JORNADA MATEMÁTICA

Edición a cargo de Jesús Ildefonso Díaz Díaz
José Luis Fernández Pérez
Antonio Martinón Cejas
Teresa Riera Madurell

© Publicaciones del Congreso de los Diputados

Dirección de Estudios y Documentación de la Secretaría General
Departamento de Publicaciones
Floridablanca, s/n. 28071 Madrid

Impresión: ELECE Industrias Gráficas, S.L.
Depósito legal: M-2962-2000
ISBN: 84-7943-138-5

Jornada matemática

21 de enero de 2000

CONGRESO DE LOS DIPUTADOS


CONGRESO DE LOS DIPUTADOS

Para el Congreso de los Diputados y especialmente para su Presidente, constituye una especial satisfacción presentar esta publicación editada con motivo de la celebración en esta Casa de una Jornada Matemática a fin de conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas 2000.

El Parlamento quiere de esta forma rendir su homenaje a la Ciencia matemática y especialmente a las Matemáticas españolas, que han alcanzado en la actualidad su reconocimiento internacional, gracias al esfuerzo de generaciones de matemáticos que han impulsado la enseñanza y la investigación de esta disciplina en nuestro país.

Me gustaría, en estas breves palabras de presentación, hacer una especial mención a los diputados D. Antonio Martinón y D.ª Teresa Riera, así como a los profesores D. Jesús Ildefonso Díaz y D. José Luis Fernández, que han sido los impulsores de esta brillante iniciativa, con la decidida pretensión de convertir a las Matemáticas en una Ciencia más próxima a la sociedad.

Estoy convencido de que esta publicación ayudará a cumplir este objetivo y servirá de instrumento para acercar más a la comunidad matemática con el conjunto de los españoles.

Federico Trillo-Figueroa Martínez-Conde
Presidente del Congreso de los Diputados

Sumario

Introducción: Matemáticas en las Cortes

Jesús Ildefonso Díaz, Real Academia de Ciencias
Antonio Martinón, Diputado por Santa Cruz de Tenerife
Teresa Riera, Diputada por les Illes Balears

Durante los últimos quince meses se ha hablado mucho de Matemáticas en el Congreso de los Diputados, lo que, desde luego, no es habitual. La presencia de esta ciencia en ámbito tan inusual, ha estado justificada por la celebración del año 2000 como *Año Mundial de las Matemáticas,* así declarado por la Unión Matemática Internacional. Sin embargo, no se concibe esta celebración como una fiesta para matemáticos, sino que, muy al contrario, se desea que en ella participe el planeta entero, pues, a fin de cuentas, se pretende que todos reconozcan la importancia de las Matemáticas y que se actúe en consecuencia.

En todo el mundo se conmemorará el *Año de las Matemáticas* y será una extraordinaria oportunidad para mejorar el nivel matemático de las sociedades, base de su desarrollo en todos los órdenes. Diferentes instituciones han prestado su apoyo a esta celebración, destacando la ofrecida por los Estados a través de la Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO).

También las Cortes Generales en nuestro país han decidido participar, primero con la aprobación de la *Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas* y más tarde con la celebración de la *Jornada matemática.* El objetivo de este libro es poner al alcance de un buen número de personas los diversos documentos que se refieren al *Año de las Matemáticas* en el Congreso de los Diputados, es decir, los textos relacionados con la *Proposición no de Ley* y las intervenciones habidas en la *Jornada.*

El 9 de febrero de 1999, la Comisión Mixta Congreso de los Diputados-Senado de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico aprobó, de forma unánime, la *Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000,* que había presentado algunos meses antes el Grupo Parlamentario Socialista. La propuesta, elaborada por los diputados Antonio Martinón, Teresa Riera, Carmen Heras y Bernardo Bayona, contenía una amplia exposición de motivos que se reproduce en este libro.

El Acuerdo adoptado por la Comisión parlamentaria, que el lector encontrará aquí, recoge el apoyo al *Año Mundial de las Matemáticas 2000* y en él se manifiesta la voluntad decidida de participar en dicha celebración «mediante la organización de actividades en las sedes de las Cortes».

Once meses más tarde, el 21 de enero de 2000, tiene lugar la *Jornada matemática* en el Congreso de los Diputados, lo que de hecho ha supuesto una insólita y peculiar manera de iniciar el *Año de las Matemáticas* en España.

El apoyo de las Cortes tiene como fundamento la importancia de las Matemáticas, cuyas singulares características, que ninguna otra disciplina puede exhibir de forma conjunta, nos atrevemos a esbozar: *constituyen una ciencia pura*: sus problemas suponen un reto para la inteligencia y sus teorías son elaboradas creaciones intelectuales; *contienen belleza*: la que impregna cada uno de sus rincones, sus teoremas y sus demostraciones; *están presentes en el arte*: en la música, en la pintura, en la arquitectura...; *son inseparables a toda cultura*: su historia se entrecruza con la de nuestra Filosofía y se encuentran en todas las civilizaciones; *poseen numerosos usos cotidianos*: herramienta de uso frecuente para millones de personas a las que les resultan imprescindibles para comprender y analizar la información que les llega; *poseen aplicaciones universales*: en todas las ramas del saber, especialmente tras la irrupción del ordenador en la vida científica y cotidiana, en las ciencias de la naturaleza y en las ciencias sociales, en las tecnologías, en las comunicaciones, en la economía...; *sirven como instrumento para la cooperación*: con ellas puede establecerse una sencilla y poderosa colaboración entre naciones y culturas; y, por último, *son imprescindibles para la educación*: sus cualidades las hacen fundamentales en la formación intelectual de los individuos.

Referirse a las Matemáticas en un Parlamento conduce, se quiera o no, a considerar las relaciones entre las Matemáticas y la Política. Pronto se concluye que son diversas las perspectivas que resulta posible adoptar.

La intervención de apertura en la *Jornada matemática*, a cargo de Federico Trillo-Figueroa, Presidente del Congreso de los Diputados, ofreció una visión de las Matemáticas desde la Política. De igual modo, en el discurso de clausura, Joan Marcet, Vicepresidente de la Cámara, mostró conexiones íntimas entre ambas actividades. En ambos se puede encontrar el compromiso de las Cortes con el *Año de las Matemáticas*.

Una de las relaciones entre Matemáticas y Política se refiere a esa ciencia como soporte para la toma de decisiones. Un ámbito que incluye no sólo cuestiones como la teoría de la decisión, la estadística, el tratamiento de encuestas o la planificación estratégica, sino también el análisis mediante herramientas matemáticas de nociones y fenómenos políticos que tradicionalmente se han abordado desde disciplinas como la Sociología, la Filosofía Social, la Psicología, la Economía o la propia Teoría Política. Algunos de estos aspectos fueron ilustrados por el profesor David Nualart en la *Jornada.*

Otra perspectiva diferente se refiere a la presencia de matemáticos en la actividad política. Cabría preguntarse si una sólida y amplia formación matemática o, en general, científica, aporta a los representantes políticos alguna visión singular o si tiene alguna repercusión en su práctica política. Es posible que sea así, pero está fuera de estas líneas indagar en ello. A fin de ilustrar la participación en la política de personas vinculadas a las Matemáticas, se incluye en este libro un anexo con la relación de los que han sido diputadas y diputados.

El caso más célebre es el de José Echegaray, quien contribuyó de forma notable a la actualización de las matemáticas españolas en el último tercio del siglo XIX. Fue catedrático de universidad, diputado en varias legislaturas y ministro, y alcanzó el Nobel de Literatura por su obra dramática. La conferencia del profesor José Manuel Sánchez Ron en la *Jornada* estuvo principalmente dedicada a glosar su figura.

También cabe referirse a la política que desde los poderes públicos se diseña y se desarrolla en relación con las Matemáticas en el marco más amplio de la política científica. Los intentos más firmes de impulsar el desarrollo de la Ciencia en nuestro país han estado vinculados a los afanes modernizadores desde el Gobierno, lo que casi nunca duraba lo suficiente para que tuvieran pleno éxito.

Mucho se ha discutido sobre la aportación de nuestro país a la Ciencia y sobre el grado de desarrollo de ella entre nosotros –muy en particular, de las Matemáticas–, en un debate que se ha denominado *La polémica de la ciencia española*. Ante la evidencia y contundencia de los hechos, la conclusión más aceptada ha sido la de que, hasta finales del siglo XX, la aportación española, cuando ha existido, ha sido modesta. Con palabras del joven Echegaray de 1866, la «matemática nada nos debe; no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que labios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo». El profesor Ángel Martín Municio describe en su intervención durante la *Jornada* la evolución de las matemáticas españolas y sus instituciones.

Por fortuna, hoy podemos decir que las matemáticas españolas, la ciencia en general, comienza a tener el peso que corresponde a un país de las características económicas y culturales del nuestro, y ello se debe al formidable esfuerzo realizado tras la recuperación de la democracia. La celebración en Barcelona del *Tercer Congreso Europeo de Matemáticas,* en el verano de 2000, debe ser interpretada como uno de los exponentes más claros del reconocimiento internacional al alto nivel alcanzado.

Desde luego, la cota a la que han llegado hoy las matemáticas españolas tiene sus raíces en el trabajo de generaciones de matemáticos anteriores, que realizaron notables esfuerzos por conocer las matemáticas que se hacían fuera de nuestro país y que plantaron en nuestro suelo la semilla de la investigación que ahora florece. Que hasta hace poco no se haya tenido una producción matemática relevante y amplia no niega que haya habido matemáticos merecedores de elogio. Como distinguía con acierto Ortega y Gasset «en España [...] ciencia, no; hombres de ciencia, sí».

Las características de las Matemáticas las convierten en una de las disciplinas básicas en la formación y cultura de los ciudadanos. En esa línea, entre los objetivos de la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas 2000* está aumentar y mejorar la presencia de las Matemáticas en la población en general, elevando la consideración social que se tiene de ellas.

Mirando más allá del año 2000 resulta innecesario destacar el papel que la educación juega para el logro de esas metas con carácter permanente. La enseñanza de las Matemáticas en España fue objeto de una mesa redonda en la *Jornada.* Los profesores Miguel de Guzmán (que actuó de coordinador), Luis Balbuena, María Jesús Luelmo, María Victoria Sánchez y Sebastià Xambó trataron, desde enfoques diferentes, algunos de los problemas que presentan las Matemáticas como disciplina escolar.

