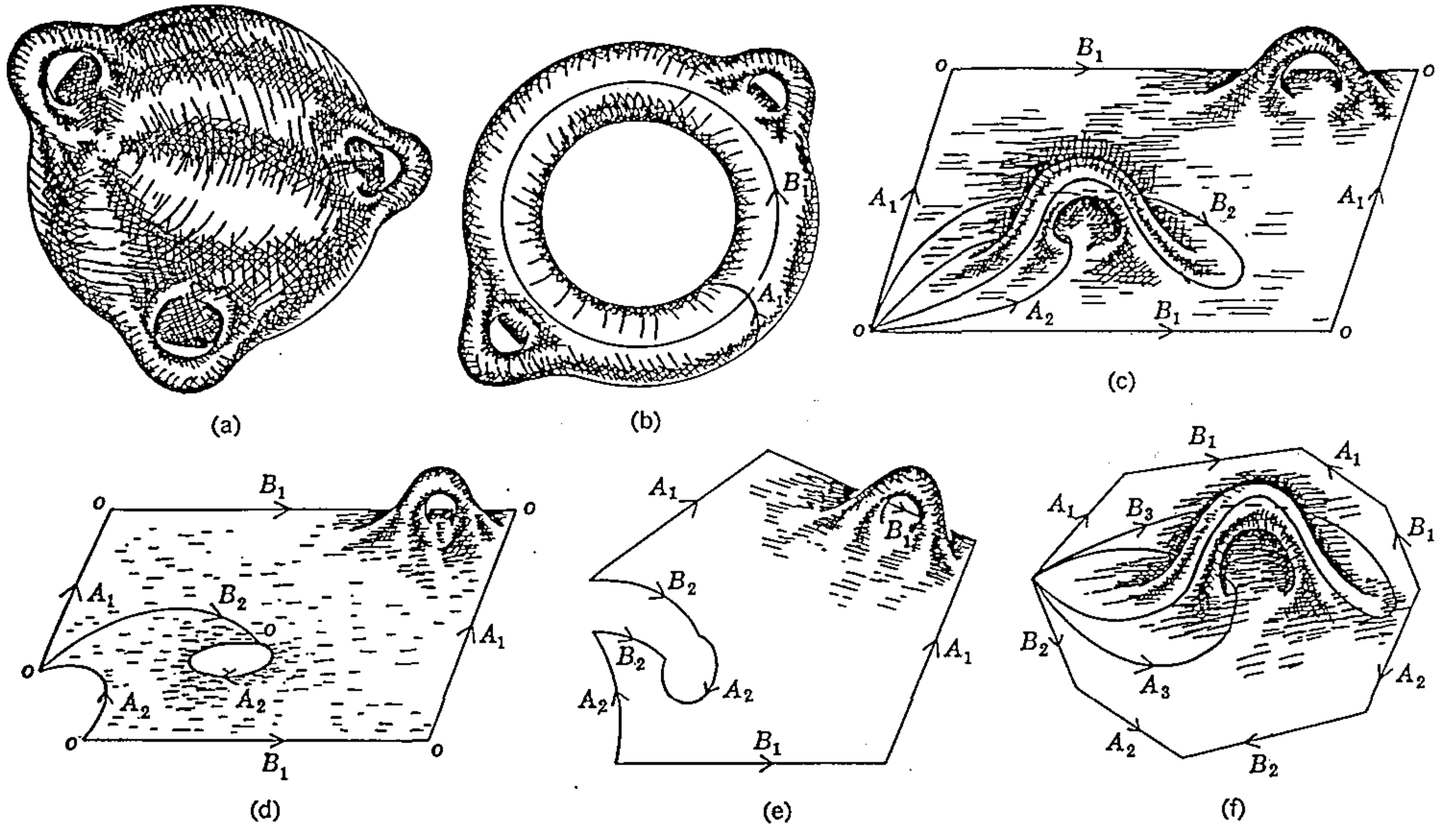


Fig. 21. Reducción a su forma poligonal de una esfera con tres asas. (a) La esfera con tres asas. (b) Deformada a un toro con dos agujeros.
(c) Preparación para eliminar la segunda asa. (d) Separación a lo largo de $A_2$ con el asa retraída. (e) Separación a lo largo de $B_2$ (f) Preparación para eliminar la tercer asa

