Unha Andaina pola Matemática 2006

La matemática de la economía

Carlos Hervés Beloso
Catedrático de análisis matemático
Universidad de Vigo

Santiago, 6 de Marzo de 2006

(1)

“La juventud de hoy está podrida hasta la médula y es mala, irreverente y perezosa. Nunca será como la juventud del pasado y será incapaz de conservar nuestra civilización”

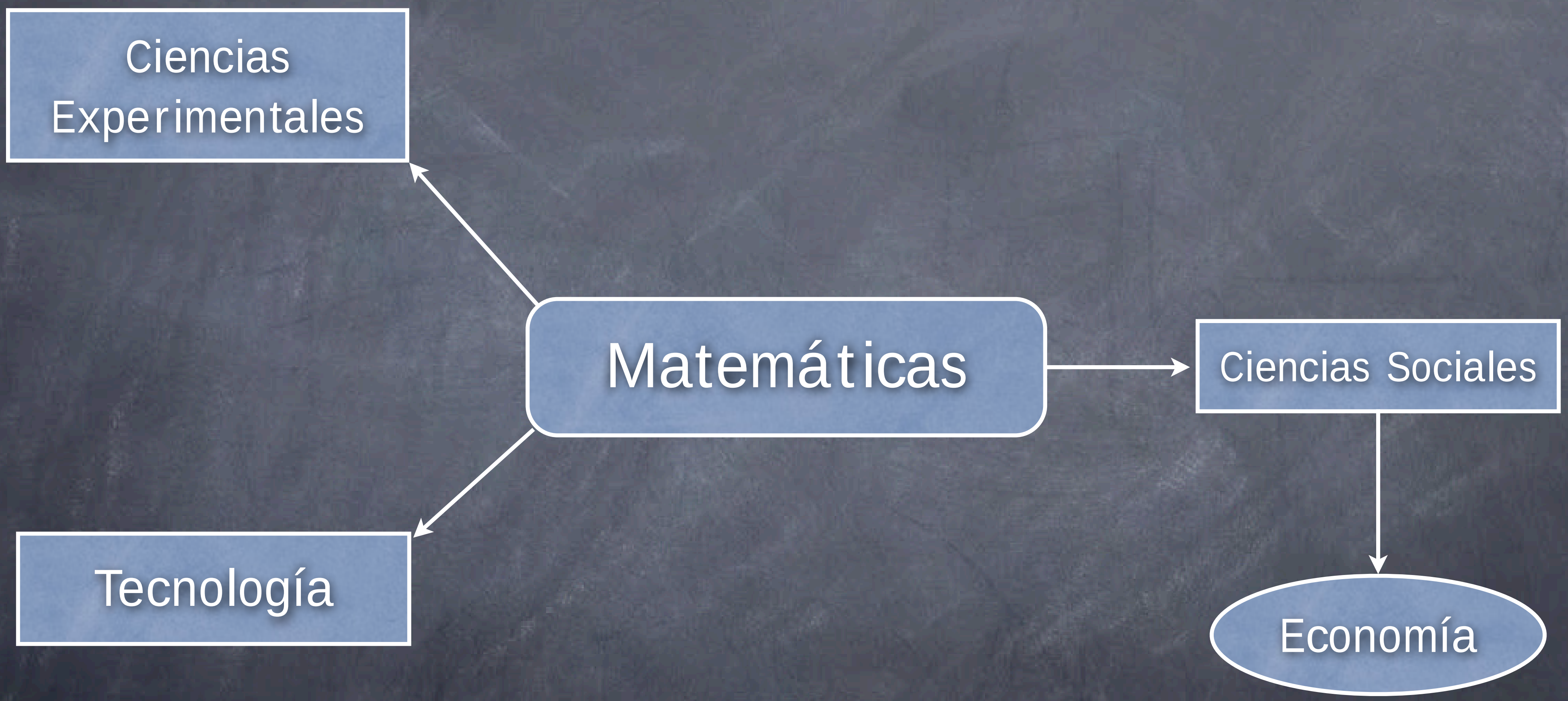
(2)