La idea de incrementar la presencia de las Matemáticas en la sociedad se ha de enfrentar con el desconocimiento general sobre esta ciencia. La celebración del *Año Mundial de las Matemáticas* ofrece una ocasión extraordinaria, quizás irrepetible en mucho tiempo, para establecer un diálogo entre la comunidad matemática y el conjunto de la sociedad. En ese diálogo, como en cualquier otro que pretenda ser fecundo, habrá que escuchar, de forma atenta y humilde, lo que los demás digan, de manera que todos los que participen tengan la convicción de que sus opiniones e ideas serán efectivamente oídas. El establecimiento de ese diálogo ha sido uno de los objetivos fijados por el Comité Español del Año de las Matemáticas, que en este libro ilustra su Presidente, el profesor José Luis Fernández.

El resultado de ese diálogo debe comprometer a todos y resultar eficaz para lograr el impulso matemático de nuestra sociedad, tanto en lo que se refiere a la investigación científica, como a sus aplicaciones a las otras ciencias y a la técnica, así como a la enseñanza y el conocimiento general de la población. Para ello será preciso divulgar las muchas facetas de las Matemáticas a las que antes nos hemos referido. En particular, será imprescindible explicitar las numerosas aplicaciones que las Matemáticas ofrecen a la práctica totalidad de las disciplinas, y que de una u otra forma están detrás de cuantos inventos y aparatos nos encontramos a diario en la sociedad actual. El profesor Jacques-Louis Lions, impulsor de la celebración del *Año de las Matemáticas,* aborda en su conferencia en la *Jornada* una constante que se encuentra en buena parte de la actividad matemática de todos los tiempos: su conexión con el universo externo a ellas mismas.

La Proposición no de Ley dio lugar a que los firmantes de esta introducción nos pusiéramos en contacto y, meses más tarde, colaborásemos en la organización de la *Jornada* y la edición de la presente obra. Desde luego, son muchas más las personas involucradas y a ellas les estamos profundamente agradecidos.

El Presidente del Congreso de los Diputados prestó su conformidad inmediata a la celebración de la *Jornada matemática* y a la publicación de este libro; de igual modo, la Mesa de la Cámara adoptó los acuerdos necesarios para que *Jornada* y libro fueran realidad. Aquí les expresamos nuestra gratitud por el apoyo que nos han dado.

Muchos funcionarios del Congreso han participado en una celebración que, para ellos, tenía mucho de raro, pero lo han hecho con dedicación e interés admirable. Gracias a todos y, especialmente, a José Luis Ruiz-Navarro e Ignacio Gutiérrez, letrados, a Juliana Congosto, Jefa del Departamento de Publicaciones, a Mateo Maciá, Sofía Gandarias y Margarita Barquilla, del Departamento de Archivo.

También agradecemos la colaboración de Magdalena López, del Servicio de Documentación-Museo de la Fábrica Nacional de Moneda y Timbre, así como la de Leticia de las Heras, Bibliotecaria de la Real Academia de Ciencias.

Por último, damos las gracias a quienes han intervenido en la *Jornada matemática,* aceptando así la invitación que les hicimos. Ellos lograron que el Palacio del Congreso de los Diputados fuera, por un día, escenario inigualable de una espléndida fiesta matemática.


JUAN DE PADILLA.
JUAN BRAVO.
MALDONADO
JUAN LANUZA.
DIEGO HEREDIA.
JUAN DE LUNA.
VELARDE.
ALVAREZ.
PALAFOX.

Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000

Acuerdo adoptado por unanimidad el 9 de febrero de 1999

La Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico, ante la celebración en España del Año Mundial de las Matemáticas 2000,

A) Considera que las matemáticas

1. Son una de las máximas expresiones de la inteligencia humana y un magnífico ejemplo de la belleza de las creaciones intelectuales.
2. Constituyen un eje central de la historia de la cultura y de las ideas.
3. Gracias a su universalidad, se aplican en las otras ciencias, de la naturaleza y sociales, en las ingenierías, en las nuevas tecnologías, y en las distintas ramas del saber y en los distintos tipos de actividad humana, de modo que resultan fundamentales en el desarrollo y el progreso de los pueblos.
4. Constituyen una herramienta básica para que la mayoría de las personas puedan comprender la sociedad de la información en la que viven.
5. Han desempeñado, y deberán seguir haciéndolo, un destacado papel en los sistemas educativos y en el aprendizaje de los escolares.
6. Se convierten en uno de los ámbitos más adecuados para la cooperación entre todos los pueblos por su lenguaje y valor universales.

B) Apoya dicha celebración, ya que

1. Es un impulso para la investigación matemática.
2. Intensifica la conexión de las matemáticas con sus aplicaciones, lo que permitirá aumentar la importancia en nuestro país de las matemáticas aplicadas.
3. Es una oportunidad para mejorar la educación matemática de los escolares.

4. Facilita la divulgación del conocimiento matemático y de las características propias de las matemáticas entre la población en general, entre los profesores y entre los propios investigadores matemáticos.
5. Permite ampliar la cooperación con los demás países, particularmente con los iberoamericanos.

C) Invita

1. A las instituciones y sociedades científicas a que celebren el Año Mundial de las Matemáticas 2000 con el ánimo de alcanzar los objetivos de la Declaración de Río de Janeiro.
2. A los profesores de matemáticas de todos los niveles educativos a que aprovechen la celebración para aumentar el nivel de competencia matemática de sus alumnos, perfeccionando su propio nivel científico y los métodos de enseñanza y aprendizaje, entendiendo las matemáticas como disciplina científica esencial para la formación del espíritu de los niños y jóvenes.
3. A los Gobiernos de las Comunidades Autónomas y a las Corporaciones Locales a que presten su apoyo a las instituciones y sociedades que en sus ámbitos territoriales planteen actividades en el marco de la celebración.
4. A los medios de comunicación a que se hagan eco de las actividades que se realicen, y trasladen a la sociedad aquellos aspectos de las matemáticas que tengan más interés para la mayoría de los ciudadanos.

D) Insta al Gobierno a que, dentro de su ámbito de competencias y de acuerdo, en su caso, con las Comunidades Autónomas,

1. Apoye, decidida y eficazmente, a las Sociedades e Instituciones que desarrollen actividades con tal motivo, particularmente al Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000.
2. Favorezca programas de investigación en el ámbito de la didáctica de las matemáticas.
3. Fomente la organización de actos culturales, académicos y lúdicos entre los estudiantes de todos los niveles educativos, tal como se hace en los demás países europeos.

4. Favorezca la investigación matemática y la relación de ésta con las aplicaciones, tanto las de carácter científico, como las industriales, empresariales o tecnológicas en general.
5. Colabore a la divulgación de las matemáticas y, a tal fin, promueva desde los medios de comunicación de titularidad pública el mayor conocimiento de las matemáticas por parte de la población en general.
6. Contribuya al conocimiento y al reconocimiento social de la obra histórica más relevante de los matemáticos españoles.
7. Establezca líneas de cooperación con otros países, especialmente los iberoamericanos, en los ámbitos de la investigación matemática y de la educación matemática.

E) Acuerda sumarse a dicha celebración mediante la organización de actividades en las sedes de las Cortes.

Proposición no de Ley sobre el Año Mundial de las Matemáticas 2000: exposición de motivos

Antonio Martinón Cejas, Diputado por Santa Cruz de Tenerife
Teresa Riera Madurell, Diputada por les Illes Balears
María del Carmen Heras Pablo, Diputada por Cáceres
Bernardo Bayona Aznar, Diputado por Zaragoza

Introducción

Las matemáticas tienen enorme relevancia en nuestra sociedad. Su universalidad hace que hoy resulten indispensables en las ciencias de la naturaleza y en las ciencias sociales, así como en las nuevas tecnologías. Su importancia afecta al conjunto de la sociedad, ya que la comprensión del mundo actual, con sus avances tecnológicos y la abundancia de información, hace necesaria la familiaridad con ciertas nociones matemáticas. Además, su historia es indisoluble de la historia de la filosofía y de la historia de las ideas, y desde siempre ha jugado un papel central en las diferentes formas de entender la educación en todos los pueblos.

La celebración del Año Mundial de las Matemáticas 2000, proclamado por la Unión Matemática Internacional, se presenta como una magnífica oportunidad para dar en nuestro país un impulso a las matemáticas, tanto en lo que se refiere a la investigación científica, como a sus aplicaciones a las otras ciencias y a la técnica, así como a la enseñanza y el conocimiento general de la población.

1. El Año Mundial de las Matemáticas 2000

1.1. La Unión Matemática Internacional ha proclamado el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. En la Declaración de Río de Janeiro (1992), aprobada por dicha Unión, se fijan tres objetivos para la correspondiente celebración.

El primer objetivo apunta a los grandes desafíos de las matemáticas para el siglo XXI. Se pretende que varios matemáticos de primera fila orienten la actividad de investigación mediante el enunciado de los problemas que consideren centrales para el próximo siglo. De esta forma se rememora lo ocurrido en el 2.º Congreso Internacional de Matemáticas, celebrado en París en 1900, en el que David Hilbert formuló veintitrés problemas que captaron la atención de los mejores matemáticos durante los primeros decenios de nuestro siglo XX, algunos de los cuales continúan sin resolverse.

El segundo objetivo se sitúa en el marco de la cooperación. Teniendo en cuenta el papel que las matemáticas tienen en el desarrollo de las sociedades, se pretende que los países menos avanzados incrementen su nivel matemático, lo que supone un esfuerzo de cooperación internacional en el ámbito educativo y la superación de las dificultades en el acceso a la información matemática.

El tercer y último objetivo consiste en alcanzar una mayor presencia de las matemáticas en el conjunto de la sociedad mediante la divulgación de ideas y aplicaciones que sean de interés para colectivos amplios.

1.2. La Organización de Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO), en su 29.ª Conferencia General (1997), ha decidido respaldar la celebración del Año Mundial de las Matemáticas 2000. Otras instituciones, tanto de carácter internacional como nacional, también han dado su apoyo.

Los preparativos para la celebración se han iniciado con la constitución de gran número de comités que están programando una amplia variedad de actividades con el fin de alcanzar los objetivos fijados en la Declaración de Río de Janeiro. Por ejemplo, la Comisión Internacional para la Educación Matemática, organismo dependiente de la Unión Matemática Internacional, ha designado un comité que preside el español Miguel de Guzmán.

En el año 2000 se celebrarán varios congresos internacionales como actividades propias del Año Mundial de las Matemáticas 2000. Entre otros, en Japón el 9.º Congreso Internacional de Educación Matemática, organizado por la Comisión Internacional para la Educación Matemática; y en México el 5.º Congreso Mundial de la Sociedad Bernoulli, que organiza la Sociedad Bernoulli de Estadística Matemática y Probabilidad.