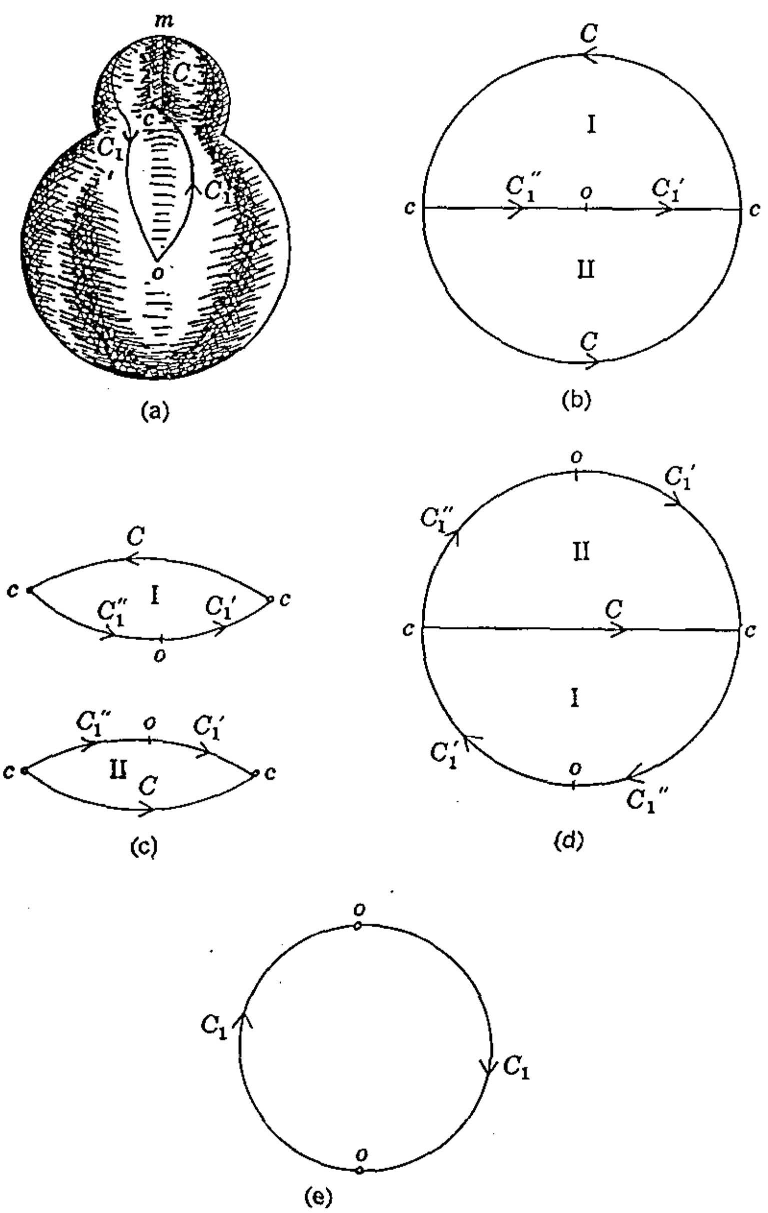


Fig. 22. Reducción de la esfera con un bonete cruzado a su forma poligonal

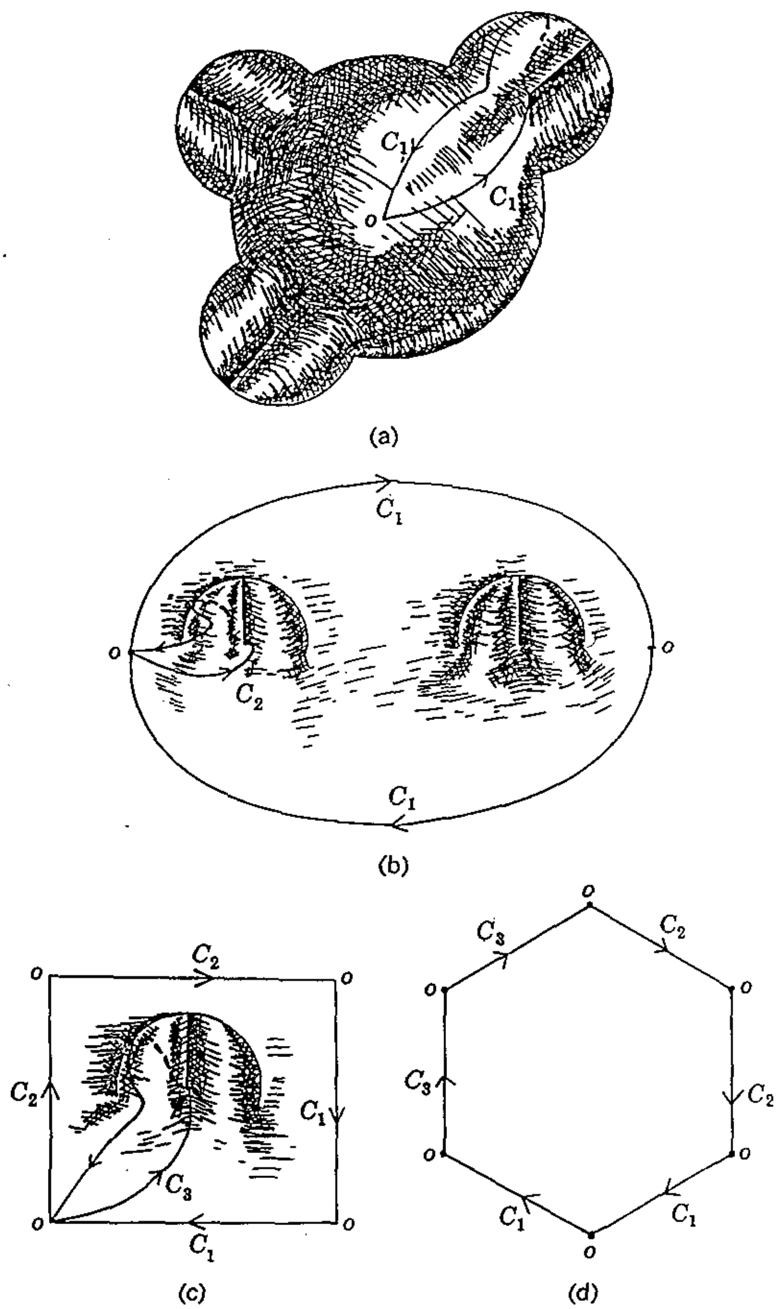


Fig. 23. Reducción de la esfera con tres bonetes cruzados a su forma poligonal. (Es equivalente a la suma conexa de tres planos proyectivos)

