A Matemática e a Música

Um modelo matemático das escalas musicais.

Ana Pereira do Vale

A matemática surge ligada à música de vários modos:

- na acústica surge tanto na análise das propriedades físicas do som, como nos problemas de acústica que ocorrem em arquitectura, ou na própria construção dos instrumentos musicais;

-na afinação dos instrumentos é por vezes necessário usar as proporções entre as frequências e definir ajustes a que se chamam temperamentos.

-na composição musical clássica usam-se há muito tempo propriedades de alguns números ou proporções especiais e transformações geométricas. Hoje em dia alguns compositores modernos recorrem muitas vezes a teorias matemáticas mais complexas como seja a dos processos estocáticos.

- na teoria musical a procura da construção de modelos genéricos e abstractos leva alguns teóricos a recorrer a uma linguagem matemática para a definição destes modelos.

O exemplo que vamos expor é o de um modelo teórico para a construção de escalas musicais descrito por M. Linley, e R. Turner-Smith, ([3]).

1 Notas Prévias

Toda a construção apresentada é baseada nalguns pressupostos conhecidos por músicos, mas ignorados por muitos matemáticos. Para compreender completamente a razão de determinadas escolhas feitas pelos autores do modelo, M. Linley, e R. Turner-Smith, ([3]), seria necessário fazer uma introdução detalhada sobre teoria musical. Infelizmente os meus conhecimentos musicais não chegam para fazer um resumo coerente e completo. Optei por isso por apresentar apenas o essencial sobre relações entre classes de frequências, uma vez que a importância destas relações vai ser a base de toda a exposição. O leitor interessado em mais detalhes deve consultar a bibliografia indicada.

Se uma nota musical qualquer tiver uma frequência x, a nota musical com frequência $2x$ é a mesma nota que a primeira mas uma oitava mais aguda.

As razões entre as frequências das notas musicais são fixas para cada afinação (na realidade são permitidas pequenas variações como vamos ver mais tarde, mas isso não vai influenciar a frequência central). Existe uma relação ideal para estas frequências já conhecida pelos matemáticos pitagóricos.

A título de curiosidade apresentamos aqui a tabela de proporções entre as sete notas dó, ré, mi, fá, sol, lá e si. Suponhamos que a nota base (nota em relação à qual vamos estabelecer a proporção) é o dó, e suponhamos que tem uma frequência de 264Hz. Se multiplicarmos a frequência de dó por 2, 3, 4 etc. obtemos a seguinte tabela:

1	2	3	4	5	6	7	8
264	528	792	1056	1320	1584	1848	2112

A primeira, a segunda, a quarta e a oitava frequências obtidas correspondem a várias notas **dó** mais agudas que a nota base considerada. A terceira nota corresponde à frequência de um **sol** numa escala uma oitava mais aguda que a escala onde estaria o **dó** base considerado. A quinta a um **mi** numa escala duas oitavas mais agudas. A sexta novamente a um **sol** mas numa escala duas oitavas mais agudas. Se pretendêssemos obter a relação entre o **dó** inicial e o **sol** na mesma escala teríamos que dividir a frequência 792 por 2. Obteríamos assim a relação entre o **sol** e o **dó** numa mesma escala: $\frac{3}{2}$. Se fizéssemos o mesmos com o segundo **sol** obtido teríamos a mesma proporção porque, como estamos duas escalas acima, teríamos que dividir 6 por 4.

Aplicando este tipo de relações sucessivamente poder-se-iam determinar as proporções de todas as notas relativamente a uma nota base base. Toda esta construção é apresentada detalhadamente em [5]. A título de curiosidade apresentamos a tabela seguinte. Na coluna da esquerda é escrita qual a nota cuja frequência queremos a comparar com a nota base, neste caso **dó** e qual o intervalo musical definido por essa nota e por **dó**. Na segunda coluna indicam-se as proporções entre as duas frequências e na terceira a frequência da nota que comparamos com o **dó**.