1.3. En nuestro país se ha constituido el Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000, que preside José Luis Fernández. En este Comité se han integrado el

Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Real Sociedad Matemática Española, la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la Sociedad Catalana de Matemáticas, la Sociedad de Estadística e Investigación Operativa y la Sociedad Española de Matemática Aplicada.

La Sociedad Catalana de Matemáticas, bajo los auspicios de la Sociedad Matemática Europea, organiza en Barcelona el Tercer Congreso Europeo de Matemáticas. La Unión Matemática Internacional lo ha acogido como una de las actividades principales del Año Mundial de las Matemáticas. Se trata del evento de mayor relevancia de los que tendrán lugar en España y el Comité Español le concede un papel central, de forma que promoverá actividades que apoyen y se coordinen con ese Congreso. La celebración de este Congreso supone que la comunidad matemática internacional reconoce el nivel alcanzado por las matemáticas españolas.

Otras muchas actividades están previstas en nuestro país con motivo de esta celebración: exposiciones, edición de libros históricos, congresos, cursos de verano... También la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales tiene previsto un programa de conferencias impartidas por destacados matemáticos españoles.

2. Las matemáticas en la historia

2.1. En todas las sociedades se hallan indicios de contar y medir, las primeras de las actividades matemáticas. Hacia el año 2000 a.C., en Mesopotamia y Egipto se encuentran desarrolladas ciertas técnicas de cálculo que permiten la resolución de algunos problemas aritméticos y geométricos no triviales.

Sin embargo, fue en Grecia, en el ámbito de una cultura basada en la razón, donde se iniciaron propiamente las matemáticas, entendidas como una disciplina científica que exige la justificación racional de las afirmaciones. Suele señalarse a Tales de Mileto, hacia el 600 a.C., como la figura con la que comienzan esas matemáticas científicas, que continúan poco más tarde con Pitágoras.

De los libros griegos que han llegado hasta nosotros destacan los *Elementos* de Euclides de Alejandría, obra escrita hacia el 300 a.C. en la que se presenta una exposición lógico-deductiva de la aritmética y la geometría de entonces. Este libro ha sido utilizado durante siglos como texto escolar, y se afirma que es, después de la Biblia, el libro que ha tenido más ediciones.

Durante la Edad Media los árabes, en lugares como Toledo, desempeñaron el papel de transmisores, conservadores y perfeccionadores de la ciencia y la cultura griegas. Además, los matemáticos árabes pusieron en relación la India con Occidente y contribuyeron decisivamente al surgimiento del álgebra. La influencia de la matemática árabe en el pensamiento occidental es un ejemplo de colaboración entre los pueblos a través de la ciencia.

Las aportaciones de los matemáticos hindúes y árabes, así como la recuperación de las matemáticas griegas, dan lugar a un florecimiento en el siglo XVII que culmina con la creación del cálculo infinitesimal por parte de Isaac Newton y de Gottfried Wilhelm Leibniz, de forma independiente. Este nuevo y poderoso cálculo permite a Newton la formulación de la teoría de la gravitación y se convierte en herramienta capaz de producir avances notables en mecánica y otras ramas de la física.

A principios del siglo XIX los matemáticos comienzan a exigirse a sí mismos un mayor rigor en la fundamentación del cálculo infinitesimal y se inicia una etapa de las matemáticas en la que las alusiones a otras disciplinas y a la noción de magnitud van desapareciendo paulatinamente. Así, las matemáticas alcanzan la autonomía y autosuficiencia de la que ahora gozan. Ha sido precisamente esta situación lo que ha permitido un espectacular crecimiento durante el siglo XX, tanto en el desarrollo vigoroso de nuevas ramas, como en un sinfín de aplicaciones en todos los campos.

2.2. Como ocurre en casi todas las actividades humanas, las matemáticas constituyen una obra colectiva en la que han participado muchas personas, algunas de las cuales han impulsado su evolución con ideas excepcionales. Pese a la clara preponderancia masculina, aquí se encuentra un grupo de mujeres notables, como Sophie Germain, Sonya Kovalevsky, Emmy Noether y Julia Robertson.

Entre quienes han contribuido decisivamente al desarrollo de las matemáticas encontramos miembros de la alta burguesía, como Henri Poincaré, y también de origen humilde, como Srinivasa Ramanujan; jóvenes que dejaron una herencia imborrable, como Niels Henrik Abel que vivió veintisiete años; fervientes religiosos como Blaise Pascal, mientras que Godfrey Harold Hardy consideraba a Dios como su enemigo personal; monárquicos como Augustin-Louis Cauchy y revolucionarios como Evariste Galois; y familias enteras como los Bernoulli. También los colectivos tienen un lugar en la historia de las matemáticas: el más célebre autor de textos matemáticos del siglo XX es Nicolas Bourbaki, nombre bajo el que se agruparon algunos jóvenes matemáticos franceses.

2.3. Las aportaciones españolas a las matemáticas no han sido muy importantes. Sin embargo, España sí tuvo un papel destacado en la transmisión de la ciencia griega y árabe al occidente europeo como cruce de culturas que fue en la Edad Media. En el Renacimiento cabe mencionar a Pedro Sánchez Ciruelo y Juan de Ortega como autores de libros que conocieron numerosas ediciones en España, Francia e Italia.

En el último tercio del siglo XIX se realizan notables esfuerzos para conocer las matemáticas que se hacían fuera de nuestras fronteras por parte de Eduardo Torroja, Zoel García de Galdeano y el singular José Echegaray, que fue diputado y ministro, ingeniero y profesor, además de dramaturgo premiado con el Nobel de Literatura.

A principios de nuestro siglo destaca la figura de Julio Rey Pastor, impulsor de la Sociedad Matemática Española y fundador del Laboratorio y Seminario Matemático creado en 1915 por la Junta para la Ampliación de Estudios. Su labor en la actualización de las matemáticas que se estudiaban en nuestro país y su dedicación a orientar el trabajo de los matemáticos españoles tuvo sus frutos en una mejora notable de las matemáticas españolas.

La Guerra Civil produjo un nuevo retraso. Décadas más tarde se fue generando una cultura matemática que sintonizaba con la de los países más avanzados, y a ello contribuyeron grandemente los aires frescos traídos por algunos pocos que lograron formarse fuera de España, especialmente en Francia y Estados Unidos, durante la última etapa de la Dictadura.

Entre los matemáticos españoles destaca la figura de Lluís A. Santaló, quien ha desarrollado buena parte de su actividad en Argentina y cuya obra puede considerarse como la más influyente de las matemáticas españolas de todos los tiempos.

La situación de la investigación matemática en España es actualmente bien distinta de lo que históricamente ha sido. Hoy es habitual encontrar a matemáticos españoles como autores de artículos en las mejores revistas y de libros en las más prestigiosas editoriales, como miembros de los comités editoriales de las publicaciones más apreciadas y como conferenciantes invitados en los congresos internacionales. Sirve de ejemplo del nivel alcanzado que la primera Medalla para Jóvenes Investigadores concedida por la Sociedad Matemática Europea en 1992 recayó en el español Ricardo Pérez Marco.

3. Las matemáticas y la cultura

3.1. Buena parte de la investigación matemática tiene su origen en la resolución de los problemas que los propios matemáticos se plantean en el desarrollo de su ciencia, en las matemáticas puras. Utilizando una frase de Carl Gustav Jacob Jacobi, los matemáticos realizan sus investigaciones con «la finalidad única... de rendir honor al espíritu humano». Desde esa perspectiva, valoran sus propias teorías y teoremas atendiendo a la profundidad de las ideas que se utilizan, a la conexión entre las diferentes nociones y a la belleza de los resultados obtenidos.

Aunque por su propio carácter deductivo, las teorías matemáticas gozan de la certeza absoluta, sin embargo esas teorías no informan directamente sobre los fenómenos naturales, de modo que el estricto desarrollo de la teoría, sin ponerla en conexión con las ciencias de la naturaleza, no produce un mayor conocimiento sobre el mundo. Es decir, las matemáticas no son propiamente una de las ciencias de la naturaleza, pese a las muchas aplicaciones que tienen en éstas.

En ocasiones el proceso de investigación matemática se convierte en arte, puesto que los matemáticos crean de igual forma que lo hacen los artistas. Pero las matemáticas continúan siendo ciencia, en cuanto que sus afirmaciones están sometidas a las exigencias del razonamiento científico.

De este modo, las matemáticas se sitúan entre las humanidades y las ciencias de la naturaleza, convirtiéndose en puente entre las dos culturas de las que habla Charles Percy Snow.

3.2. Las matemáticas se relacionan con el arte desde la época de los griegos. Los pitagóricos descubrieron la presencia de razones aritméticas en la armonía musical. Los pintores renacentistas se plantearon el problema de la perspectiva en los paisajes, lo que más tarde dio lugar a una nueva geometría. La búsqueda de las proporciones más estéticas en pintura, escultura y arquitectura es otra constante que arranca en los griegos y llega hasta nuestros días, desde el canon de belleza de los maestros helénicos hasta Maurits Cornelis Escher o Le Corbusier, pasando por Alberto Durero, Leonardo da Vinci o Miguel Ángel. Otros exponentes de la fuerte influencia matemática en el arte son, en nuestro país, el arte mudéjar, especialmente en Aragón, y el arte nazarí, especialmente en la Alhambra de Granada.

3.3. Ciertas teorías científicas han contribuido de forma decisiva a modificar la concepción que el hombre tiene de sí mismo y de la naturaleza. La teoría heliocéntrica del universo, y su perfeccionamiento con las teorías de la gravitación y de la relatividad, llevó a que nuestro planeta dejara de ser considerado el centro del universo y pasara a convertirse en un astro modesto en el cosmos inmenso. De forma análoga, la teoría de la evolución de las especies de Charles Darwin ha hecho que los humanos nos veamos como una de las muchas especies que son resultado de la evolución.

También las matemáticas han ejercido una apreciable influencia en la historia del pensamiento.

A principios del siglo XIX nacen las geometrías no euclídeas como respuesta al problema de la independencia lógica del V Postulado de los *Elementos* de Euclides, el cual puede enunciarse diciendo que por un punto exterior a una recta sólo pasa una paralela. Estas geometrías, obra de Carl Friedrich Gauss, Nicolai Ivanovich Lobachevski y János Bolyai, presentan unos mundos posibles diferentes al euclídeo, sometidos a geometrías en las que por un punto exterior a una recta no hay paralelas o hay infinitas. Estas geometrías resultaron ser el soporte conceptual de la teoría de la relatividad de Albert Einstein.