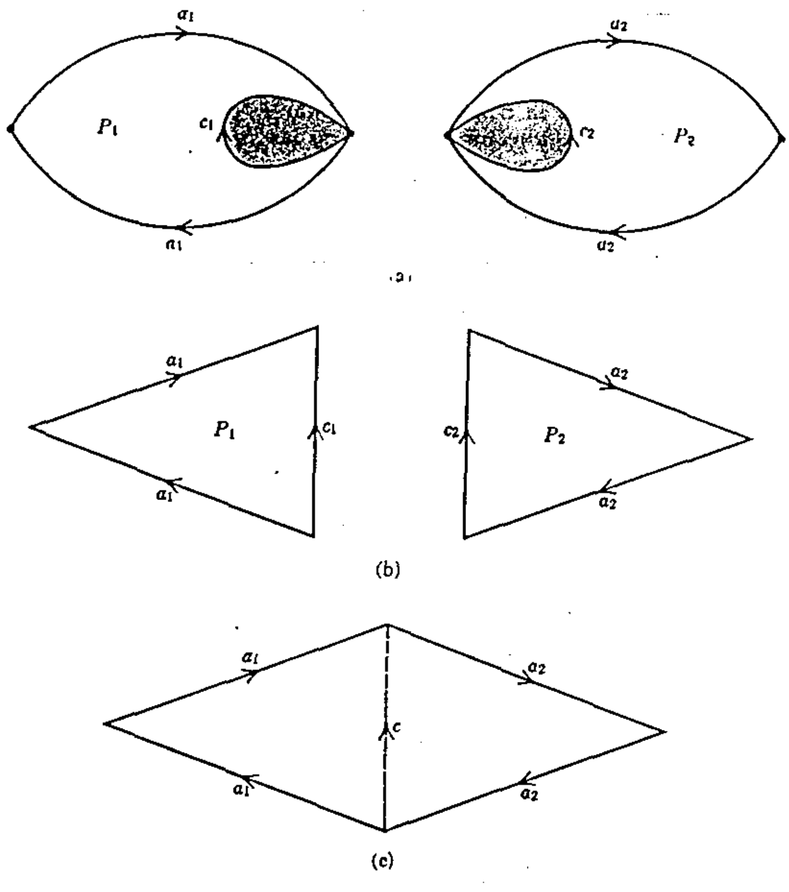


Fig. 24. Suma conexa de dos planos proyectivos.
(a) Dos planos proyectivos disjuntos. (b) Los planos proyectivos con discos recortados. (c) Pegados a lo largo de los bordes de los discos