Razão entre as frequências	Frequência	
dó- nota base	1	264
ré- int. segunda	9/8	297
mi- int. terceira	5/4	330
fá- int. quarta	4/3	352
sol- int. quinta	3/2	396
lá- int. sexta	5/3	440
si- int. sétima	15/8	495
dó- int oitava	2	528

Esta proporção é fixa para quaisquer notas separadas pelo mesmo intervalo que **dó** e **sol**. Por exemplo a razão entre as frequências de um **ré** e um **lá** na mesma escala é igual $\dfrac{\text{frequência mi}}{\text{frequência ré}} = \frac{9}{8}$.

Se não pretendermos descriminar duas notas iguais separadas por uma ou mais oitavas basta-nos trabalhar num intervalo limitado por dois inteiros e recorrendo à função $\log_2$.

2 Algumas definições

2.1 Notas e intervalos

Uma vez que as notas musicais podem ser identificadas pela sua frequência que corresponde a um número real positivo vamos considerar a seguinte definição:

Definição. Chamamos *nota musical* a um intervalo aberto $p(r,u) =]r-u, r+u[$, $r \in \mathbb{R}$, $u > 0$.

Uma nota musical também se pode representar apenas por $p(r)$.

Observação. A introdução da constante u é importante do ponto de vista musical. Não se refere a um ajuste de afinação, mas sim a pequenas variações já mencionadas acima permitidas às frequências das notas e aceites musicalmente, mesmo depois de definida uma afinação. Esta constante tem um valor muito pequeno, mas tem um limite inferior que está relacionado com a capacidade de audição humana. Para mais detalhes sobre o significado musical desta constante ver [3].

Do ponto de vista matemático a introdução desta constante dificulta o modelo. Musicalmente pode ser aceite que uma perturbação num **dó**, por exemplo, possa atingir uma frequência que deveria ser de um **ré**. O modelo apresentado permite esta sobreposição na definição de notas musicais, o que corresponde à possível intersecção não vazia de dois intervalos de duas notas consecutivas. Devido a esta possibilidade deveríamos utilizar em vez da teoria de conjuntos usual teoria de conjuntos "fuzzy". Para simplificarmos o modelo não vamos ter isso em consideração, e durante toda a exposição vamos ignorar que essa situação pode ocorrer. Na definição de sistema ideal, já na secção de Escalas Musicais, vamos estabelecer uma condição que impede que haja intersecção não nula entre os conjuntos que definem as notas que constituem uma escala.

Definição. Designamos por *intervalo musical* entre duas notas $p_1(r_1, u_1)$ e $p_2(r_2, u_2)$, o número real positivo definido por $|r_2 - r_1|$, e representa-se por $|p_1 - p_2|$

Definição. Se $s \in \mathbb{R}$, é um intervalo e $p(r)$ uma nota, definimos a soma de $p(r)$ com o intervalo s do seguinte modo $p(r) + s = p(r + s)$. De modo análogo definimos a diferença como sendo $p(r) - s = p(r - s)$.

Embora na definição inicial cada nota possa admitir um intervalo u, vamos em toda a construção que se apresenta considerar o mesmo intervalo para todas as notas.

Definição. Seja $P(u) = \{p(r, u) \,|r \in \mathbb{R}\}$, o conjunto de todas as notas com a mesma margem u.

Proposição. Se $p(r) + s = p(r + s)$ para todo o $p(r) \in P(u)$ e se $s \in \mathbb{R}$, então $(\mathbb{R}, +)$, é um grupo de operadores em $P(u)$.

2.2 Classes de frequência

Se estamos interessados em apresentar um modelo para construção de escalas, não nos vão interessar notas diferenciadas por uma ou mais oitavas. Sendo assim vamos reduzir todas as frequências a um intervalo entre dois inteiros consecutivos

Definição. Sejam $p_1(r_1)$ e $p_2(r_2)$ dois elementos de $P(u)$, $p_1(r_1)$ e $p_2(r_2)$ são equivalentes, se $(r_2 - r_1)$ for inteiro e escrevemos $p_1(r_1) \equiv p_2(r_2)$.

O conjunto quociente representa-se por $\underline{P}(u)$ e cada classe de equivalência por $q(r)$.

A $q(r)$ chama-se *classe de frequência.*

Notação.