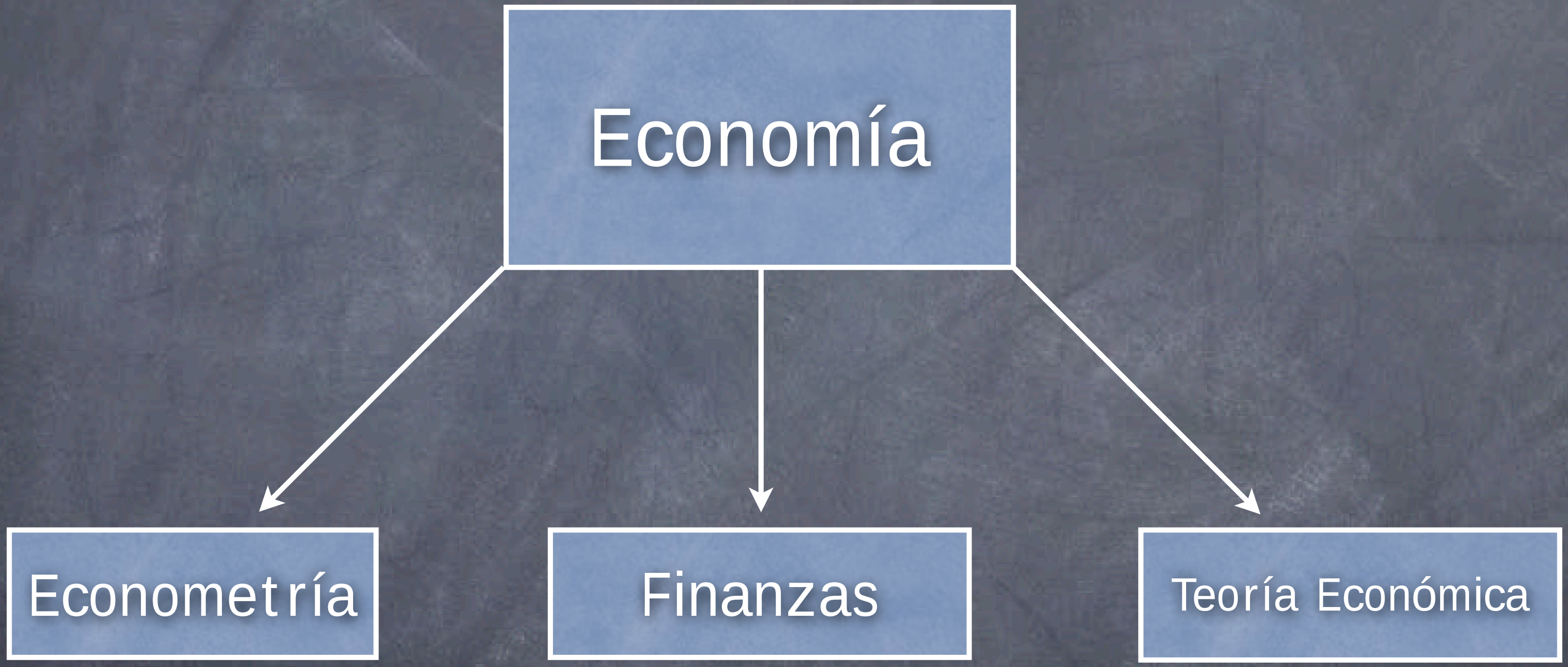
“La juventud de ahora ama el lujo, tiene pésimos modales y desdeña la autoridad. Muestra poco respeto por sus superiores y prefiere insulsas conversaciones al ejercicio. Son ahora los tiranos y no los siervos de sus hogares. Ya no se levantan cuando alguien entra en casa. No respetan a sus padres, conversan entre sí cuando están en compañía de los mayores, devoran la comida y tiranizan a sus maestros”

(1) : Tablilla cuneiforme babilónica. 3000 a.d.C.

(2) : Atribuído a Sócrates por sus discípulos. Siglo IV a.d.C.

Índice


Ciencias Experimentales
Matemáticas
Ciencias Sociales
Tecnología
Economía


Economía
Econometría
Finanzas
Teoría Económica

Econometría

-Estadística

-Tratamiento de datos económicos

-Series temporales

-Informes de coyuntura

Economía Financiera

-Matemática actuarial: el interés, los préstamos...