En otro orden de ideas, en 1931 el lógico-matemático Kurt Gödel demostró la imposibilidad de que un sistema axiomático sea lo suficientemente completo para que a partir de él pudieran deducirse todas las verdades de la aritmética. Este resultado supuso un duro golpe al método axiomático-deductivo, aunque la lógica matemática demostró su potencia al probar sus propias limitaciones como instrumento para alcanzar la verdad.

3.4. Las matemáticas han tenido siempre una íntima conexión con la filosofía. Entre los matemáticos encontramos pensadores que constituyen hitos fundamentales en la historia de la filosofía, como es el caso de René Descartes, Blaise Pascal y Gottfried Wilhelm Leibniz. Los pitagóricos, para quienes los números son el principio de todas las cosas, consideraban las matemáticas como la ciencia, y los filósofos, desde Platón y Aristóteles, la han considerado siempre como uno de los objetos principales de su pensamiento. Emmanuel Kant fundamenta las matemáticas en el espacio y en el tiempo, que son formas a priori de la sensibilidad y aseguran no sólo la validez de las proposiciones matemáticas, sino también, y sobre todo, su aplicabilidad a la experiencia.

Gracias a las matemáticas la lógica renació con fuerza en la segunda mitad del siglo XIX, con figuras como George Boole, Augustus de Morgan y Gottlob Frege, lo que resultó decisivo para la fundamentación de las matemáticas en torno a 1900. Quizás sea Bertrand Russell la figura intelectual que con mayor claridad encarna la relación intrínseca de las matemáticas con la lógica y la filosofía; contribuyó de forma decisiva a la mencionada fundamentación y buena parte de su obra filosófica está dedicada a las matemáticas.

Plantearse los fundamentos de las matemáticas es preguntarse en qué medida la rica estructura que ha surgido de siglos de investigaciones puede reducirse a unos mínimos absolutos. Las reflexiones filosóficas sobre las matemáticas se han llevado a cabo dentro de la lógica, de la teoría del conocimiento y de la metafísica, hasta que se ha constituido una disciplina específica, la filosofía de las matemáticas. La tarea de esta rama de la filosofía es de la mayor importancia para una filosofía más general de la razón, pues las matemáticas son el ejemplo más perfecto de actividad racional del hombre.

Otra de las razones que han hecho que los filósofos presten atención a las matemáticas es el tema del infinito. Aunque haya sido de formas diferentes, la idea de infinito está presente en las matemáticas de mayor calado desde la época de los griegos. El matemático y teólogo Bernhard Bolzano, a principios del siglo XIX, inicia la visión moderna del infinito, pero es necesario esperar a las últimas décadas del siglo para poder encontrar una teoría satisfactoria, que en sus aspectos más geniales se debe a Georg Cantor y que recibe las notables aportaciones de Richard Dedekind.

4. Las matemáticas y sus aplicaciones

4.1. La influencia e importancia de las matemáticas en la sociedad han ido en constante crecimiento, en buena parte debido al espectacular aumento de sus aplicaciones. En este final del siglo XX las matemáticas extienden su utilidad y presencia a casi todas las actividades humanas. Puede decirse que todo se «matematiza». No es concebible la innovación tecnológica, en el sentido actual de Investigación y Desarrollo (I+D), sin la presencia preeminente de las matemáticas y sus métodos.

4.2. Las más antiguas aplicaciones de las matemáticas están en las ciencias de la naturaleza, especialmente en la física. Sin embargo, gracias a los ordenadores, a las técnicas de análisis numérico y al uso de la estadística, hoy es posible el diseño y aplicación de modelos matemáticos para abordar problemas complejos, como los que se presentan en la biología y en las ciencias sociales (sociología, economía...), a las que dota de métodos cuantitativos indiscutibles.

Las matemáticas resultan hoy indispensables en todas las ingenierías y en las tecnologías más avanzadas, como las necesarias para los vuelos espaciales. También están presentes en las más modernas técnicas de diagnóstico médico, como en la tomografía axial computerizada, en la meteorología, en los estudios financieros, en la ingeniería genética y, en fin, en cualquier rama del conocimiento humano que desee alcanzar un alto grado de precisión en sus predicciones...

4.3. La sociedad de la información en la que hoy vivimos es resultado de la simbiosis entre las telecomunicaciones y la informática. Tiene como base las ideas de George Boole, que a mediados del siglo XIX funda la lógica matemática, y en el modelo matemático de los ordenadores de Alan Turing, así como en las aportaciones de John von Neumann y Norbert Wiener, quienes se vuelcan en las aplicaciones tras haber sido dos eminentes matemáticos puros en el primer tercio de este siglo. La enorme cantidad y variedad de la información que hoy debemos manejar plantea nuevos problemas como la transmisión de dicha información, su protección, su comprensión, su codificación, su clasificación, etc. Y estos nuevos problemas sólo pueden tener un tratamiento efectivo a través de los complejos algoritmos matemáticos que se han desarrollado bajo la exigencia de las nuevas necesidades planteadas.

5. Las matemáticas en la sociedad

5.1. La importancia de las matemáticas en la sociedad se aprecia en su papel fundamental en el desarrollo científico y tecnológico, en su relación con la filosofía y la historia de las ideas, en el lugar preponderante que ocupa en los planes de estudio de la educación primaria y secundaria, y en otras muchas facetas.

Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de los ciudadanos es constante. La información que diariamente recibe tiene cada vez mayor volumen de datos cuantificados, como los índices de precios, tasa de paro, porcentajes... La prevista incorporación del euro tiene implicaciones matemáticas para todos los ciudadanos, que se verán obligados al uso de decimales y al redondeo.

Esa importancia contrasta con el escaso conocimiento de las matemáticas, no sólo sobre sus contenidos, sino también sobre su evolución, sus aplicaciones y su influencia. La mayor parte de las personas limitan su relación con las matemáticas, en el mejor de los casos, al uso de las «cuatro reglas» y casi siempre, influidos por sus recuerdos escolares, alejan de sí cualquier otra posibilidad.

Resulta adecuado hacer llegar ciertos aspectos de las matemáticas al público en general, como parte que las matemáticas son de la creación cultural, de igual forma que se hace con otras manifestaciones de esa creación cultural, ya sean artísticas o científicas.

5.2. Aunque limitado, hay un público que sí demuestra interés por las matemáticas. En el siglo pasado encontramos las obras de Lewis Carroll, de contenido matemático y dirigidas a un público amplio, obras que han tenido multitud de ediciones en numerosas lenguas.

En nuestro siglo, Martin Gardner ha realizado una formidable labor de divulgación, proponiendo multitud de problemas que han hecho las delicias de los aficionados a las matemáticas. Recientemente el poeta y ensayista Hans Magnus Enzensberger ha publicado *El Diablo de los números,* que ha sido un éxito editorial en varios países.

5.3. Para conseguir una mayor presencia de las matemáticas en la sociedad parece imprescindible el esfuerzo de los propios matemáticos por dar a conocer los diferentes aspectos de su ciencia. A ello habría que añadir que por parte de los medios de comunicación debe prestarse más atención a las informaciones de contenido matemático.

Otras disciplinas científicas ocupan la atención del público a través de la concesión de los Premios Nobel. Sin embargo, no hay un Premio Nobel de Matemáticas. Para llenar ese hueco, desde 1936 el Congreso Internacional de Matemáticas concede cada cuatro años las Medallas Fields a quienes hayan contribuido de forma significativa al desarrollo de las matemáticas.

Los medios de comunicación han reflejado adecuadamente que Andrew Wiles ha dado solución a un problema matemático que había estado abierto durante trescientos cincuenta años, el conocido como «último teorema de Fermat». Su sencillo enunciado ha fascinado a los matemáticos posteriores a Pierre de Fermat y muchos han empeñado grandes esfuerzos en resolverlo. Estos tres siglos y medio de búsqueda han sido fértiles en extremo, ya que en la búsqueda de la solución han sido creadas nuevas teorías y se han descubierto propiedades aritméticas insospechadas.

Con cierta frecuencia puede leerse en la prensa que algún aficionado a las matemáticas afirma haber «resuelto» algunos de los tres problemas clásicos de construcción con regla y compás heredados de los griegos (la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo). No es tan frecuente que la reseña se acompañe con la información de que la imposibilidad de tales construcciones ha quedado establecida rigurosamente desde hace más de un siglo.

Otro ámbito adecuado para la divulgación son los museos y exposiciones. La exposición Horizontes Matemáticos recorrió España entera durante tres años y resultó ser un éxito por la masiva asistencia de público, no únicamente escolar.

5.4. La divulgación también interesa a los profesores de educación primaria y secundaria, la mayoría de los cuales desean perfeccionar, ampliar y actualizar sus conocimientos matemáticos, así como el de sus aplicaciones.

También los matemáticos que se dedican a la docencia universitaria y a la investigación desean acceder de forma sucinta a las principales ideas y resultados de campos diferentes a aquellos en los que trabajan. Las matemáticas llegan al año 2000 con una extensión tal que es imposible que una persona pueda estar familiarizada con todas sus ramas.

6. La enseñanza de las matemáticas

6.1. En los países más avanzados, en los que la escolarización total está prácticamente conseguida, la relación de la mayoría de las personas con las matemáticas, más allá de los informales inicios familiares, se ha establecido en el ámbito educativo.

Millones de alumnos y miles de profesores, en todos los niveles educativos, tienen relación diaria con las matemáticas, que es asignatura en la educación primaria y secundaria, en los estudios profesionales, y en buena parte de las carreras universitarias.

Las matemáticas siempre han tenido un destacado lugar como disciplina escolar, debido a su papel de herramienta universal y a su potencia en la formación intelectual de los alumnos. Como señalan Julio Rey Pastor y Pedro Puig Adam, «la enseñanza matemática en la escuela primaria tiene carácter predominantemente instrumental y se propone ante todo adiestrar a los niños en el cálculo numérico, proveyéndolos de ciertos conocimientos necesarios o útiles para la vida, como son, por ejemplo, el sistema métrico, el cálculo de áreas y volúmenes de cuerpos usuales, las reglas de cálculo comercial, etc.»; para la enseñanza secundaria indican que su fin es «predominantemente educativo»; en la enseñanza superior se «persigue ya un fin profesional... en el sentido más lato del adjetivo».

6.2. La función de las matemáticas como instrumento de la formación intelectual de los alumnos se apoya en algunas de sus características más notables: razonamiento lógico, precisión, rigor, abstracción, formalización y belleza. Se espera conseguir que esas cualidades de las matemáticas acaben contribuyendo a que el alumno alcance esas capacidades y otras tales como la actitud crítica, la capacidad de discernir lo esencial de lo accesorio, el aprecio por la obra intelectual bella y la valoración de la potencia de la ciencia.