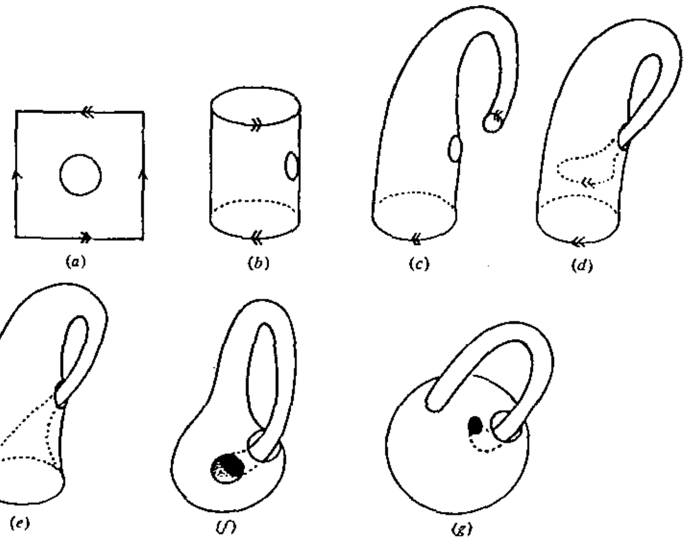


Fig. 25. Suma conexa de una botella de Klein con un plano proyectivo

Hemos visto ejemplos de superficies obtenidas formando sumas conexas. El teorema de clasificación enuncia que todas las superficies cerradas pueden obtenerse de este modo.

## Demostración del teorema.

Sea $S$ la superficie, que suponemos triangulable, y $T_1, T_2, \ldots, T_n$ los triángulos.

Probaremos que $S$ es homeomorfa a un polígono con las aristas identificadas a pares, segun alguno de los símbolos de las sumas conexas:

(a) la esfera: $AA^{-1}$.

(b) la suma conexa de $n$ toros: $A_1B_1A_1^{-1}B_1^{-1} \ldots A_nB_nA_n^{-1}B_n^{-1}$.

(c) la suma conexa de $n$ planos proyectivos: $A_1A_1A_2A_2 \ldots A_nA_n$.

**Primer paso.** $S$ es homeomorfo a una reunión $T'$ de $n$ triángulos $T_i'$ en el plano, siendo $h_i$: $T_i' \to T_i$ un homeomorfismo.

Definimos $h$: $T' \to S$ como la aplicación que cumple: $h|T_i' = h_i$. Ya que $T'$ es compacto y $S$ es Hausdorff, esta aplicación es una identificación.

El polígono lo construiremos como un cociente de $T'$, pegando los triángulos, de acuerdo con las identificaciones dadas por la aplicación $h$, y lo denotamos $D$.

Probaremos que $D$ es homeomorfo a un disco.

Cada triángulo lo es, y pegar dos discos identificando dos subconjuntos del borde, homeomorfos al intervalo cerrado $[0, 1]$, es claramente un disco.

Repetimos el proceso con todos los triángulos y el resultado sigue siendo un disco.

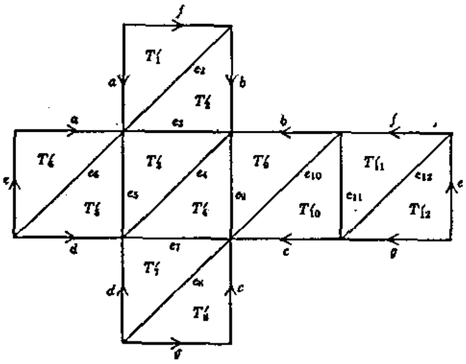

Fig. 26. Ilustración del primer paso

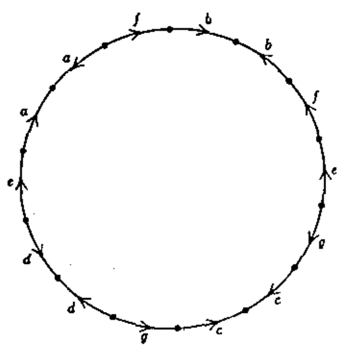

Fig. 27. Versión simplificada de la Fig. 26.
$aa^{-1}fbb^{-1}f^{-1}e^{-1}gcc^{-1}g^{-1}dd^{-1}e$

En el polígono del disco, aparecen aristas que han de identificarse para obtener la superficie.

Diremos que un par de aristas es de *primera especie* si aparecen con superíndices distintos (con distinta orientación), y de *segunda especie* en caso contrario.

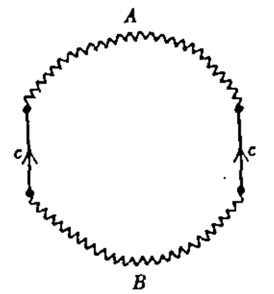


Fig. 28. Un par de aristas de primera especie

**Segundo paso.** Eliminación de un par de aristas adyacentes de primera especie (con distinta orientación), en un polígono que tenga al menos cuatro aristas.

