Ecuación diferencial ordinaria de primeiro orde.
Algunhas aplicacións.

Miguel Antonio del Río Vázquez.

Esquema da charla impartida o día 24 de marzo de 2003 na Facultade de Matemáticas dentro do ciclo "Unha andaina pola matemática".

Esta charla consistíu no resumo dalgúns conceptos e aplicacións elementais en relación ás ecuacións diferenciais ordinarias de primeiro orde, baseado no visionado interactivo do programa "Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera" (Addison Wesley Longman, 2000).
Todas as referencias a laboratorios que aparecen no esquema da charla corresponden a este programa, que creemos de grande utilidade para a comprensión dos conceptos sobre os que tratamos.

I.- ECUACIÓN DIFERENCIAL ORDINARIA DE PRIMEIRO ORDE.

Ecuación: $F(t,x,x')=0$

onde $F: A \subset R^3 \to R$.

Solución: $t \in I \to x(t) \in R$

tal que $\forall t \in I \;\; F(t,x(t),x'(t))=0$, onde I é un intervalo da recta real.

Ecuación en forma normal: $x' = f(t,x)$
onde $f: B \subset R^2 \to R$

(Solución: $t \in I \to x(t) \in R$ tal que $\forall t \in I$ $x'(t) = f(t,x(t))$).

Problema de Cauchy para unha ecuación de primeiro orde en forma normal.

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

Teorema (de Picard-Lipschitz).- Si D é un aberto de R^2 e $f:(t,x) \in D \to f(t,x) \in R$ é continua e localmente lipschitziana respecto da variable x, entón para cada punto $(t_0, x_0) \in D$ existe unha única solución do problema de Cauchy

$$\left.\begin{array}{l} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{array}\right\}$$

Ademáis, esta solución está definida nun contorno de t_0.

Do teorema dos incrementos finitos síguese que as hipótesis do teorema se cumplen cando f e $D_x f$ son continuas en D. O que, naturalmente, está garantido si f é de clase 1 en D.

Laboratorio I.7.a,b,c.

Interpretación gráfica do concepto de solución dunha EDO de primeiro orde en forma normal.

Campo de direccións asociado a $x' = f(t,x)$.
Isoclinas: curvas sobre as que o campo é constante, $(f(t,x) = c)$

Laboratorios:
I.2.a: Campos de direccións e solucións.
I.6.a: Isoclinas.

Ecuacións autónomas.

Ecuación autónoma: $x' = f(x)$

Nótese que nestas ecuacións, dado que o campo non depende de t, as isoclinas son as rectas $x = c$.

Conceptos de dinámica cualitativa:

Órbita dun punto x_0: Proxección sobre a recta $t = 0$ da gráfica da solución da ecuación por calquiera punto do tipo (t_0, x_0) para $t \geq t_0$ cando sobre esta proxección se indica o sentido de percorrido ó crecer t. Do carácter autónomo do sistema síguese que a órbita é independente do valor de t_0, polo que frecuentemente se toma $t_0 = 0$.

Tipos de órbitas:
Punto fixo ou de equilibrio.
Punto con órbita decrecente e punto con órbita crecente.
Punto fixo estable (atractor, sumideiro ou pozo).
Punto fixo inestable: repulsor (fonte) e nodo.
Determinación da dinámica cualitativa da ecuación $x' = f(x)$ á vista da gráfica de f.
Recta de fases: É a recta $t = 0$ cando nela se destacan os principais elementos da dinámica cualitativa da ecuación.
Sistema dinámico: A dinámica determinada pola ecuación e que está reflectida na recta de fases, coñécese como sistema dinámico asociado á ecuación.

Laboratorio: I.3.c $\quad (x' = x(1-x))$.

Bifurcación:

Familia de ecuacións autónomas dependentes dun parámetro:

$$x' = f(x,r) = f_r(x).$$

Bifurcación: cambio na dinámica cualitativa de $x' = f(x,r) = f_r(x)$, producida por cambios no valor do parámetro r.

Ó valor de r no que se produce o cambio chámase valor ou punto de bifurcación.

Laboratorio: V.23. a,b,c,d.

Diagrama de bifurcación: O plano rx no que, para distintos valores de r, se debuxa verticalmente a recta de fases do sistema chámase diagrama de bifurcación. Neste diagrama teñen especial relevancia os valores de bifurcación.
O seu coñecemento é moi útil en orde a **prever** e mesmo **controlar** o comportamento dinámico do sistema actuando sobre o valor do parámetro.

Laboratorio V.23. a,b,c,d.

II.- EXEMPLOS DE APLICACIÓNS DAS EDOS DE PRIMEIRO ORDE.