Todas las materias escolares, y no sólo las matemáticas, deben contribuir al cultivo y desarrollo de la inteligencia, los sentimientos y la personalidad. Pero las matemáticas se sitúan en un lugar destacado en lo que se refiere a la formación de la inteligencia de niños y jóvenes. Hace ya más de dos mil trescientos años, Aristóteles, en su *Ética a Nicómaco,* observaba que «los jóvenes pueden hacerse geómetras, matemáticos y hasta muy hábiles en este género de ciencias..., mientras que no pueden ser sabios ni estar versados en el conocimiento de las leyes de la naturaleza. ¿No podría decirse que esto nace de que las matemáticas son una ciencia abstracta, mientras que las ciencias de la sabiduría y la naturaleza toman sus principios de la observación y la experiencia? ¿No podría añadirse... que en las matemáticas la realidad no se les presenta con oscuridad alguna?».

6.3. No debe entenderse ese papel central de las matemáticas en la formación de los valores de la razón como un argumento en menoscabo de las demás disciplinas escolares, ni de las denominadas científicas ni de las llamadas humanidades. A fin de cuentas, si se acepta esa clasificación, hay que considerar las matemáticas como un puente entre ambas.

En el reciente *Dictamen sobre la enseñanza de las humanidades en la educación secundaria* puede leerse que no es «deseable concebir como separados o incomunicados esos dos mundos que Snow denominó las "dos culturas": de un lado, la sustentada por los... intelectuales literarios (humanistas) y, de otro, la de los científicos». Al logro de ese deseo las matemáticas pueden contribuir de forma decisiva.

Parece oportuno citar a Fernando Savater: «Pero ¿qué son las humanidades? Supongo que nadie sostiene en serio que estudiar matemáticas o física son tareas menos humanistas, no digamos menos "humanas", que dedicarse al griego o a la filosofía».

6.4. Pese a ese papel singular que las matemáticas tienen en el sistema educativo, o quizás debido precisamente a eso, su enseñanza no ha alcanzado niveles de satisfacción para las administraciones educativas, ni para los padres, ni para los profesores.

Hay que admitir que las matemáticas no han supuesto para la mayoría de los alumnos una fuente de placer intelectual. Son muy diferentes las experiencias que cada persona ha tenido con las matemáticas y muy distintos los recuerdos que se puedan guardar, pero muchos podrían suscribir la frase de Bertrand Russell: «la aritmética es el coco de la niñez; recuerdo que lloraba amargamente por no poder aprender la tabla de multiplicar».

El Informe *Diagnóstico General del Sistema Educativo. La escuela secundaria obligatoria,* elaborado por el Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, refiriéndose a los resultados en matemáticas de los alumnos de catorce años, afirma que «el 71,80% de los alumnos no alcanza... un nivel satisfactorio de rendimiento en la resolución de problemas que impliquen relaciones de proporcionalidad o porcentajes, la geometría del triángulo, o la resolución de ecuaciones lineales simples, entre otras cosas».

6.5. Pedro Puig Adam es el mejor representante, en el segundo tercio de este siglo en nuestro país, de los afanes del profesorado por producir una sustancial mejora en la educación matemática. Un intenso movimiento de renovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se inició durante la década de 1970 con la formación de diversos grupos y asociaciones de profesores, que se consolidó en la década siguiente con la creación de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, la aparición de diversas publicaciones periódicas y la organización de gran número de jornadas, seminarios y congresos. Este movimiento continúa hoy vivo y amplios colectivos de profesores siguen buscando respuestas y alternativas con el fin de mejorar la situación, claramente insatisfactoria, de la enseñanza de las matemáticas.

A ello hay que añadir la incipiente investigación en didáctica de las matemáticas en las universidades españolas, así como la reciente constitución de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

6.6. La enseñanza de las matemáticas tiene muchos retos planteados, algunos de los cuales comparte con otras disciplinas.

Es necesario situar las matemáticas en el contexto social, científico, cultural y político en los cuales se produjeron. Es decir, las matemáticas deben presentarse como una más de las creaciones humanas, que no están nunca al margen de la sociedad, sino que influyen en ella y están influidas por ella.

Situados, por fortuna, en una educación para todos, resulta necesario, posiblemente siempre lo ha sido, que las matemáticas se presenten a los alumnos cargadas de significados para ellos, superando definitivamente la época en la que la actividad del aula se centraba, casi exclusivamente, en el uso sistemático de algoritmos. La enseñanza de las matemáticas debe, de igual forma que lo hacen las propias matemáticas, nutrirse de la realidad, en este caso de la más cercana y familiar para los alumnos.

Por otro, es indispensable mejorar la formación del profesorado, tanto en lo que se refiere a los contenidos propiamente matemáticos, como al conocimiento de los hallazgos de la investigación en didáctica de las matemáticas.

Puede resumirse el reto que las matemáticas tienen en el sistema educativo diciendo que se trata de que contribuyan efectivamente a lo que la Constitución establece en su artículo 27: «La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana en el respeto a los principios democráticos de convivencia y a los derechos y libertades fundamentales».

Composición de la Comisión Mixta de Investigación Científica y Desarrollo Tecnológico

9 de febrero de 1999

Mesa:

Presidenta:

García-Alcañiz Calvo, Elena	GP	Diputada

Vicepresidente 1.º:

Bayona Aznar, Bernardo	GP	Diputado

Vicepresidente 2.º:

Sedó i Marsal, Salvador	GC-CiU	Diputado

Secretario 1.º:

Heredia Díaz, Miguel Ángel	GS	Diputado

Secretario 2.º:

Bueno Fernández, Ricardo	GP	Senador

Portavoces:

Fernández-Capel Baños, Blanca	GP	Diputada
Rodríguez Espinosa, Eduardo *(Adjunto)*	GP	Diputado
Heras Pablo, Carmen	GS	Diputada
Palma i Muñoz, Montserrat *(Adjunta)*	GS	Diputada
Gil i Miró, Carme Laura	GC-CiU	Diputada
Santiso del Valle, Mariano César	GIU	Diputado
Albistur Marín, Javier	GV-PNV	Senador
Gómez Rodríguez, Jesús	GCC	Diputado

Vocales:

Aramburu del Río, María Jesús	GIU	Diputada
Armario Vázquez, Juan Manuel	GP	Senador
Artieda García, Marcelino	GS	Senador
Barahona Hortelano, José María	GP	Senador
Barreda Pérez, Francisco de la	GP	Diputado
Beguer i Oliveres, Vicenç	GC-CiU	Senador
Bellido Muñoz, Enrique	GP	Senador
Borreiros Fernández, Bonifacio	GS	Diputado
Cantarero Verger, Pedro	GP	Diputado
Contín Pellicer, Sebastián	GP	Senador
Fernández Chacón, José	GS	Senador
García Carnero, Dionisio	GP	Senador
Goya Burgués, Manuel	GS	Senador
Lissavetzky Díez, Jaime,	GS	Senador
Martínez García, Reyes	GP	Senadora
Martinón Cejas, Antonio	GS	Diputado
Mesa Ciriza, Fidel	GS	Senador
Meyer Pleite, Willy Enrique	GIU	Diputado
Moratalla Molina, José Enrique	GS	Diputado
Ollero Tassara, Andrés	GP	Diputado
Ortiz González, Luis	GP	Diputado
Pulgar Fraile, Pilar	GP	Diputada
Riera Madurell, M.ª Teresa	GS	Diputada
Rodríguez Cantero, Pedro	GS	Senador
Vidal-Quadras i Roca, Alejo	GP	Senador
Villalón Rico, César	GP	Diputado
Virgili i Rodón, Carmen	GS	Senadora
Zambrano Vázquez, Francisco	GP	Diputado

GP: Grupo Popular. GS: Grupo Socialista. GIU: Grupo Federal de Izquierda Unida. GC-CiU: Grupo Catalán (Convergéncia i Unió). GV-PNV: Grupo Vasco-PNV. GCC: Grupo de Coalición Canaria.

Parlamento y Matemáticas

Federico Trillo-Figueroa Martínez-Conde
Presidente del Congreso de los Diputados

Cuando, hace casi cuatro años, fui elegido Presidente del Congreso de los Diputados, me propuse como objetivo básico de mi mandato abrir el Parlamento a la sociedad. En efecto, los españoles –y, en general, los europeos– se distancian cada vez más de la política y de las instituciones públicas. Este fenómeno tiene causas muy profundas, que ahora no es el lugar ni el momento para analizarlas. Sin embargo, dentro de las limitadas posibilidades que la presidencia de la Cámara proporciona, me propuse aumentar los vínculos entre los ciudadanos y su institución representativa.

La *Jornada* de hoy se inscribe en este esfuerzo de apertura a la sociedad, y más en particular a una parte de la sociedad cuyas voces habitualmente no suenan en las salas y en los pasillos de este edificio. Por este motivo, cuando los Diputados Antonio Martinón y Teresa Riera se dirigieron a mí en solicitud de apoyo para la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas,* mi respuesta fue inmediatamente positiva. Con actos como el de hoy, siquiera desde un punto de vista simbólico, se abre el Congreso a personas y a ramas del saber aparentemente alejadas de la legislación.

Los parlamentarios sólo ejercitamos, normalmente, conocimientos matemáticos elementales. Por lo general se resumen en contar (votos y escaños), en hallar porcentajes y en sumar apoyos. Ahora bien, esta peculiar aritmética resulta esencial en un sistema democrático, en el que el criterio decisorio es de las mayorías. Con toda rotundidad, cuando en un régimen político no hace falta contar, algo no funciona bien, alguien desempeña un poder excesivo.

Por desgracia, todos tenemos experiencia de personas cuya operación aritmética favorita no es la adición, sino la resta o la división. En todas las profesiones y ámbitos sociales existen sujetos especializados en la discordia, en la cizaña y en la desunión. Tales sujetos son particularmente negativos en la vida pública, en la que por imperativo del pluralismo –también interno– resulta imprescindible construir consensos en cuestiones fundamentales para la sociedad. En este momento preelectoral, en el que las tensiones se agudizan, me gustaría hacer una llamada al consenso, a la suma de voluntades, tan necesaria ante los retos del presente. El fomento de la Matemática, y de la Ciencia en general, integra uno de los campos en los que me parece importante el acuerdo de todos los Grupos parlamentarios. La España del siglo que comienza será la que resulte de la enseñanza y de la investigación científica pública y privada.