-Y tú que eres tan listo...¿Por qué no eres millonario? : El teorema fundamental de los mercados eficientes

-El arbitraje

-Valoración de derivados

El número e y el cálculo del interés

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n}$$

$$e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x} = 2'7182818284....$$

e es un número trascendente

e es la base de los logaritmos neperianos o equivalentemente, de la función exponencial

$f(x) = e^x$

-Capital A

-Tipo de interés (anual) r

El capital a devolver al final del primer período es

$$A+rA = A(1+r)$$

Al final del segundo período será $A(1+r)^2$

Al final de n períodos: $A(1+r)^n$

-El interés anual r = interés mensual r/12

Capital a devolver al cabo de un mes: $A(1+r/12)$

Y al cabo de un año: $$A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12}$$

Y después de n años: $$A\left(1+\frac{r}{12}\right)^{12n}$$

Pero tampoco lo hacen por meses.

Si el período fuera un día, el capital a devolver al cabo de un año sería $A\left(1+\frac{r}{365}\right)^{365}$

Pero el período podría ser la hora, el minuto, el segundo...

El año tendría t períodos (t muy grande) y en realidad, el capital que le devolvemos al banco se convierte en

$$\lim_{t\to\infty} A\left(1+\frac{r}{t}\right)^{t} = A\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t/r}\right)^{r\ t/r} =$$

$$A\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\ r} = Ae^{r} \qquad \left(x=\frac{t}{r}\to\infty\right)$$

En un año, con el interés simple, el capital a devolver sería A(1+r), pero lo que aplica el banco es el interés compuesto, y el capital a devolver así es Ae^r

¿Cómo pagamos más? Comparemos las cantidades usando la fórmula de Taylor:

$$f(r) = e^r = f'(r) = f''(r)\cdots$$

$$f(r) = f(0) + f'(0)r + \frac{1}{2!}f''(0)r^2 + \cdots \frac{1}{n!}f^{n)}(0)r^n + \cdots$$

$$e^r = 1 + r + \frac{1}{2}r^2 + \cdots + \frac{1}{n!}r^n + \cdots$$

$$A\left(1 + r + \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{6}r^3 + \cdots\right) > A(1+r)$$

Y tú que eres tan listo...¿Por qué no eres millonario?

El teorema fundamental de los mercados eficientes

Paul A. Samuelson (1915-)

- Premio Nobel de Economía en 1970
- Aquí celebrando su cumple nº 90 el año pasado

La selección de la cartera óptima. Franco Modigliani (1918-2003)

Programación matemática

- Economista italiano nacionalizado estadounidense en 1946. Fue profesor de Economía en las Universidades de Columbia, Illinois, Carnegie I.T., Northwestern y el Massachussets I.T.

- Premio Nobel en 1985

El Arbitraje.

Una nueva forma de valoración.
Nuevos derivados financieros.

En 1973 Fisher Black y Myron Scholes publicaron un artículo titulado "the pricing of options and corporate liabilities" que revolucionó el mundo de las finanzas, dando una fórmula precisa para obtener el precio de los derivados financieros.

Ecuaciones diferenciales estocásticas.
Análisis numérico.

Fisher Black y Myron Scholes

Teoría Económica

-Microeconomía
-Macroeconomía
-Elección social
-Política económica
-Etc...

Macroeconomía

La llamada “Nueva Macroeconomía Clasica" abandona las propuestas y conceptos keynesianos y vuelve a mantener las recomendaciones de política económica mediante reglas fijas, rechazando la aplicación de políticas discrecionales.

Estrechamente relacionada con la microeconomía, y basada en ésta, son sus precursores Nancy Stokey, George Lucas, y Edward Prescott.

Nancy Stokey

- Se gradúa en económicas en la Universidad de Pennsylvania, en 1972, y obtiene el doctorado en la Universidad de Harvard en 1978. Stokey es profesora en la Universidad de Chicago.