Modelo Malthus:

Ecuación: $x' = r_1 x - r_2 x = rx$.

Solución por $(0, x_0)$: $x(t) = x_0 e^{rt}$.
Determinación dos parámetros.

Laboratorio I.3.a.

Outras aplicacións desta ecuación: Descomposición radioactiva (determinación da idade dun fósil); eleminación de drogas por parte dun organismo vivo, etc.

Modelo loxístico:

Ecuación:
$$x' = ax - bx^2 = ax(1 - \frac{b}{a}x) = rx(1 - \frac{x}{k}) =$$
$$= \frac{r}{k}x(k-x) = Ax(k-x)$$

Onde $a, b > 0$ e

$$r = a, k = \frac{a}{b} = \frac{r}{b}, A = \frac{r}{k} \quad .$$

Solución por $(0, x_0)$:

$$x(t) = \frac{kx_0}{x_0 + (k - x_0)e^{-rt}} .$$

Compara-los modelos de Malthus e loxístico mediante unha táboa de poboacións.

Laboratorios: I.3.b. $N' = rN(1 - \frac{N}{k})$

I.3.c. $x' = x(1 - x)$

Outras aplicacións: Difusión dunha enfermidade contaxiosa, un rumor ou un avance técnico.

$$x' = Ax(k - x)$$

Ecuación loxística con recolección.

$$x' = rx(1 - \frac{x}{k}) - h$$

Laboratorio I.3.d $x' = x(1 - x) - h$

Exercicio: Analizar o seguinte modelo.

$$x' = rx(1 - \frac{x}{k}) - hx = (r - h)x(1 - \frac{r}{r - h}\frac{x}{k})$$

Questións:

- ¿Qué se pretende modelar?
- ¿Sobre qué presupostos se fai o modelo?
- ¿Qué ocurre no caso h=0?
- ¿Cál é o comportamento asintótico da dinámica?
- ¿Pode considerarse un modelo correcto para o fin previsto?

Cambio da temperatura dun corpo debido ó contacto co seu contorno.

Lei de Newton: $T' = k(A - T)$, $k > 0$

Solución: $T(t) = A + (T_0 - A)e^{-kt}$

Laboratorio: I.1.a.
Laboratorios: I.1.a,b para a determinación de k

Ecuacións diferenciais ordinarias lineais de 2° orde: o oscilador mecánico.

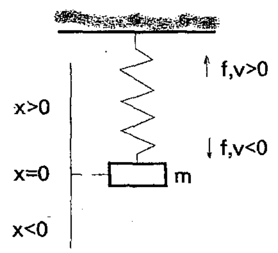
Miguel Antonio del Río Vázquez

Esquema da charla impartida o día 31 de marzo de 2003 na Facultade de Matemáticas dentro do ciclo "Unha andaina pola matemática".

Esta charla consistíu nun somero recordatorio do estudio das ecuacións que modelan o oscilador mecánico masa-resorte, nos distintos supostos, baseado no visionado interactivo do programa "Ecuaciones Diferenciales y problemas con valores en la frontera" (Addison Wesley Longman, 2000).
Todas as referencias a laboratorios que aparecen no esquema da charla corresponden a este programa, que consideramos de grande utilidade na comprensión das cuestións que abordamos.

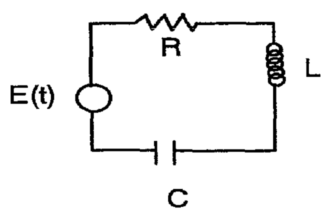
OSCILADOR MECÁNICO.

Consideremos un sistema formado por un resorte do que pende unha masa m, como se indica na figura. Supoñamos que estamos en ausencia de gravidade, o que non supón restricción algunha.



Ecuación: Como veremos a ecuación máis xeral que rixe este sistema adoptará a forma $mx''+bx'+kx = F(t)$,
onde $m,k > 0, b \geq 0$.

Importancia do modelo: Permite interpretar por analoxía con este símil mecánico de fácil asimilación, moitos outros fenómenos rexidos por ecuacións lineais de 2° orde con coeficientes constantes positivos.
Exemplo: Circuito R,L,C. Oscilador eléctrico.



Ecuación : $$Lq''+Rq'+\frac{1}{C}q=E(t)$$

Correspondencias na analoxía

$$x \leftrightarrow q \qquad b \leftrightarrow R$$
$$v \leftrightarrow I \qquad k \leftrightarrow 1/C$$
$$m \leftrightarrow L \qquad F(t) \leftrightarrow E(t)$$

1) Oscilador non amortecido.

Supoñamos que non hai ningún tipo de fricción no sistema, e que sobre o mesmo non actúa forza externa algunha.