Inauguramos esta *Jornada* en el inicio del año dedicado a las Matemáticas. El Congreso de los Diputados se une así a las celebraciones de un modo paradójico, pues a un tiempo comienza el año 2000 con este su primer acto público y termina de esta manera, un tanto *sui generis*, la VI Legislatura, recién disueltas las Cámaras. Principio y fin, por tanto, unidos en este acto.

Los versados en la ciencia matemática siempre destacan que no se trata de una ciencia exacta, por más que así se haya llamado durante décadas, sino de una ciencia paradójica, que vive y se nutre de las limitaciones de la inteligencia humana. En este sentido, me parece que esta curiosa forma de empezar y terminar a un tiempo representa un modo muy *matemático* de celebrar el año 2000.

Las Matemáticas en la Academia de Ciencias

Ángel Martín Municio
Presidente de la Real Academia de Ciencias

Da igual que las primeras señales fueran los elementales algoritmos de las tablillas de arcilla en el período paleobabilónico, o los cálculos de volúmenes en los papiros egipcios del segundo milenio antes de nuestra era, o el sistema sexagesimal mesopotámico; y da igual porque la Matemática nació cuando, cientos de miles de años antes, las conexiones sinápticas del cerebro en evolución permitieron al hombre *contar* en coincidencia con el origen de su propia naturaleza y, luego, en su interacción con el *pensamiento* y la colaboración del *lenguaje*, comenzar el razonamiento abstracto. Y no deja de ser impresionante que hoy, al cabo de tantos años, la moderna imagen funcional del cerebro, que, a no dudarlo, ha nacido al lado de la matemática moderna, sea capaz de mostrarnos una localización cerebral del *ejercicio matemático* diferente de la localización responsable del lenguaje. Si esta habilidad matemática es, pues, al lado del lenguaje, una competencia intrínseca del hombre, no tendrá nada de extraño que la marcha de ambos haya caminado en paralelo.

Efectivamente, la matemática griega nació en perfecta unidad con la filosofía; y de su identificación surgió el método axiomático-deductivo, aún en vigor para la correcta demostración de las verdades establecidas por los teoremas. Y, así, Pitágoras en el siglo VI antes de Cristo, a la vez que impuso la disciplina de la demostración, viajó sus teorías por Babilonia y Egipto, y, en Crotona enseñó en el Senado, a las mujeres, a los jóvenes y a los niños en una labor de formación intelectual y moral de la sociedad de la época. Insistía Pitágoras en estas instrucciones acerca de la necesidad de acomodar el comportamiento humano a los cánones de la armonía y la exactitud mostrados por la precisión de los descubrimientos del universo y de la naturaleza misma de las cosas. Pitágoras y sus seguidores trataron de descubrir las propiedades inmutables de los objetos matemáticos, prescindiendo de sus inmediatas cualidades utilitarias tan propias de la ciencia oriental. Y, sin duda, fue éste el motivo por el que la nueva matemática griega se sintió objeto de estudio singular por la filosofía, en busca siempre de lo permanente y eterno.

De entonces acá, las obras de Arquímedes, Euclides y Apolonio de Perga, y su sistematización, tuvieron vigencia hasta el Renacimiento. La fama de Arquímedes, precursor en la Antigüedad de los métodos infinitesimales, se ha debido tanto a su obra como a su vida, embellecida y deformada por las anécdotas de la imaginación popular, cuyo símbolo fue su muerte, atravesado por la espada de un soldado romano mientras, negándose a dejar inconclusas sus investigaciones, contemplaba absorto sus figuras geométricas. Y los *Elementos* de Euclides, en sus trece libros, y con la Biblia las dos obras que más ediciones han conocido y entre las de mayor influencia cultural en la historia de la civilización, recopilan ordenadamente definiciones, postulados, axiomas y proposiciones, de tal forma que Rey Pastor pudo afirmar de ellos: «Si pretendieras agregar o quitar algo reconocerías de inmediato que te alejas de la ciencia y te acercas hacia el error y la ignorancia».

Tras todo ello, se había atravesado la larga Edad Media, y los diez siglos árabes y latinos ocuparon un lugar esencial en los orígenes de la ciencia europea. No en vano, las ciencias del cálculo –Aritmética, Álgebra y Trigonometría–, las ciencias de lo concreto y de lo práctico, deben quizá más a la ciencia oriental que a la griega; y en esas rutas hacia Europa de la matemática greco-oriental –de las que España fue, sin duda, la principal vía de paso–, el papel del mundo árabe significó algo más que el de un simple intermediario, y aparece representado principalmente por el álgebra de Al-Khwarizmi.

No se habían abierto aún las matemáticas al científico, al ingeniero y al economista. Y en el siglo que va desde mediados del XV a mediados del XVI, las universidades alemanas, italianas y polacas tomaron el relevo matemático del ocaso escolástico de las escuelas de Oxford y París. El álgebra alemana, con Nicolás de Cusa, Peurbach y Regiomontano, disputó a Italia la supremacía que alcanzara con Beldomandi, Pacioli y Leonardo. En 1545 se publicó el *Ars magna* de Jerónimo Cardano, en cuya obra se daba la solución de las ecuaciones cúbica y cuártica, puede que precedida de las informaciones de Tartaglia y de Ferrari. Ciertamente, el éxito de los matemáticos italianos consistió en comprobar que se podía desarrollar una auténtica teoría matemática capaz de superar los logros de los antiguos y de los árabes. Y, como escribió el académico Enrique Linés, «en este período, todavía vivo el espíritu de la matemática griega, ya se percibe la inquietud y sorpresa ante el advenimiento de la nueva era». A propósito de la preparación de nuestros matemáticos de la época, Rey Pastor aseguró que, en manera alguna, se adecuaron al desarrollo de la nueva dirección aritmético-algebraica, y que, antes al contrario, el tipo general de sus libros era aún el de las antiguas aritméticas especulativas al estilo de la de Boecio. A pesar de lo cual, Rey Pastor afirmó que «tampoco sería justo condenar a aquella pléyade que laboraron fuera de su patria, honrándola grandemente, para luego traer a sus Universidades los frutos sazonados de su ciencia. Sus obras nacieron sin embargo con un pecado original, el de no ser modernas [...] Aquel grupo de jóvenes que profesaron en las Universidades de París, fue el encargado de traer a España la semilla del renacimiento matemático; pero en vez de semilla trajeron una planta ya vieja, incapaz de producir nuevos frutos [...] era una planta sin raíces, que no podía prender; y al no poder prender se marchitó en seguida».

Era, por otro lado, la época de los viajes de Magallanes y El Cano, de la estancia de Pizarro en Perú y de Cortés en Méjico, y de la apertura de la ruta de las Indias por Vasco de Gama. Lo que forzosamente había de repercutir en el interés singular por las aplicaciones náuticas y cartográficas de la ciencia física y matemática. Y a la vez, indudable, por otro lado, que el ambiente de la Corte favorecía el fomento de las aplicaciones pragmáticas de las Matemáticas: la Cosmografía, la Cartografía, las mediciones geodésicas, la astrología, el arte de navegar, las técnicas de la construcción, la Arquitectura, la Artillería, la Ingeniería militar y el Cálculo mercantil.

A la sagacidad de Felipe II no pudieron hurtársele ni la decadencia de nuestra matemática, ni que la causa de los errores de nuestras cartas náuticas fuera la falta de conocimientos científicos. Por ello, mandó fundar en 1552 la Cátedra de Cosmografía y Arte de Navegar, en la Casa de la Contratación de Sevilla, para la enseñanza de los pilotos. Fue una medida de orden científico y práctico, tomada como reacción a los nuevos descubrimientos para asegurar su continuidad y como garantía del éxito de los exploradores. Y, sobre todo, la medida científica y práctica de mayor envergadura data de 1584, fecha de la publicación de un texto legal en cuya portada se lee: «INSTITUCIÓN DE LA ACADEMIA REAL MATEMÁTICA, en Castellano, que la Magestad del Rey Don Phelippe II N.S. mandó fundar en su Corte». Fecha que coincide con la de la publicación por Pedro de Guevara del compendio del *Arte magna* y el *Arbor scientiae* de Raimundo Lulio, en cuya dedicatoria al rey Felipe II se puede leer: «... mayormente aviendo V.M. en sus felicissimos dias hecho una merced tan señalada en establecer en esta su Corte una Academia donde se leen todas las Mathematicas y Philosophia, poniendo para ello maestros tan eminentes y de tanta erudición y experiencia. Púselo en nuestra lengua Castellana por ser la voluntad de V. Magestad que en V. Academia se lean todas las sciencias en esta lengua, para que tanto bien sea a todos más facilmente aprehendido y comunicado».

Los propósitos del Rey y de la Corte, nacidos al calor de la vinculación del saber matemático a la resolución de problemas prácticos, se tradujeron, efectivamente, en la firma por Felipe II, en Lisboa, el 25 de diciembre de 1582, de las cédulas fundacionales de la *Academia Real Matemática*, por iniciativa del arquitecto real y su primer director Juan de Herrera. En esta iniciativa hubieron de pesar varios motivos: de un lado, el *ambiente* creado por la convivencia en la Corte de ingenieros civiles y militares, arquitectos, artilleros y cosmógrafos; de otro, la *necesidad* de buscar aplicaciones prácticas a las enseñanzas matemáticas que, a modo de utilidad científica y de reconocimiento social, se hicieran patentes, por ejemplo, en las mediciones geodésicas, la Cartografía, el arte de navegar y los problemas militares y de las técnicas de la construcción; y, además, a no dudarlo, el *ambiente luliano* como movimiento renovador intelectual. La institución de la Academia tuvo una doble finalidad: de un lado, la de coordinar y relacionar a técnicos y científicos, con la clara orientación práctica de todas las disciplinas cursadas; y, de otro, un preciso propósito divulgador muy digno de tener en cuenta. Claramente expresado en la dedicatoria de Herrera, que aparece en el texto legal antes apuntado, cuando precisa que la Academia pretende «sepan los que quisieren aprovecharse el fin que en ello se tiene y lo que para conseguirle se ha de hazer».