- Es la autora, junto con robert Lucas del libro "Recursive Methods in Economic Dynamics"

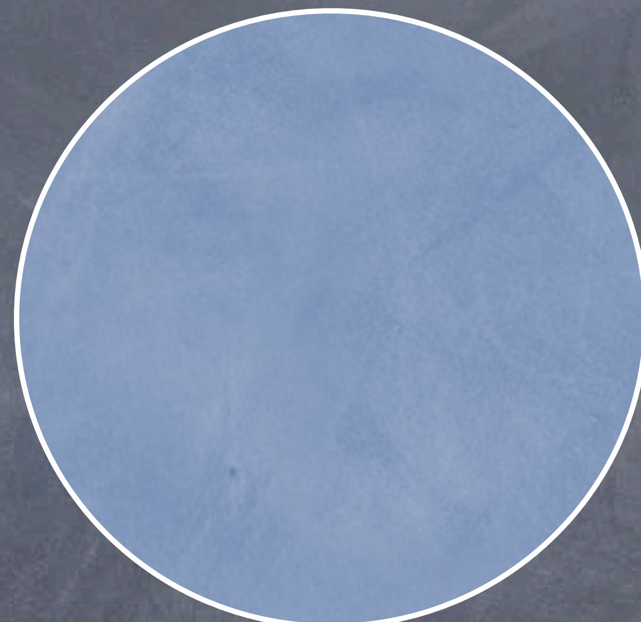
Robert Lucas (1937-)

- Premio Nobel de Economía en 1995

Edward C. Prescott (1940-)

- Premio nobel en 2004
- Se graduó en Matemáticas en 1962 en el Swarthmore College, obteniendo posteriormente un master en investigación operativa en 1963 por la Case-Western Reserve University.

El reparto del “pastel”

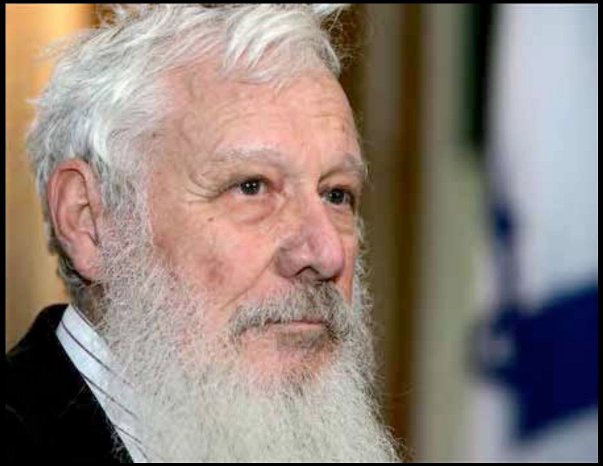


Repartir el “pastel” W entre los individuos de un conjunto I.

Robert J. Aumann (1930-)

- Nacido en Frankfurt. Doctorado en matemáticas en 1955, en el Massachusetts Institute of Technology (MIT). Actualmente trabaja en la Universidad de Jerusalén.

- Premio Nobel de Economia en 2005



Formalmente:

Hay un conjunto I de individuos

Nuestro pastel es un vector $\omega \in \mathbb{R}^l$, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_l)$

Los gustos o preferencias de cada indivivuo $t \in I$

están representados por una función $U_t : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma que

$$u_t(x) > u_t(y) \Leftrightarrow x \text{ es preferido (por t) a } y$$

Si suponemos que $I = \{1, 2, ..., n\}$

un reparto es $x^* = (x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n)$

x^*_i denota la parte del pastel correspondiente al individuo i

¿Qué propiedades queremos que tenga este reparto?

Factibilidad:

El reparto $x^* = \left(x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n\right)$ es:

<u>factible</u> si $\sum_{i=1}^{n} x^*_i = \omega$

<u>libre de envidias</u> si $u_i\left(x^*_i\right) \geq u_i\left(x^*_j\right)$

Puede ocurrir que el pastel sea la suma de las contribuciones ω_i de cada individuo $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega$

Se dice que el reparto es <u>individualmente racional</u> (I.R.) si

$$u_i\left(x^*_i\right) \geq u_i\left(\omega_i\right)$$

Un reparto factible se dice Óptimo de Pareto (O.P.) o eficiente si:

No existe otro reparto $z^* = \left(z^*_1, \ldots, z^*_n\right)$ tal que :

i) $\sum_{i=1}^{n} z^*_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega$

ii) $u_i\left(z^*_i\right) > u_i\left(x^*_i\right)$

Una coalición es cualquier subconjunto $S \subset I$

Se dice que una coalición bloquea o veta a un reparto x*
si existe otro reparto y tal que

i) $\sum_{i \in S} y_i = \sum_{i \in S} \omega_i$

ii) $u_i\left(y_i\right) > u_i\left(x^*_i\right) \quad \forall i \in S$

El núcleo, N, está formado por todos los repartos factibles que no están vetados por ninguna coalición de individuos.

Evidentemente

$$N \subset \text{I.R.}$$

$$N \subset \text{O.P.}$$

John Von Newmann (1903-1957)

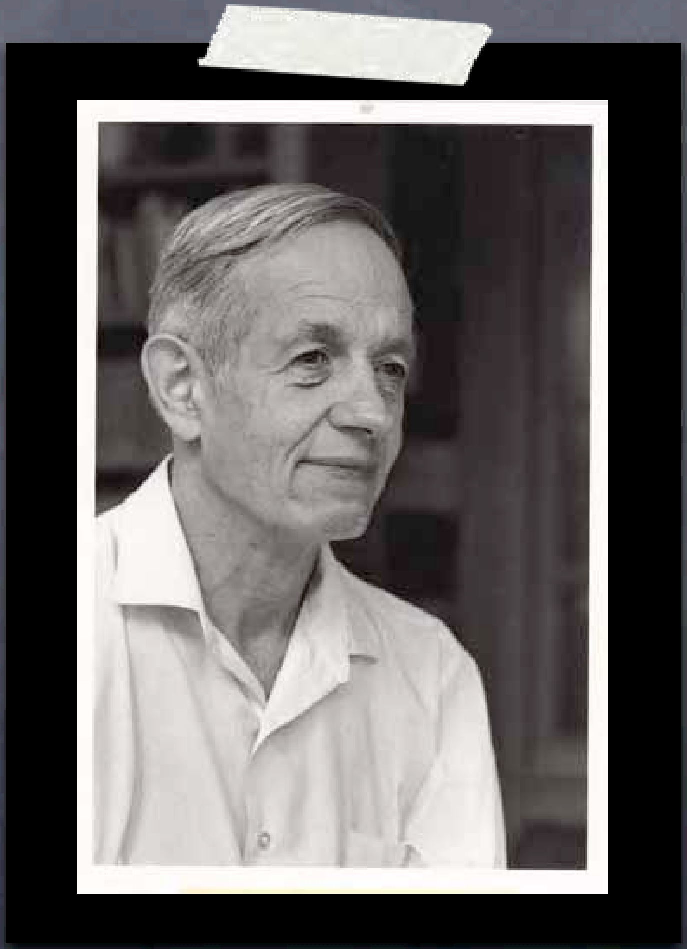
- Considerado por muchos como la mente más genial del siglo XX, comparable solo a la de Albert Einstein. Participó activamente en el Proyecto Manhattan.

- Se doctoró en matemáticas en Budapest, en químicas en Zurich, y en 1932 se trasladó al Instituto de Estudios Avanzados de Princeton.

- Es el creador del campo de la Teoría de Juegos. En 1928 publica el primer artículo sobre este tema. En 1944, en colaboración con Oskar Morgenstern, publica la Theory of Games and Economic Behavior.

John F. Nash (1928-)

- Matematico estadounidense. Profesor en la Princeton University de New Jersey.
- Premio Nobel de Economía en 1994



Equilibrio de Nash

$$V_i\left(\left(x_1,\ldots,x_n\right)x'_i\right)=V_i\left(x_{-i},x'_i\right)$$

denota la utilidad que recibe el individuo i (pago, en teoría de juegos) cuando elige x'_i siendo x_j la elección de los restantes individuos j.

Un reparto $x^*=\left(x^*_1,\ldots,x^*_n\right)$ es equilibrio de Nash si

$V_i\left(x^*_{-i},x^*_i\right)\geq V_i\left(x^*_{-i},z\right)$ para todo z

Eficiencia?