Ecuación: Facendo uso da 2ª Lei de Newton e da Lei de Hooke, obtense
$$m.a=f=-kx,$$
con $k>0$ (rixidez).

É dicir, $$mx''+kx=0$$

Ou, o que é o mesmo, $$x''+\frac{k}{m}x=0.$$

Poñendo $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$, obtense $$x''+\omega^2x=0.$$

Ecuación diferencial homoxénea de 2º orde e coeficientes constantes que "modela" o comportamento do oscilador.
Ecuación característica $D^2+\omega^2=0$ e autovalores $D=\pm\omega i$.
Solución xeral:
$$x(t)=c_1\cos\omega t+c_2 sen\omega t.$$

A solución particular polas c.i.
$$\left.\begin{array}{l} x(0)=x_0 \\ x'(0)=v_0 \end{array}\right\},$$

resulta: $$x(t)=x_0\cos\omega t+\frac{v_0}{\omega}sen\omega t.$$

E, poñendo $A=\sqrt{c_1^2+c_2^2}=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$ $\quad sen\phi=\frac{c_1}{A}=\frac{x_0}{A}$,

$\cos\phi=\frac{c_2}{A}=\frac{v_0/\omega}{A}$, obtense

$$x(t) = Asen(\phi + \omega t)$$

Nótese que mentres que A e ϕ dependen das condicións iniciais, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ depende soamente das características do sistema.
A solución é, entón, unha función sinusoidal de frecuencia $\omega / 2\pi$ (período $2\pi / \omega$) e amplitude A.

Laboratorio II.9.b,c con $b = 0$.
Observar a enerxía do sistema.

2) Oscilador amortecido.

Supoñamos agora que o mecanismo anterior está suxeito a unha fricción debido ó medio no que se move, pero que sobre él non actua ninguna forza externa. Dacordo cos datos empíricos supoñemos que a forza que se opón ó movemento pola fricción é proporcional á velocidade, $-\beta x'$ ($\beta > 0$ é o coeficiente de amortecemento)
Neste caso da segunda lei de Newton temos

$$m.a = f = -kx - \beta x' \quad , \quad \text{con } k, \beta > 0.$$

É dicir,

$$x'' + \frac{\beta}{m} x' + \frac{k}{m} x = 0.$$

Ecuación lineal homoxénea de 2° orde con coeficientes constantes, que adoita escribirse na forma

$$x'' + 2bx' + \omega^2 x = 0,$$

ó poñer $b = \frac{\beta}{2m}$, $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.
Nótese que se $b = \beta = 0$, estamos no apartado 1).
A súa ecuación característica é

$$D^2 + 2bD + 1 = 0,$$

e os autovalores $-b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$.
Así a solución xeral dependerá dos tamaños relativos entre b e ω.

Caso a) Oscilador sobreamortecido.
Supoñamos $b > \omega$. Entón, os autovalores, λ_1 e λ_2, son negativos e distintos polo que a solución é

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

con c_1 e c_2 dependendo das condicións iniciais.

Polo tanto, a solución tende a 0 sin oscilacións, para todas as condicións iniciais, si ben pode ter un cambio de signo dependendo destas condicións (ó máis ten un máximo ou un mínimo local).

Laboratorio II.10.a.

Caso b) Oscilador subamortecido.

Supoñamos $b < \omega$. Os autovalores son agora complexos, $-b \pm i\sqrt{\omega^2 - b^2}$, e a solución xeral toma a forma

$$x(t) =$$
$$e^{-bt}(c_1 \cos t\sqrt{\omega^2 - b^2} + c_2 sen\, t\sqrt{\omega^2 - b^2})$$

Así que as oscilacións de $x(t)$ no contorno do punto de equilibrio se amortecen exponencialmente según transcurre o tempo, debido ó primeiro factor. **Laboratorio** II.10.a.

Caso c) Oscilador criticamente amortecido.

É o caso de transición entre os dous anteriores, correspondente a $b = \omega$.
Neste caso $-b$ é un autovalor doble, polo que a solución xeral é

$$x(t) = c_1 e^{-bt} + c_2 t e^{-bt} = (c_1 + c_2 t)e^{-bt},$$

que tende exponencialmente a 0, pero que dependendo das condicións iniciais pode presentar un cambio de signo. O comportamento é cualitativamente similar ó caso sobreamortecido (ó máis ten un máximo ou un mínimo local).

Laboratorio II.10.b.

3) Oscilador forzado.