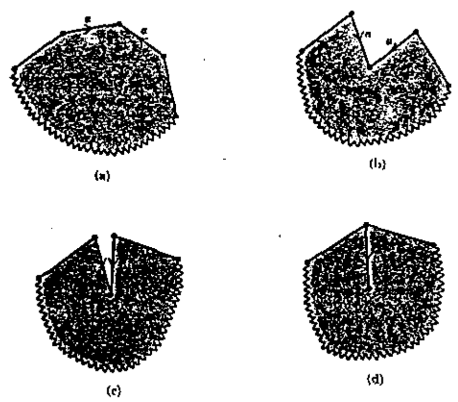


Fig. 29. Ilustración del segundo paso

**Tercer paso.** Transformación en un polígono en que todos los vértices estén identificados en uno solo.

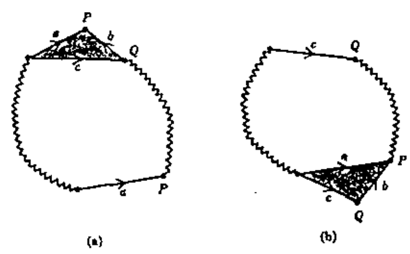


Fig. 30. Ilustración del tercer paso

**Cuarto paso.** Transformar en adyacentes todo par de aristas de segunda especie (con la misma orientación)

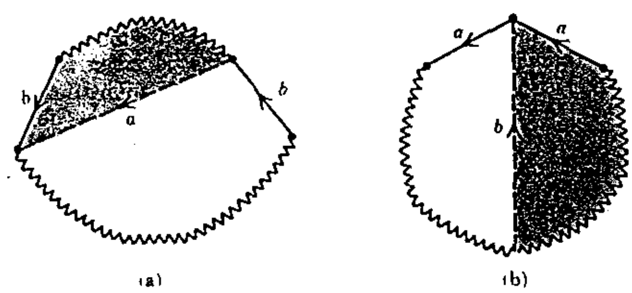


Fig. 31. Ilustración del cuarto paso

**Quinto paso.** Transformar en consecutivos dos pares de primera especie que se separen uno al otro.

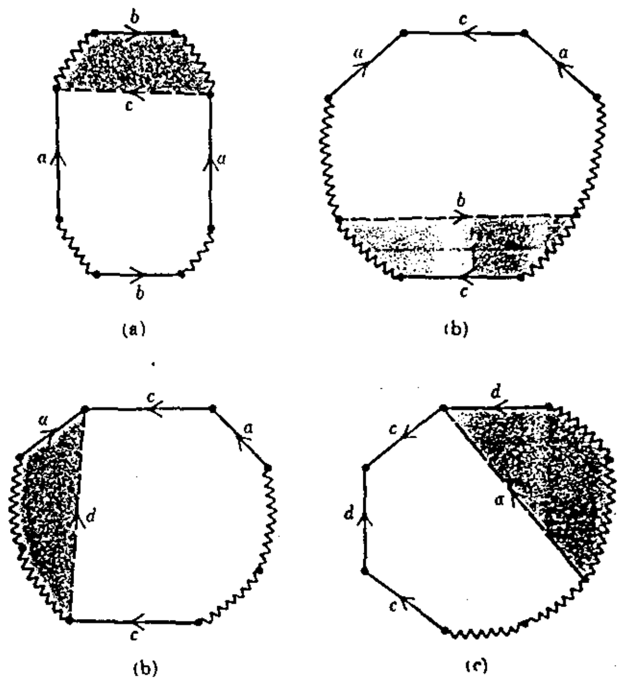


Fig. 32. Ilustración del quinto paso

Continuamos el proceso hasta que todos los pares de primera especie estén en grupos adyacentes de cuatro aristas.

Si tras estas operaciones no hay pares de segunda especie, tendremos un símbolo de la forma: $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_1^{-2}b_1^{-2}\dots a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1}$ que es la suma conexa de $n$ toros.

Si hubiera pares de primera y de segunda especie, resolvemos la situación con el siguiente

**Lema.** La suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de tres planos proyectivos.

Es suficiente probar que la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de un plano proyectivo y una botella de Klein (ya que la suma conexa de un toro y un plano proyectivo es homeomorfa a la suma conexa de dos planos proyectivos y ésta es homeomorfa a una botella de Klein). Ver Fig. 33, 34 y 35 para la ilustración de este lema.