Un reparto x^* es equilibrio de Walras si existe $p^* \in \Delta \subset \mathbb{R}^l$ (sistema de precios) de modo que

i) x^* es factible $\left(\sum_{i=1}^{n} x^*_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i = \omega \right)$

ii) $p^* x^*_i \leq p^* \omega_i$

Text

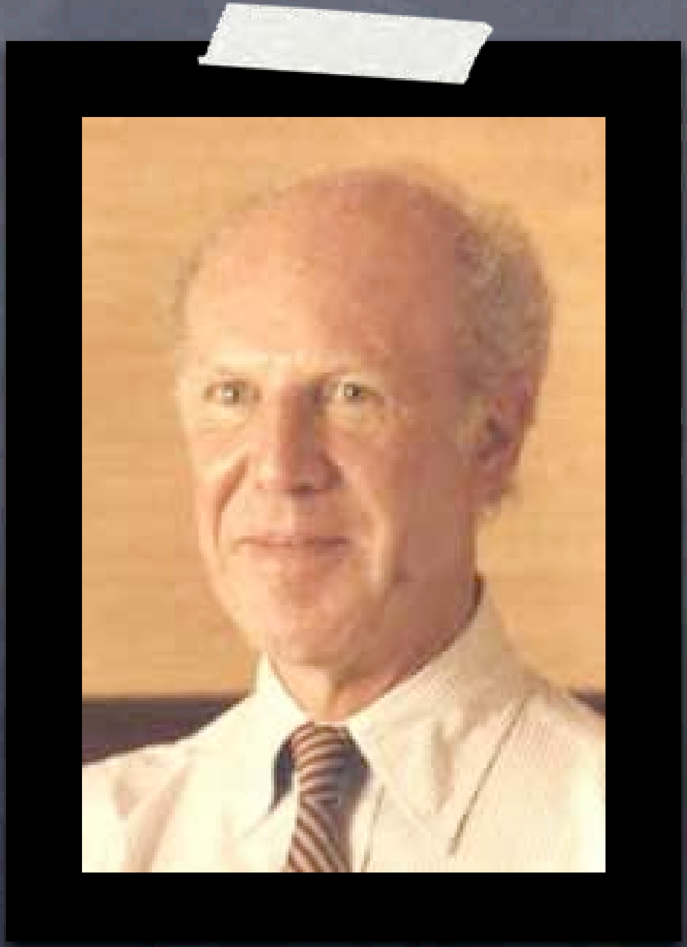
iii) $u_i(z) > u_i\left(x^*_i\right) \Rightarrow pz > p\omega_i$

Kenneth J. Arrow (1921-)

- Premio Nobel en 1972
- Su tesis doctoral "Social Choice and Individual Values" supuso una revolución teórica.
- "Teorema de la imposibilidad de Arrow"

Gerard Debreu (1921-2004)

- Premio Nobel en 1983
- Nacido en Calais, Francia. Licenciado en Matemáticas, se trasladó a Estados Unidos en 1950 para trabajar en la Cowles Foundation. Fué profesor en Stanford, Yale y Berkeley.



Teoremas del bienestar

Primer teorema:

Todo reparto Walrasiano x^* es óptimo de Pareto.

Todo reparto Walrasiano x^* está en el núcleo.

Segundo teorema:

Todo reparto que sea óptimo de Pareto puede ser obtenido como un reparto Walrasiano si se redistribuyen adecuadamente los recursos.

Adam Smith (1723-1790)

- “el Estado debe abstenerse de intervenir en la economía ya que si los hombres actuaban libremente en la búsqueda de su propio interés, había una mano invisible que convertía sus esfuerzos en beneficios para todos”.

Ya termino...

Consejo

“Sabe esperar, aguarda que la marea fluya
-así en la costa un barco- sin que el partir te inquiete.
Todo el que aguarda sabe que la victoria es suya;
Porque la vida es larga y el arte es un juguete.
Y si la vida es corta
Y no llega el mar a tu galera,
aguarda sin partir y siempre espera,
que el arte es largo y, además, no importa.”

Campos de Castilla. Antonio Machado

Gracias.