1. Designemos por $\underline{\mathbb{R}}$, o conjunto $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, e por
2. $\nu : \mathbb{R} \to \underline{\mathbb{R}}$ a aplicação $\nu(r) := \{r + n | n \in \mathbb{Z}\}$.
3. Vamos escrever $\underline{r}$ em vez de $\nu(r)$, $\underline{s}$ em vez de $\nu(s)$ e $\underline{r}+\ \underline{s}$ em vez de $\nu(r+s)$.
4. Seja $\mu : P(u) \to \underline{P}(u)$, definida por $\mu(p(r)) = q(r)\ (= \{p(r+n)\,|n \in \mathbb{Z}\})$.

Vamos obter duas bijecções $\sigma : \mathbb{R} \to P(u)$, $r \to \sigma(r)$ e $\underline{\sigma} : \underline{\mathbb{R}} \to \underline{P}(u)$, $\underline{r} \to q(r)$, tais que $\mu\nu = \nu\underline{\sigma}$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\sigma"'] & \underline{\mathbb{R}} \arrow[d, "\underline{\sigma}"] \\ \mathrm{P(u)} \arrow[r, "\mu"'] & \underline{\mathrm{P}}\mathrm{(u)} \end{tikzcd}$$

Proposição. A acção de $\mathbb{R}$ como grupo de operadores nas notas de $P(u)$ induz acções de $\mathbb{R}$, e $\underline{\mathbb{R}}$ como grupos de operadores em $\underline{P}(u)$. Obtemos assim $q(r) + s = q(r+s) = q(r) + \underline{s}$ e $q(r) - s = q(r-s) = q(r) - \underline{s}$.

2.3 Relações entre classes de frequências

As classes de frequência vão corresponder às notas musicais. Nesta secção consideramos relações entre estas classes, que traduzirão no modelo, noções análogas às estabelecidas pelas proporções entre as frequências das notas.

De entre todas as relações possíveis teremos que seleccionar algumas devido a condicionalismos de natureza musical que pretendemos que o modelo inclua.

Definição. Chamamos *relações regulares* entre classes de frequência aos elementos de $\underline{\mathbb{R}}$ considerados como operadores em $\underline{P}(u)$.

Definição. Chamamos *relações básicas* entre classes de frequência aos elementos de um dos seguintes subconjuntos de $\underline{\mathbb{R}}$.

1. (D_n) $X = \{1/n\}$ para algum n inteiro.
2. (B_n) $X = \{b_0, ..., b_n\}$ em que $n < 3$, $b_k = f\ln(a_k) + \underline{t}_k$, com $\underline{t}_k \in \underline{\mathbb{R}}$, a_k é o $k+1$-ésimo número primo e $f\ln(x) = \{\ln_2(x) + n, n \in \mathbb{Z}\}$

Musicalmente, as relações básicas tipo (D_n) são as baseadas nas divisões equalitárias e as relações básicas tipo (B_n) são as baseadas nas relações harmónicas

$\{b_0, ..., b_n\}$. Se nos quisermos referir indistintamente a relações básicas sem distinguir de que tipo se trata designa-mo-las por G_n.

Para as constantes $b_0, ..., b_n$, vamos utilizar a seguinte notação:
Vamos escrever **I** para $b_0 = f\ln(2) + \underline{t}_0$
Vamos escrever **V** para $b_1 = f\ln(3) + \underline{t}_1$
Vamos escrever **III** para $b_2 = f\ln(5) + \underline{t}_2$
Vamos escrever **VII** para $b_3 = f\ln(7) + \underline{t}_3$
Vamos determinar por um postulado que a constante $\underline{t}_0 = 0$
I é o elemento neutro $\underline{0}$ de $\underline{\mathbb{R}}$

As constantes $\underline{t}_k$ com $k > 0$, vão ser determinadas pelo temperamento, isto é pela afinação definida (ver [5]). A designação de **I**, **V**, **III** e **VII** para estas relações está relacionada com os intervalos musicais entre duas notas apresentados na introdução. Uma vez que os ajustes definidos pelo temperamento são quantidades muito pequenas, se fizermos os cálculos, vamos obter valores próximos obtidos nas razões apresentadas acima para os intervalos de quinta, terceira e sétima. Isto é, por exemplo a relação **V** vai traduzir neste modelo a proporção definida por um intervalo de quinta perfeita.