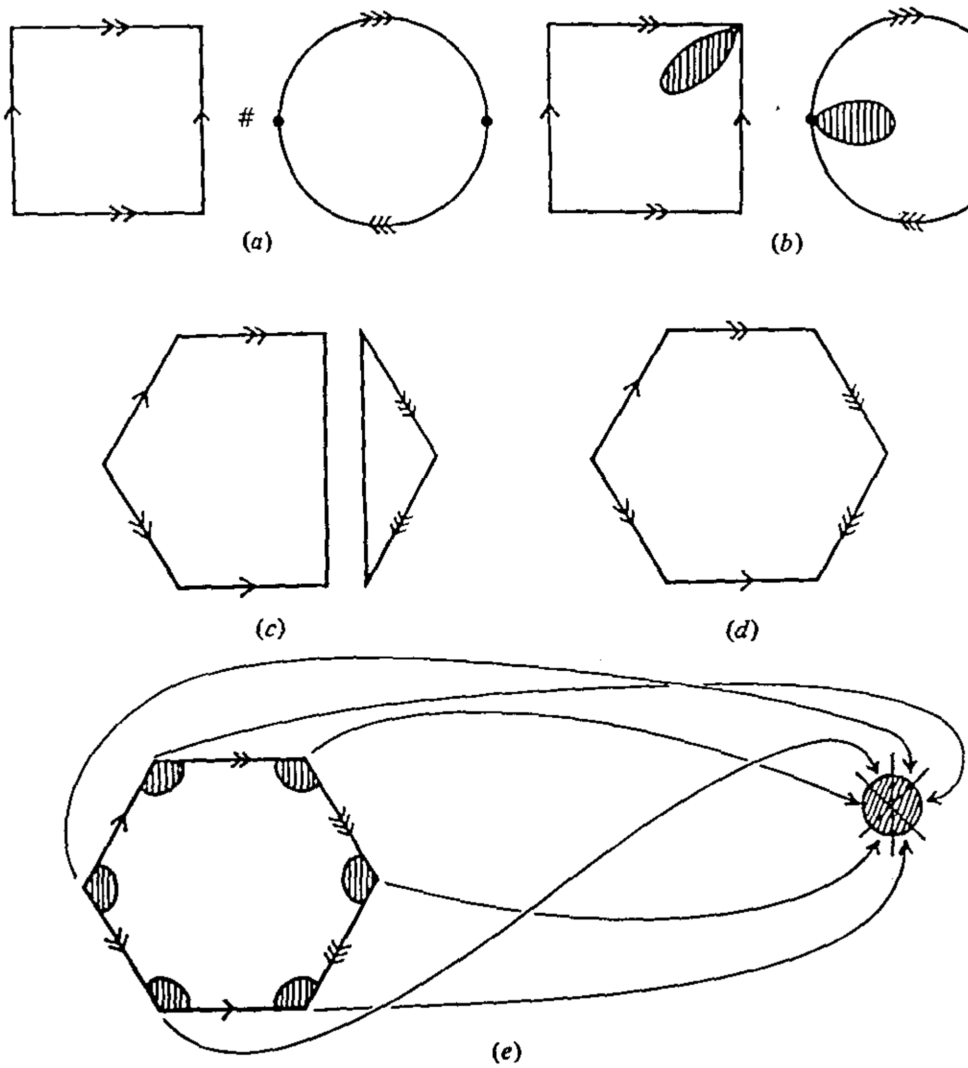


Fig. 33. Suma conexa de un toro y un plano proyectivo (a)