Me parece que este recuerdo, en este lugar y en esta conmemoración, aunque tenga un deje reivindicador de la aristocracia ancestral de nuestra actual Academia, debiera también, al cabo de más de cuatro siglos, de servirnos un tanto de modelo para nuestras instituciones presentes. Porque nuestra *Academia Real Matemática* nació casi un cuarto de siglo antes que la famosa romana *Academia dei Lincei*; y ya entonces, como acabamos de ver, teniendo como objetivos el fomento del esfuerzo científico cooperativo y la diseminación del conocimiento científico; objetivos tan en vigencia en nuestros mismísimos días. Es posible que la Academia Matemática naciera antes de lo que nuestra sociedad y nuestra ciencia permitían; pero, más seguro es que sus objetivos fundacionales, la contratación de profesores, la diversidad de estudios, etc., fueran superiores en exceso a lo que posibilitaban nuestros medios y a la obligada organización y estabilidad políticas. El caso fue que, entre altibajos y cambios de título, durante el siglo XVII, comenta Rey Pastor que «la decadencia de la Matemática, no contenida como había derecho a esperar, por la famosa Academia, siguió su marcha natural y progresiva». Época de la que Echegaray concluyó: «Gran siglo, sí para Europa; mas ¿qué ha sido para nuestra España? ¿Qué descubrimiento... qué verdad... quiénes los rivales de Fermat, de Pascal, de Newton, de Leibniz...? Yo los busco con ansia en los anales de la ciencia, y no los encuentro...».

Durante nuestro siglo XVII, el matemático Hugo de Omerique fue para Echegaray el único nombre digno de recordar, y su obra, en 1689, de análisis geométrico, mereció las alabanzas de Newton. En el XVIII, una mención especial se debe a la creación de la *Real Compañía de Caballeros de Guardias Marinas*; y, curiosamente, dos de sus alumnos don Jorge Juan y Santacilia y don Antonio de Ulloa; el primero con 21 años y el segundo con 19, participaron, en 1737, en la expedición hispano-francesa de La Condamine para medir el meridiano terrestre en el Ecuador. Y si grandes fueron sus méritos personales, no pudieron, lógicamente, por sí solos contrarrestar la escasísima aportación española; lo que justificó aquella cita del P. Feijoo: «son en España tan forasteras las matemáticas que aún entre los eruditos hay pocos que entiendan las voces facultativas más comunes». Jorge Juan, incluso, vio frustrado su proyecto de una Sociedad, inspirada en la Academia de Ciencias de París, que tenía como objetivos principales las ciencias matemáticas y físicas experimentales.

Increíblemente, se perdió por igual la instrucción ordenada por Carlos III, a través del Ministro Floridablanca, en la que se decía: «Las enseñanzas públicas y las Academias tienen por objeto el complemento de la educación, que es la instrucción sólida de mis súbditos en todos los conocimientos humanos. En esta parte, lo que hace más falta es el estudio de las Ciencias Exactas, como las Matemáticas, la Astronomía, la Física Experimental, Química, Historia Natural, la Mineralogía, la Hidráulica, la Maquinaria y otras ciencias prácticas. Con el fin de promover entre mis vasallos el estudio, aplicación y perfeccionamiento de estos conocimientos, he resuelto fundar una Academia de Ciencias, y encargo muy particularmente a la Junta del Estado coopere a estas ideas y las recuerde con frecuencia y oportunidad». Tan increíble que el presidente de la moderna Academia de Ciencias, en 1897, don Cipriano Segundo Montesino y Estrada, Duque de la Victoria, con ocasión del ingreso académico del Ingeniero de Caminos don Práxedes Mateo Sagasta se preguntaba: «¿Qué dificultades de tanta monta se opondrían a que lo resuelto por un Rey tan firme en sus propósitos como Carlos III quedase sin efecto?».

Una nueva redefinición de la Institución académica matemática del siglo XVI no se alcanzó, todo lo modesta y provisionalmente que se quiera, hasta 1834, en que se fundó la

Real Academia de Ciencias Naturales, solicitada por nueve personalidades del ámbito científico porque «ninguna de cuantas Sociedades Científicas existen hasta ahora en el Reyno, está fundada en los sabios principios que sirven de norma a las Academias extranjeras y tan necesarias son para el logro de los fines que se proponen». La que dejó paso en 1847 a la vigente *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* creada por Real Decreto de 25 de febrero, en cuya exposición de motivos se dice: «uno de los ramos del saber humano que el Ministerio debe promover con preferencia es el de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales que tan poderosamente influyen en la industria y prosperidad de las naciones [...] porque no bastan los esfuerzos aislados de los sabios [...] sino que es necesario que éstos se reúnan para conferenciar entre sí, comunicarse sus observaciones, auxiliarse mutuamente y establecer extensas correspondencias con los sabios y las Corporaciones más eminentes del orbe...».

Y nos plantamos ya, sin más, en el último cuarto del siglo XIX, sin que hubiera dado señales de vida algún principio de cultura matemática convergente con la europea, y en el que nuestra elite matemática es la que, en el mejor de los casos, está al tanto de lo que ocurre en Europa, posiblemente lo incorpora a la docencia universitaria, pero nunca manifiesta una actividad científica creadora. También deberá subrayarse que de los 36 Académicos numerarios que constituyeron en su iniciación la nueva Real Academia, tan sólo hubo un profesor universitario de Matemáticas, don Francisco Travesedo, catedrático de Cálculo Infinitesimal. Lo que no quita para que, entre sus miembros correspondientes extranjeros, figurara una colección de insignes matemáticos y científicos, como Gauss, Jacobi, Faraday, Oersted, Liebig, Humbold, Dumas, Arago, etc. Pronto, sin embargo, sobre el homogéneo e irrelevante fondo matemático sobresalió la figura de don José Echegaray, miembro de la Academia en 1866 y su presidente durante 1901-1916, profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos; autor de diversos textos, entre otros sobre Física Matemática, Geometría Superior y Cálculo de Variaciones; contribuyó extraordinariamente, con numerosas publicaciones y conferencias, a la elevación del nivel cultural matemático; uno de sus fundadores, en la sede del Banco de España de Madrid existe un busto en bronce con el siguiente texto: «Al ilustre varón José de Echegaray. Enseñó las leyes naturales de la ciencia hidráulica. Henchido de poesía, pintó las pasiones de la vida. Gobernante honesto, libró a la patria de la usura extranjera. Logró, para decoro de España, el Premio Nobel». A su lado, Zoel García de Galdeano, catedrático de la

Universidad de Zaragoza, fundó en 1891 *El Progreso Matemático,* primera revista española de Matemáticas; y Eduardo Torroja y Caballé, miembro de la Academia en 1893, publicó, acaba ahora de hacer un siglo, un tratado de *Geometría de la Posición.* Época de entresiglos en la que no puede dejarse de mencionar y exaltar la figura de Torres Quevedo, miembro de la Academia en 1901 y su presidente durante 1928-1934. Aún con la ausencia completa de las exigencias de la ciencia organizada, en los tiempos en que se comenzaba a configurar el tránsito de una era totalmente preindustrial a otra semiindustrial, Torres Quevedo supo enfrentarse con las estructuras productivas y sus repercusiones económicas a partir de la creación fundamental. Nada mejor en este breve recuerdo que releer el comentario de Puig Adam: «... la consecución de tantos y tales resultados no fue fruto de unas cuantas improvisaciones felices, sino de un larguísimo y metódico proceso lógico constructivo, tejido a través de sólidas meditaciones teóricas y también de pacientes ensayos y tanteos en el taller y en el laboratorio, esfuerzos unos y otros de los que el autor jamás blasonó».

Tras esta siembra de finales de siglo, un corto conjunto de matemáticos –Jiménez Rueda, Vegas, Octavio de Toledo, entre otros– representaron una modesta transición hacia la vigorosa irrupción, en 1912, de Rey Pastor y su escuela, y su influencia científica y social en España y América. Fue así cómo en la tercera década del siglo XX la Academia de Ciencias vio la incorporación de Rey Pastor en 1920, Plans en el 23, Álvarez Ude en el 28 y Terradas en el 33; sillones ocupados hoy, respectivamente, por Dou, Guzmán, Etayo y Millán. Década que si significó en el tiempo una profunda inflexión en la deseada aparición de la matemática española, tuvo en Rey Pastor la intensa y prolongada representación de ese nuevo espíritu en la docencia universitaria, la creación de escuela, el acortamiento de las distancias europeas en numerosas aportaciones originales y publicaciones internacionales, y el análisis histórico objetivo de la matemática española, distante por igual del optimismo patriotero y de la cómoda resignación; a todo lo que hay que añadir, sus estudios epistemológicos, cartográficos y aplicados.

A partir de la inflexión colectiva de esta década y de la posición central y la influencia de Rey Pastor, la investigación matemática se consolida como ingrediente imprescindible de la actividad docente en la Universidad española y del conjunto de las actividades científicas; aumenta el número de sus cultivadores, se diversifican los temas de estudio y se cultivan nuevos campos del conocimiento matemático; continúa la trayectoria convergente hacia Europa; y la *Revista de la Academia de Ciencias* es testigo de excepción del rápido incremento de la creación matemática española. Y fue el mismo Rey Pastor quien en varias ocasiones llevó a cabo el recuento de los matemáticos y la descripción de su obra. Lo hizo en 1956 con ocasión del ingreso de Ricardo San Juan, y, quizá, la última vez que lo hiciera fuese en 1961 con ocasión del ingreso académico de Sixto Ríos, «gran propulsor de la Matemática aplicada, que bien merece el título de Ciencia Exacta de nuestros días». Con este mismo motivo, Rey Pastor aludió a los anteriores cultivadores del Cálculo de Probabilidades y la Estadística Matemática, Terradas, Ude, Fernández Bolaños, Quijano, Artigas, Cámara –«colega de valía sólo comparable a su modestia»–, Velasco de Pando y Puig Adam –«a quien es aplicable el verso de Lope de Vega: un hombre que todo es alma, está cautivo en su cuerpo»–.

El análisis histórico de la segunda mitad del siglo XX habrá de reconocer la indiscutible participación de la Real Academia de Ciencias en el despertar matemático de España que hoy podemos contemplar en esta ocasión solemne. Y en el conjunto de esta tarea académica deberá señalarse como factor principal la institucionalización de algunos cometidos con intenso componente matemático, entre los que pueden citarse: 1. La investigación lexicográfica en español de los términos y conceptos científicos, los matemáticos incluidos, y la publicación de diccionarios y vocabularios especializados. 2. El estudio y la publicación de la historia de diversos campos del conocimiento científico, los de la matemática universal incluidos. 3. El análisis crítico de la situación y los problemas de la enseñanza de la Matemática en España, a sus distintos niveles. 4. La detección y el cultivo de la precocidad matemática en los jóvenes. 5. La intensa promoción de la cultura científica y tecnológica, la de los temas matemáticos incluida, que en el presente año 2000 incluirá un diseño singular añadido de divulgación social matemática. 6. La celebración de reuniones científicas extraordinarias con motivo de acontecimientos o circunstancias de excepción, tales como los análisis efectuados sobre «Las sequías en España», «El cambio climático», «La exploración de la Antártida», «Las exploraciones espaciales», etc. 7. La selección de actividades científicas con fuerte carácter multidisciplinar que, como el «Grupo de Análisis de Decisión» dirigido por Sixto Ríos, utiliza rigurosas teorías matemáticas para la toma de decisiones individuales, empresariales y políticas, en el tratamiento de problemas complejos, relevantes en las áreas de la economía y las finanzas, la medicina, la energía o el medio ambiente.