Esta definição de relações básicas vai incluir $-b_0, ..., -b_n$, que passamos a representar por:
-I para $-f\ln(2) - \underline{t}_0$
-V para $-f\ln(3) - \underline{t}_1$
-III para $-f\ln(5) - \underline{t}_2$
-VII para $-f\ln(7) - \underline{t}_3$
Estas relações vão representar as inversões de **I**, **V**, **III** e **VII**. De um modo muito simples as inversões correspondem à nota musical que obtemos se considerando o mesmo intervalo em vez de somarmos o valor do intervalo à frequência da nota o subtraímos.

2.4 Escalas Musicais

Definição. Uma *escala* é um par (P, K) tal que

1. P é um subconjunto de $P(u)$ para algum u.
2. $K = \{\pm |p_1 - p_2|, p_1, p_2 \in \mathbb{R}\}$

Observação. Esta definição de escala é muito primitiva e não nos vai satisfazer. Consiste apenas num conjunto de notas musicais e de intervalos entre essas notas sem quaisquer restrições. Um exemplo das limitações desta escala é a de não temos nem uma nota inicial nem uma nota final na escala, nem termos nenhum limite para o número de notas numa oitava. Para mais detalhes, ver [3].

As escalas musicais a que vamos dar atenção vão ser aquelas que têm origem nas relações básicas harmónicas. Para isso temos que definir os seguintes conceitos.

Notação. Seja L_n, o grupo gerado por $B_n = (< B_n >)$.
Seja Q_n o conjunto definido por $q + L_n$ em que $q \in \underline{P}(u)$.

Definição. Uma *sequência harmónica* gerada em q por B é o par $(q+ < B_n >, < B_n >)$ que podemos representar por (Q_n, L_n).
Observação. Se quiséssemos considerar escalas construídas a partir de relações básicas baseadas na divisão equalitária substituíamos B_n por D_n

Observação. Nas escalas musicais que vamos construir podemos considerar apenas a relação básica **I**, e nesse caso se tivermos apenas uma classe de frequência, obtemos uma escala com apenas uma nota.
Se considerarmos relações básicas **I**, e **V** vamos ter que considerar também -**V** e a escala que obtemos incluirá além das classes de frequência iniciais, as que se obtêm a partir destas por intervalos de quinta e quarta perfeitos (-**V** vai definir um intervalo de quarta perfeita). Não vamos no entanto obter as classes de frequência a partir de intervalos de terceira (**III** não está incluída). As escalas construídas apenas com relações básicas **V** são as escalas musicais pitagóricas.

Considerando um conjunto de relações básicas $X = \{b_0, b_1, b_2\}$ isto é formado por **I**, **V**, **III**, vamos poder obter novas relações combinando estas; por exemplo **V-III** (sexta maior) ou **III-V** (terceira menor). Estas relações são musicalmente muito importantes. Do ponto de vista de geradores do grupo podíamos considerar o grupo $< B_n >$ que nos interessa gerado por **I**, **V** e **III-V** em vez de **I**, **V**, **III**.
Para cimentar a importância musical destas novas relações introduzimos a noção de relações consonantes.

Definição. As *relações consonantes* em $< B_n >$ são as relações $b_j - b_k$ com $n \geq j > k \geq 0$, $j = 1, 2, ...n$, e $k = 0, ...n - 1$ derivadas das relações básicas de B_n.

No caso de $B_n = \{b_0, b_1, b_2\}$, vamos obter as relações consonantes **V**, **III**, **III-V**, e as suas inversões.
O conjunto das relações consonantes denota-se por C_n. É este o conjunto que vamos tomar para construir as sequências harmónicas

Proposição. Para $0 \leq n \leq 3$, L_n é gerado por C_n.

Só nos vão interessar algumas das sequências harmónicas que podemos construir.

Definição. Um *sistema ideal* na sequência (Q_n, L_n) é um par (Q, L) tal que:

1. $Q \subset Q_n$

2. Se q_1 e q_2 forem dois elementos de Q, ou $q_1 = q_2$ ou $\nu(\nu^{-1}(q_1) \cap \nu^{-1}(q_2)) = \emptyset$.

3. $L = \{J \in L_n | \exists q_1, q_2 \in Q$, tais que $q_1 + J = q_2\}$.

