

Emilio Crespo Correa

IES Camilo José Cela
Padrón, A Coruña

A importancia da visión xeométrica

A xeometría parece ser, dentro da Matemática escolar, unha área particularmente propicia á realización de actividades de natureza exploratoria e investigadora.

Pese a isto nas últimas décadas relegouse a xeometría a un lugar moi secundario, as actividades implicando construcións xeométricas foron consideradas materia doutras disciplinas, como a Educación Visual.

Freudenthal chamaba a atención sobre dous aspectos da riqueza da xeometría que poderían parecer contradictorios pero que en realidade se complementan: por un lado, os descubrimentos xeométricos, sendo feitos tamén “cos propios ollos e mans, son mais convincentes e sorprendentes”; por outro lado, resaltando a necesidade de explicación lóxica das súas conclusións, a xeometría pode facer sentir ós alumnos e alumnas “a forza do espírito humano”.

A riqueza e variedade da xeometría constitúen, de facto, argumentos moi fortes para a súa valorización no currículo e nas aulas de Matemática:

- En xeometría, contactase cunha grande variedade de obxectos e situacións. Traballase no plano ou no espacio, con figuras planas ou con poliedros, por exemplo, podendo descubrirse e explorarse un grande número de propiedades e conexións. A relación entre situacións da realidade concreta e situacións matemáticas atopa na xeometría numerosos exemplos e concrecións.
- A xeometría é unha fonte de problemas de varios tipos: de visualización e representación; de construción e lugares xeométricos; implicando transformacións xeométricas; ó redor das ideas de forma e de dimensión; implicando conexións con outros dominios da Matemática, como os números, a álgebra, o cálculo combinatorio, a análise.
- As actividades investigadoras en xeometría conducen rapidamente à necesidade de implicar diversos aspectos esenciais da natureza da propia Matemática. Formular e resolver problemas, facer conxecturas, testalas, validalas ou refutalas, buscar xeneralizacións, comunicar descubrimentos e xustificacións, volvéndose procesos naturais.
- Exploracións e investigacións en xeometría poden facerse en todos os niveis de escolaridade e a diversos niveis de desenvolvemento.

Posiblemente non é casual o feito de que a matemática grega sexa fundamentalmente, e case exclusivamente, xeometría.

A matemática grega introduciu un elemento novedoso na matemática: o método deductivo, no marco das organizacións locais. Por exemplo a xeometría do triángulo, a xeometría da circunferencia foron desenvolvéndose como pequenos universos de coñecemento xeométrico.

Desde logo, a xeometría se desenvolve como una representación e organización do coñecemento sobre o espacio físico. Un exemplo sobresaínte o constitúe o método ideado por Eratóstenes para estimar o radio da Terra. Este tipo de exemplos, onde non é posible a

verificación directa do resultado, foi importante para establecer o método deductivo como un criterio de validación, en certa forma para substituír unha comprobación que estaba ausente.

A organización, xa de carácter global, na xeometría, quedou plasmada nos Elementos de Euclides.

A propósito das virtudes da intuición xeométrica H. Freudenthal (O papel da intuición xeométrica nas matemáticas modernas. 1964) escribe:

"A importancia histórica da xeometría clásica procede do feito de que foi unha das fontes das estruturas alxébricas e da topoloxía,... As razóns da omnipresencia da linguaxe xeométrica na matemática actual débense, sen embargo, no so á tradición histórica, senón ó feito de que a linguaxe xeométrica vai unido á creación conceptual. A terminoloxía xeométrica que aparece na álgebra e no análise mostra ata qué punto a intuición xeométrica penetra toda a matemática. ¿A que se debe que a intuición xeométrica conserve a súa vitalidade, aínda en dominios que aparentemente non teñen nada que ver coa xeometría? evidentemente isto é debido a que a intuición xeométrica pode suxerir o que é importante, accesible e interesante, e pode, á súa vez, orientar ó matemático e evitar que se perda nun deserto de problemas e, ideas e métodos".

As necesidades de organización do espazo que xorden tamén noutros ámbitos, non nos específicos do traballo xeométrico, teñen aportado ideas que mesmo teñen innovado novos campos da xeometría.

Un exemplo notable desto o constitúe a creación da perspectiva polos pintores de finais da Idade Media e do Renacemento no seu afán de buscar unha pintura máis realista. A perspectiva aportou novos problemas xeométricos abrindo así a xeometría proxectiva.

As necesidades da navegación por augas do Atlántico sen poder visualizar as costas fixo que se botara man da utilización de coordenadas para organizar un "espacio baleiro", se ben os navegantes portugueses (os primeiros en embarcarse nesta aventura) so podían determinar a "latitude" medindo a altura da Estrela Polar. A familiarización coa utilización de coordenadas abriu novos campos na xeometría: a Xeometría Analítica de Descartes e Fermat, pero tamén está na orixe do análise das funcións e do Cálculo Diferencial.