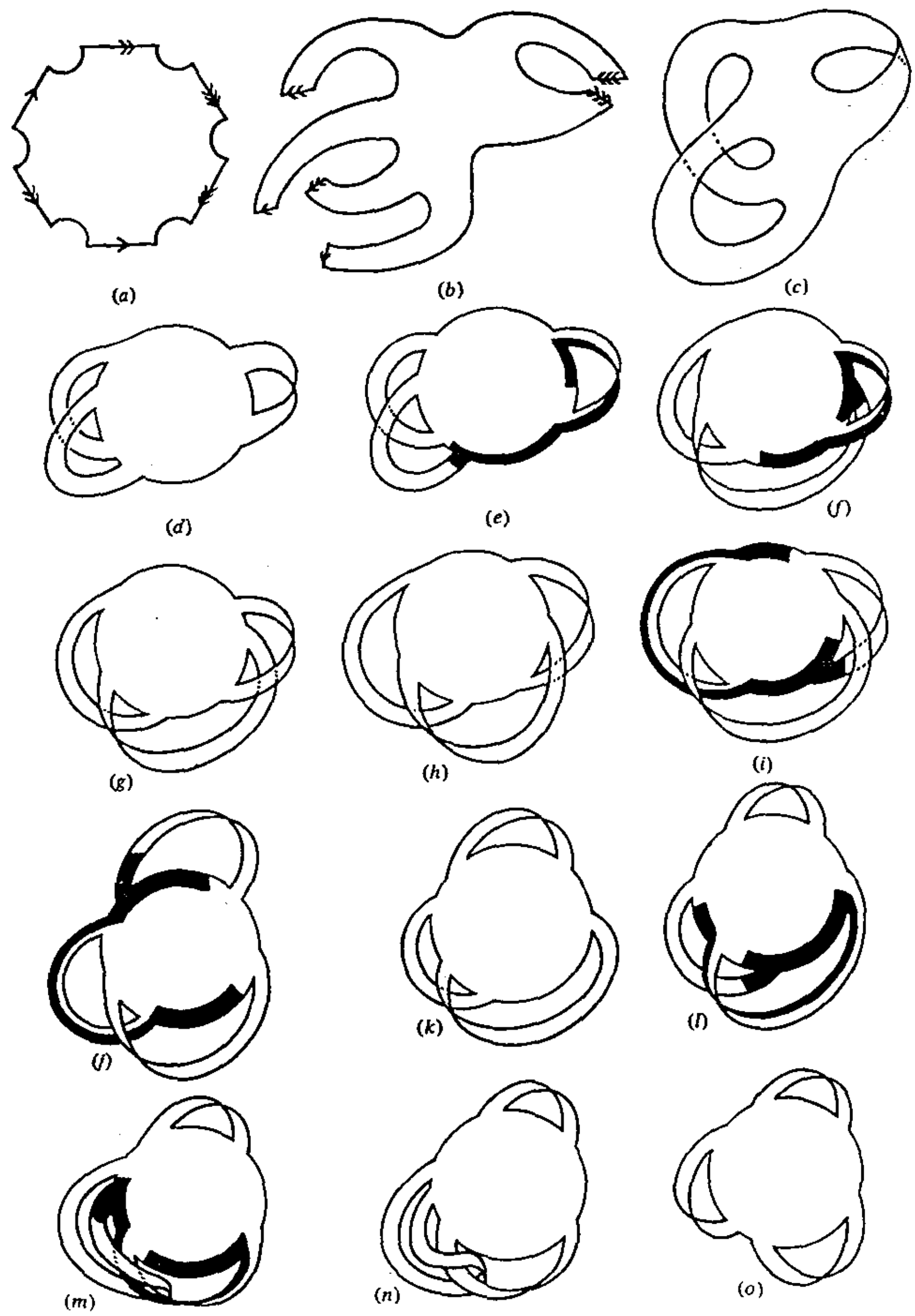


Fig. 34. Suma conexa de un toro y un plano proyectivo (b)