Observação. L não tem que ser um grupo.

Observação. Com esta definição já vamos exigir que as notas da escala não tenham intersecções não vazias nos intervalos que as definem.

Proposição. Se (Q, L) for um sistema ideal

1. $\#Q \leq 1/2\ u$
2. $\#L \leq (\#Q)^2 - \#Q + 1$

Considerando esta proposição, se construirmos escalas musicais partindo apenas de sistemas ideais resolvemos o problema do número de notas por oitava.

Para simplificar necessitamos de introduzir alguma notação referente aos sistemas que vamos considerar, isto é sistemas ideais harmónicos.

Definição. Vamos designar por:

1. $\mathbf{H}$ a classe de sistemas ideais harmónicos.
2. $\mathbf{H}_n$ a classe de sistemas de $\mathbf{H}$ derivados de $< C_n >$
3. ${}_m\mathbf{H}_n$ a classe de sistemas de $\mathbf{H}_n$ com m classes de frequência.

A n chama-se dimensão harmónica e a m cardinalidade do sistema.

Observação. Diferentes compositores usam diferente cardinalidade. Por exemplo: no canto Gregoriano $m = 7$ ou 8, Wagner ou os Beatles usam $m = 12$, Giovanni Gabrieli e H. Schütz usam $m = 14$ e Guillaume Costeley e John Bull ocasionalmente $m = 19$.

2.5 Tríades maiores e menores. Escalas diatónicas

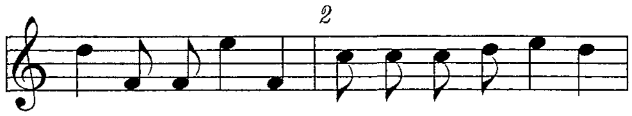
Definição. Dizemos que q_1 e q_2 estão ligadas no sistema harmónico $(Q, L) \in \mathbf{H}$, se existirem relações consonantes $J_1, ..., J_k$ em L, tais que:

1. $q_1 + J_1 + ... + J_k \in Q$, para $1 \leq j \leq k$
2. $q_1 + J_1 + ... + J_k = q_2$.

A distância harmónica entre duas classes de frequências é o menor número de relações consonantes que as ligam.

Exemplo. Nos diagramas que se seguem vamos representar as relações consonantes intervenientes pelos seguintes símbolos: a relação **V** por -, a relação **III** por / e a relação **III-V** ou a relação **V-III** por \.

Consideremos o seguinte trecho musical



(O primeiro compasso corresponde ao início da área "Voi que sapete" e o segundo ao início de "Au clair de la lune")

Nos dois compassos apresentados vamos ter:
No primeiro compasso temos Ré - Fá - Mi. As notas estão todas ligadas harmonicamente.

No segundo compasso:

```
        Mi
        /
    Dó          Ré
```

Neste caso Ré não está ligado harmonicamente com Dó.

A próxima definição vai-nos permitir introduzir mais duas noções que vão restringir ainda mais os sistemas harmónicos que vamos considerar.

Definição. Um sistema *coerente* é um sistema harmónico com uma cadeia de relações **V** que liga harmonicamente todas as classes de frequência. Pretendemos assim que todas as notas da escala estejam ligadas. Que não exista nenhuma classe ou classes que não se possa obter das outras aplicando as relações do sistema.

Exemplo.

```
   Ré  -  Lá  -  Mi  -  Si
1.
    \     / \    / \    / \
      Fá  -  Dó  -  Sol  -  Ré
```

Corresponde a um sistema coerente.

```
          Lá  -  Mi  -  Si
2.
          / \    / \    / \
     Fá  -  Dó  -  Sol  -  Ré
```

Ré - Lá - Mi - Si

e \ / \ / \ /

Fá - Dó - Sol

Não correspondem a sistemas coerentes.

Definição. Um sistema *consonante* é um sistema harmónico no qual a distância harmónica entre cada dois elementos distintos é 1

ExemploNo Exemplo 1 anterior a distância harmónica entre Ré e Fá é 1, mas a distância harmónica entre Dó e Ré é 3.