A aprendizaxe da xeometría

Os elementos de Euclides supoñen a articulación final nun corpo de estrutura deductiva do coñecemento da Xeometría e das Matemáticas da súa época pero que oculta en boa medida todo o proceso de indagación de experimentación de creación de conxecturas, que, sen dúbida, está na orixe dos coñecementos construídos polos xeómetras gregos. O feito de que os Elementos de Euclides foran, durante séculos o libro de iniciación ás matemáticas puido producir en moitas ocasións un efecto negativo na aprendizaxe desta materia.

Sempre houbo Matemáticos conscientes de que a Xeometría e a súa aprendizaxe debe poñer o maior acento na experimentación, na elaboración de conxecturas, no fomento da intuición xeométrica. Un destacado exemplo destas preocupacións podemos atopalas nos textos didácticos de Puig Adam e Rei Pastor:

"... procuramos facer un libro de carácter 'marcadamente intuitivo' no senso de apelar constantemente ós exemplos vivos da realidade, invitando ó alumno a construír e a observar; intuitivo tamén no senso de prescindir da constante distinción entre postulados e teoremas; distinción inútil, porque non se comprende a súa necesidade a estas idades".
" Pero non desdeñamos ningunha ocasión propicia para iniciar ó alumno nos razonamentos deductivos..." (Prólogo de "Elementos de Xeometría" 1928)

A reforma da chamada Matemática Moderna

En 1959 a OCDE organiza en Royaumont unha convención de dúas semanas con 60 profesores de 20 países. Participan Begle, Castelnuovo, Choquet, Dieudonné, Fehr, Felix, Servais, co encargo de revisar o ensino das matemáticas. Desta conferencia saíron as orientacións que marcaron nas seguintes décadas o ensino das matemáticas coñecido como Matemática Moderna.

Jean Dieudonné propon ofrecer ós estudantes unha ensinanza baseada no carácter deductivo da matemática e que partira duns axiomas básicos en contraposición ó ensino falsamente axiomático da xeometría imperante en aqueles momentos.

As orientacións marcadas polas conclusións desta convención son implantadas progresivamente en tódolos países (en España chegan coa Lei Xeral de Educación de 1970).

Pronto xorden algunhas voces en contra do enfoque adoptado, como é o caso de R. Thom:

"Eles, os bourbakistas, abandonaron un campo ideal para o aprendizaxe da investigación: A xeometría euclídea, mina inagotable de exercicios e a substituíron polas xeneralidades dos conxuntos e a lóxica, materiais tan pobres, vacíos e frustrantes para o ensino como os que máis. O énfase posto polos estruturalistas na axiomática non é so unha aberración pedagóxica senón tamén matemática." Modern Mathematics: does it exist? (1973).

Foron matemáticos ilustres os que alzaron as súas voces críticas (Morris Kline, Rene Thom, etc.) No congreso do ICME celebrado en 1976 o xeómetra inglés Michael Atiyah nunha conferencia plenaria dixo:

"Destronastes a Euclides, e estou de acordo. Pero ¿de que xeito tedes substituído o ensino da xeometría? A matemática que se ensina hoxe en día na maioría dos países está aínda máis lonxe da realidade, pero non ten ningún apoio xeométrico. Debese ter en conta que a intuición xeométrica é e será sempre a fonte máis poderosa para a comprensión de moitos temas. Polo tanto o pensamento xeométrico debe ser estimulado o máis posible e a calquera nivel"

Hans Feudenthal foi, sen dúbida, a personalidade que maior influencia desempeñou no retorno da xeometría, á matemática escolar:

"Durante moito tempo matemática foi sinónimo de xeometría. De feito, sempre existiron tamén outras ramas – álgebra, trigonometría, cálculo – que aínda así non pasaban de ser colección de regras non fundamentadas, escollidas ó chou, mentres que a xeometría era un sistema conceptual perfecto, onde as afirmacións resultaban rigorosamente unhas das outras e finalmente todo das definicións e dos axiomas. Aínda que outras técnicas foran máis eficientes, a xeometría era a verdade xenuína. Pero a alta estima que era atribuída á xeometría foi desaparecendo". Mathematics as an Educational Task (1973)

O NCTM, plasmou nun documento os intereses e as experiencias en xeometría escolar que caracterizou a parte final dos anos 80 e propuxo normas dedicadas a unha ensinanza renovada da xeometría. Así, ademais dos cambios metodolóxicos que caracterizan a visión da ensinanza das matemáticas, propúxose que a xeometría escolar considerase os contidos seguintes:

- Comprensión dos obxectos xeométricos e as súas relacións, e utilización da xeometría na resolución de problemas.
- Integración da xeometría en todos os temas e en todos os anos de escolaridade.
- Abordaxe da xeometría por medio das coordenadas e das transformacións xeométricas.

- Desenvolvemento de secuencias pequenas de teoremas (retorno as ideas de Freudenthal sobre organización local da matemática).
- Argumentos deductivos expresados oralmente, por frases ou por parágrafos escritos.
- Exploracións en ordenador de figuras en dúas ou tres dimensións.
- Xeometría no espacio.
- Aplicacións ó mundo real e modelización.

Ó mesmo tempo, os estándares do NCTM recomendan que se preste pouca atención a certos tópicos, por exemplo, que a xeometría euclidiana non sexa vista como sistema axiomático completo, que a xeometría analítica non sexa traballada como un conxunto de temas illados.