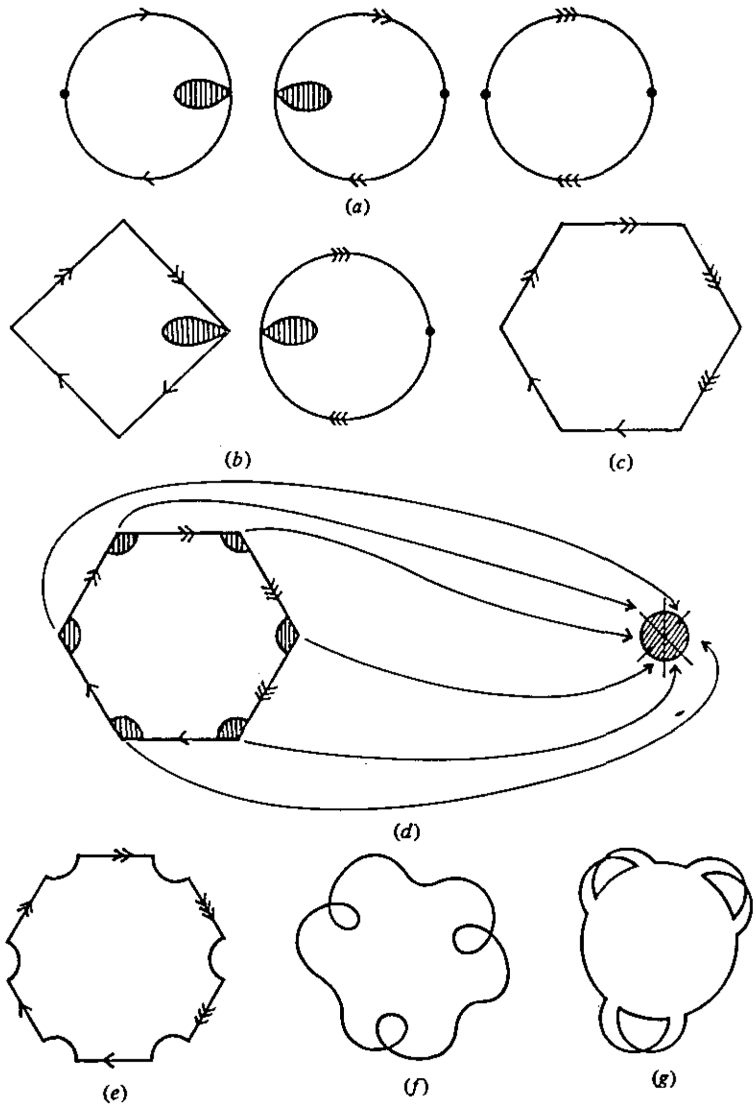


Fig. 35. Suma conexa de tres planos proyectivos

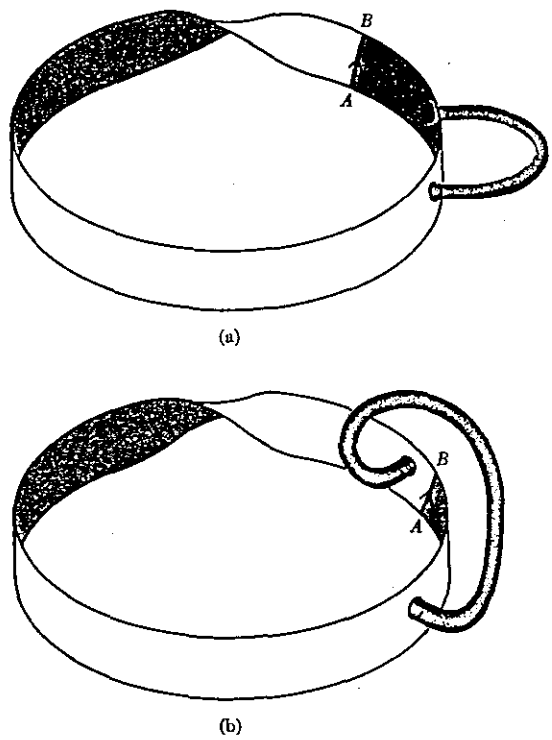


Fig. 36. (a) Suma conexa de una banda de Moebius y un toro. (b) Suma conexa de una banda de Moebius y una botella de Klein

**Última Cuestión.** ¿Puede ocurrir que para $m \neq n$ sean homeomorfas las sumas conexas de m y n toros?

La misma cuestión en el caso de planos proyectivos.

Los invariantes, fáciles de calcular, a los que aludíamos al principio, prueban que esto no es posible.

Ya hemos hablado de la orientación. La característica de Euler, $\chi(M)$, de una superficie $M$, es un invariante numérico definido como $\chi(M) = v - a + t$, siendo $v$ el número de vértices, $a$ el número de aristas y $t$ el número de triángulos, en la triangulación.

Es fácil probar que, dadas dos superficies $S_1$ y $S_2$, y su suma conexa, $S$, la relación entre sus características de Euler es la siguiente: $\chi(S) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$. Para ello, basta quitar el interior de un triángulo de cada una de las superficies, identificar las aristas y vértices de los bordes de los triángulos suprimidos, y contar los vértices, aristas y triángulos antes y después de formar la suma conexa.

Por inducción, y conocidas las características de Euler de la esfera, el toro y el plano proyectivo, obtenemos los siguientes valores:

| Superficie | Característica de Euler |
|---|---|
| Esfera | 2 |
| Suma conexa de n toros | 2-2n |
| Suma conexa de n planos proyectivos | 2-n |

Obsérvese que la característica de una superficie orientable es siempre par, mientras que la de una superficie no orientable puede ser par o impar.

Se deduce el siguiente resultado:

**Teorema.** Dos superficies son homeomorfas si tienen la misma característica de Euler y ambas son orientables o no orientables.

**Bibliografía**

[1] S. S. Cairns, *Introductory Topology*, The Ronald Press Company, 1961. C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, 1986.

[2] W.S. Massey, *Introducción a la Topología Algebraica*, Editorial Reverté, 1972.

[3] C. Kosniowski, *Topología Algebraica*, Editorial Reverté, 1986