Supoñamos que agora aplicamos á masa do resorte unha forza externa do tipo $f(t) = Fsenwt$. Entón da 2ª Lei de Newton temos

$$m.a = -kx - \beta x' + Fsenwt.$$

Que coas transformacións aplicadas nos casos anteriores, queda

$$x'' + bx' + \omega^2 x = Fsenwt.$$

Ésta é unha ecuación lineal non homoxénea con coeficientes constantes. **Su solución xeral se obtén sumando a unha solución particular da completa a solución xeral da homoxénea asociada**. Polo que a solución, ademáis de depender de ω e b, tamén dependerá de F e w.

Caso a. Supoñamos $b \neq 0$.

Entón os autovalores da ecuación homoxénea asociada son $-b \pm \sqrt{b^2 - \omega^2}$, e o operador diferencial anulador do termo independente ten por autovalores $\pm wi$.

Do anterior pódese deducir que a solución xeral da ecuación completa é

$$x(t) = \frac{-F2bw}{(\omega^2 - w^2)^2 + 4w^2b^2}\cos wt +$$

$$\frac{F(\omega^2 - w^2)}{(\omega^2 - w^2)^2 + 4w^2b^2} senwt +$$

$+$

Solución xeral homoxénea asociada

$$= \overline{A} sen(\overline{\phi} + wt) +$$

$+$

Solución xeral homoxénea asociada

con

$$\overline{A} = \sqrt{\frac{F^2 4b^2w^2 + F^2(\omega^2 - w^2)^2}{\left[(\omega^2 - w^2)^2 + 4w^2b^2\right]}}$$

$$sen\overline{\phi} = \frac{\dfrac{-F2bw}{(\omega^2 - w^2)^2 + 4w^2b^2}}{\overline{A}}$$

$$\cos\overline{\phi} = \frac{\dfrac{F(\omega^2 - w^2)}{(\omega^2 - w^2)^2 + 4w^2b^2}}{\overline{A}}$$

Do primeiro termo dícese que é a parte estacionaria e do enmarcado que é a parte transitoria pois, como se veu no apartado 2), tende a 0 nos tres casos: sobreamortecido, subamortecido, e criticamente amortecido.

Observar na fórmula de $\overline{A}$ o que ocurre cando $\omega = \frac{k}{m} \to w, b \to 0$

Laboratorio 11, con $b \neq 0$.

Caso b. Supoñamos $b = 0$.

A ecuación é entón $x'' + \omega^2 x = Fsenwt$.
Polo que a solución da homoxénea asociada, ó ter por autovalores $\pm\omega i$, é do tipo

$$c_1 \cos\omega t + c_2 sen\omega t = Asen(\phi + \omega t).$$

A particular da completa depende da relación entre w y ω, tal como a continuación se describe:

i) $w^2 \neq \omega^2$.
Neste caso os autovalores da homoxénea son $\pm\omega i$ e os do anulador da completa $\pm wi$. De aquí dedúcese que a solución xeral da completa é

$$x(t) = \frac{F}{\omega^2 - w^2} senwt + c_1 \cos\omega t + c_2 sen\omega t =$$
$$\frac{F}{\omega^2 - w^2} senwt + Asen(\phi + \omega t).$$

Así que $x(t)$ é unha superposición de dous sinusoides de frecuencias $w/2\pi$ e $\omega/2\pi$.

Laboratorio 11, con $b=0$, $m=2$ y $k=w=1$.

ii) $w^2 = \omega^2 \quad (w = \pm\omega)$.
Éste é o caso coñecido como **resonante.**
Os autovalores da homoxénea, $\pm\omega i$, coinciden cos do operador anulador do termo independente, $\pm wi$. Así que a solución xeral da completa toma a forma

$$x(t) = t(b_1 \cos\omega t + b_2 sen\omega t) +$$
$$c_1 \cos\omega t + c_2 sen\omega t =$$
$$t\bar{A} sen(\bar{\phi} + \omega t) + Asen(\phi + \omega t)$$

Onde o segundo termo é acotado mentres que o primeiro tende a infinito.
Fenómeno de resonancia.
Debe notarse que éste é un caso de carácter teórico, de trasición entre os anteriores. Sen embargo, como foi notado máis arriba, o crecemento excesivo de $x(t)$ xa aparece cando b é pequeño e ω e w toman valores moi próximos. Por outra parte, a experiencia demostra, que éste é un fenómeno que se da na realidade, e que hai que ter en conta a efectos prácticos. Nestes casos, a partir dun certo tamaño de $x(t)$ a Lei de Hooke xa non é aplicable, o que invalida o modelo a partir de un certo valor de t.

Laboratorio 11, con $b=0$.
Poner $\omega = \frac{k}{m} = \frac{1}{1} = w$.
Logo tomar para esos valores $b \to 0$, para ver se pode apreciarse o comportamento cando nos aproximamos ó caso de resonancia.
acercamiento al caso .