Três notas musicais diferentes relacionadas por intervalos de terceira constituem um conjunto de notas musicalmente importante. Por exemplo Dó, Mi, Sol separados os dois primeiros e os dois últimos por intervalos de terceira. Um conjunto de três notas separado por este tipo de intervalos chama-se uma tríade.

As definições seguintes dizem respeito a sistemas construídos a partir de três classes de frequência.

Definição. Uma *tríade consonante* é um sistema ${}_3\mathbf{H}_2$ consonante.

Definição. Se $\mathbf{H}=(Q,L)$ é uma tríade consonante então q é a *raiz* da tríade consonante se q e $q+\mathbf{V}\in Q$. Uma tríade consonante é *maior* se, sendo q a raiz da tríade se tiver $q+\mathbf{III}\in Q$. Caso contrário é uma *tríade menor.*

Exemplo.

•

Tríade Maior / \ .

• - •

• - •

Tríade Menor \ /

•

Ré - **Lá** - Mi - Si

Exemplo. \ / \ / \ / \

Fá - **Dó** - Sol - Ré

Vamos obter nesta sequência três tríades maiores. Na tríade assinalada a raiz é Fá. Este sistema também contém uma cadeia de duas tríades menores, mas não incluem o sistema todo, ao contrário da cadeia de tríades maiores.

Definição. Uma *escala ideal* que representa o sistema ideal (Q,L) é uma escala $(P,K)\subseteq(\mu^{-1}(Q),\mu^{-1}(L))$, que satisfaz as seguintes condições:

1. existem reais a e b tais que $P=\{p(r)\in\mu^{-1}(Q)\mid a\leq r\leq b\}$.
2. $(\mu(P),\mu(K))=(Q,L)$.

A partir de agora o termo escala refere-se sempre a escalas ideais.

Definição. Uma *escala diatónica* é uma escala que representa um sistema harmónico coerente com um total de 6 relações tipo **V**

Exemplo. O sistema harmónico ${}_7\mathbf{H}_1$ representado por $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$ representa uma escala diatónica.

Exemplo. Os sistemas harmónicos ${}_7\mathbf{H}_2$ representados por nos dois sistemas não coerentes do exemplo não vão representar escalas estritamente diatónicas

Definição. Um *tom* é um intervalo menor que uma oitava que representa uma das relações:

1. **2V** se o sistema for do tipo $\mathbf{H}_n$ se $n \geq 1$
2. **III-2V** se o sistema for do tipo $\mathbf{H}_n$ se $n \geq 2$
3. **-VII** e o sistema for do tipo $\mathbf{H}_3$

Um *meio tom* diatónico é qualquer intervalo menor que um tom numa escala diatónica.

Definição. As notas *Dó Ré, Mi, Fá, Sol, Lá , Si*, representam as classes de frequência que geram uma escala diatónica com meios tons de Si para Dó e de Mi para Fá.

Exemplo. Considerando o sistema harmónico ${}_7\mathbf{H}_1$ representado por $\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet$. Obtemos a sequência de quintas Fá - Dó - Sol - Ré - Lá - Mi - Si.

O modelo apresentado vai permitir definir outros tipos de escalas e tratar ainda, por exemplo o problema do temperamento. Toda essa exposição assim como os detalhes musicais e matemáticos do modelo apresentado estão em [3]

3 Bibliografia

[1] Assayag, G., Feichtinger, H. G., Rodrigues,J.F., Ed. **Mathematics and Music**. Springer. 2002

[2] Colóquio / Ciências n.24 Fundação Calouste Gulbenkien. 1999

[3] Linley, M., Turner-Smith, R., **Mathematical Models of Musical Scales**.Verlag für systematische Musikwissenschaft.1993

[4] Moreira de Sá, B. V. Theoria mathemática da Música. Annaes do Orpheon Portuense

[5] Neuwirth, E. **Musical Temperaments**. Springer. 1997

[6] Paiva de Oliveira, João Pedro, **Teoria Analítica da Música do Século XX** Fundação Calouste Gulbenkien. 1998