Conjunto de actividades que utilizan las variadas metodologías al uso, seminarios permanentes, coloquios, conferencias, cursos, etc., siempre culminados con las publicaciones pertinentes, bien en la propia revista académica o, por lo general, como entidades independientes de difusión pública. Todo ello para intentar cumplir, al menos, la recomendación de don Quijote: «... ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas».

El Año Mundial de las Matemáticas: las Matemáticas en España

José Luis Fernández Pérez
Presidente del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000

Mis primeras palabras deben ser de agradecimiento al Congreso de los Diputados, a su presidente y a sus señorías, por este acto tan singular y significativo: el Congreso de los Diputados que representa a todo el pueblo español, dedica una jornada a las Matemáticas y recibe en su sede a un público de matemáticos y de gentes a las que le interesan las Matemáticas.

La singularidad de este evento realza el significado apoyo que esta jornada supone para el Año Mundial de las Matemáticas en España.

La Unión Matemática Internacional (IMU) declaró en 1992 el año 2000 como Año Mundial de las Matemáticas. Nos honra hoy con su presencia el profesor Jacques Louis Lions, quien fue uno de los promotores de esa declaración y que presidía en aquel entonces la IMU.

El objetivo primordial del Año Mundial de las Matemáticas es cambiar la imagen que éstas tienen en la sociedad. Se las respeta, incluso se las teme, pero no se las aprecia. Y eso no es bueno; no lo es para los profesionales docentes e investigadores de Matemáticas, pero sobre todo, y esto es lo importante y lo que nos hace estar aquí hoy, no lo es para la sociedad.

Son muchas las instituciones que conscientes de este problema de imagen y de sus consecuencias están apoyando este Año Mundial.

La UNESCO, tras reconocer la importancia de las Matemáticas en la sociedad y los objetivos planteados, decidió respaldar el Año Mundial de las Matemáticas, al tiempo que insistía en el papel de las Matemáticas en la educación y como clave para el desarrollo de los pueblos.

En febrero de 1999, el Congreso de los Diputados aprobó una proposición no de ley de apoyo a este empeño de acercar las Matemáticas a la sociedad, con una interesante exposición de motivos. Una iniciativa ésta que ha sido seguida por distintos parlamentos autonómicos.

Y en España este Año de las Matemáticas ha dado lugar a una intensa colaboración, lo que en sí mismo es ya un fruto de este Año, entre todas las sociedades de matemáticos y de instituciones tales como el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, la Real Academia de Ciencias y el propio Ministerio de Educación y Cultura, a través de un comité en el que todos están representados.

Desde el principio se ha entendido que el Año Mundial no es sólo una cuestión institucional, por mucho que ésta sea importante. Hay que acercar las Matemáticas a la gente y esa es una labor directa en la que están colaborando y participando muchísimas personas a través de comités de distinto ámbito territorial.

Las Matemáticas son y han sido importantes para toda la sociedad. Y su importancia va en aumento.

Las Matemáticas son el lenguaje y el modo de pensar de la ciencia. Y en la sociedad moderna, la ciencia y la tecnología desempeñan un papel de pivote. Una sociedad culta lo es necesariamente en cuestiones científicas y tecnológicas y para hablar y poder pensar en ellas las Matemáticas son esenciales.

Pero no sólo eso; conviene proclamar bien alto que las Matemáticas y la Ciencia son tan humanísticas al menos como las disciplinas y conocimientos a los que habitualmente se les adjudica tal calificativo.

Siempre se ha reconocido el papel formativo de las Matemáticas. Su manera rigurosa y lógica de organizar información y de estructurar el análisis de ésta para, finalmente, extraer conclusiones suponen un modo de indagar la realidad que es la base del método científico. Las Matemáticas constituyen una herramienta poderosa para tomar decisiones, para administrar y adjudicar recursos, para comparar alternativas. Y esta herramienta de análisis y de decisión debe ser bagaje intelectual de todo el mundo.

Son muchos los que piensan que el tiempo que se dedica a la enseñanza de las Matemáticas en la educación general y en la formación de los maestros es marcadamente insuficiente. Todos sabemos que las Matemáticas suelen considerarse como una materia difícil. No es fácil transmitir la belleza interna de los argumentos matemáticos y la profunda importancia de las

Matemáticas como método de razonamiento. Y hemos de admitir que con frecuencia toda esa belleza e importancia quedan ocultas en el entrenamiento en técnicas de cálculo rutinarias y poco iluminadoras. Esta situación no es única a España; ni mucho menos. Pero en los países de nuestro entorno se están desarrollando ya iniciativas tendentes a mejorar este estado de cosas.

Un objetivo del Año Mundial en España es tomar conciencia de esta situación, analizarla con detalle y formular propuestas constructivas de mejora. No es una tarea fácil combinar la universalidad de la educación en Matemáticas con más y mejor Matemática. Todo un reto que, por supuesto, no se resolverá de golpe. La legislación oportuna ayudará, el apoyo de las instituciones es necesario, más y mejores medios no vendrán mal, pero es una tarea que los matemáticos deben afrontar directamente, que llevará tiempo y que deberá ir percolando a todos los niveles del sistema educativo.

Conviene recordar, como buena muestra del enorme dinamismo de los profesores de Matemáticas españoles, que en 1996 tuvo lugar en Sevilla el máximo evento en estos temas: el Congreso Mundial de Educación Matemática bajo el patrocinio de la International Commission on Mathematical Instruction, institución ésta de la que ha sido presidente hasta el año pasado el profesor español Miguel de Guzmán.

Las Matemáticas están cambiando. La potencia y accesibilidad de los ordenadores están transformando a enorme velocidad los retos de investigación, el uso, la función y las aplicaciones de las Matemáticas. El esquema pensante de los ordenadores es la matemática. El *logiciel*, el elegante término con el que en francés se conoce a lo que en español seguimos llamando *software*, es matemático en su estructura y articulación.

Los modelos matemáticos y las simulaciones de ahora son extraordinariamente ambiciosos en sus objetivos y en el detalle de su descripción del mundo físico, biológico, o social al que se aplican. El uso de estos modelos está generando cantidades ingentes de nuevos datos que requieren de las Matemáticas para su adecuada estructuración con el objetivo de poder extraer conclusiones. Surgen nuevas aplicaciones de las Matemáticas que demandan de éstas nuevas técnicas e ideas.

Es acuciante que la educación en Matemáticas se adapte a esta nueva tesitura para salvar la preocupante discrepancia que existe entre su situación actual y las perspectivas de uso e influencia de las Matemáticas que se están abriendo.

¿Hacia dónde van las Matemáticas? Dar respuesta a esta pregunta fue motivación inicial para la declaración del Año Mundial. En 1900, David Hilbert, catedrático en Gotinga, se atrevió a plantear en una conferencia en el segundo Congreso Internacional de Matemáticos que a la sazón tenía lugar dentro de la Exposición Universal de París una serie de 23 problemas que él consideraba que marcarían el interés de los matemáticos en todo el siglo que pronto iba a comenzar. La lista de problemas de Hilbert ha gozado de un prestigio indiscutible y ha servido como referencia del avance de las Matemáticas a lo largo de este siglo.

Y hoy nos volvemos a plantear este ejercicio de prospectiva. Una tendencia que parece cada vez más clara es que los ordenadores nos están permitiendo y, en cierto sentido, obligando a afrontar la modelización de sistemas de enorme complejidad. Destacan entre éstos el análisis de sistemas biológicos, económicos y financieros o de estructuras de computación en la que se están abriendo nuevos paradigmas. Sistemas éstos cuya complejidad es de un orden superior a los más tradicionales de física, de química o de ingeniería.

Y, ¿en España? Los datos estadísticos de la investigación actual en España son bastante positivos. Sitúan a España como el noveno país en producción científica en Matemáticas: casi un 4% de los artículos científicos en Matemáticas que se publican en todo el mundo tienen un autor que trabaja en España. Son datos que dan fe de un avance espectacular en cuanto los comparamos con los datos correspondientes a hace quince o veinte años.

España es hoy en día un país con una digna presencia en el concierto de la investigación matemática mundial.

Hay que destacar a este respecto que en julio de este año tendrá lugar en Barcelona, organizado por la Societat Catalana de Matemàtiques, el Tercer Congreso Europeo de Matemáticas. Éste es un evento científico de primera magnitud, el más importante en el ámbito de las Matemáticas que se ha desarrollado nunca en España. Un reconocimiento de la calidad de la investigación matemática en Catalunya y del dinamismo de su sociedad matemática.

Pero la investigación matemática española está particularmente mal integrada con el resto de la investigación científica y con sus potenciales aplicaciones en cuestiones de ingeniería, la empresa o la investigación tecnológica. Parece necesario potenciar la investigación de la aplicación de las Matemáticas en los campos antes señalados para afrontar los nuevos desarrollos que ya están en marcha. Y esto sin descuidar la esencial investigación básica en Matemáticas como ciencia en sí misma. Un Plan Nacional de Matemáticas que articule esa integración es una necesidad para toda la investigación científica y tecnológica de este país.

Es significativo que la National Science Foundation de los Estados Unidos, tras un estudio dedicado a analizar los nuevos retos en investigación aplicada de las Matemáticas, ha propuesto un programa para favorecer la interacción entre la investigación académica en Matemáticas y sus usuarios en la industria, el gobierno y la investigación académica en las otras ciencias, si es que Estados Unidos quiere mantener su posición de liderazgo en la investigación y el desarrollo tecnológico.

Una pieza esencial en ese Plan Nacional debería ser la creación de un centro específico de investigación en Matemáticas y sus aplicaciones integrado en el sistema nacional de ciencia. Todos los países que nos preceden en cuanto a cantidad y calidad de su producción en investigación matemática y científica cuentan con uno o varios de estos centros. Un centro donde se desarrolle investigación matemática de excelencia es bueno no sólo para nuestras Matemáticas sino por el indudable valor añadido que aportaría a la investigación científica y tecnológica en general.

Al tiempo es necesario que la formación universitaria en Matemáticas se diversifique para que se dé respuesta a estas nuevas necesidades. Se trata de ofrecer no sólo una carrera que forme en conocimientos de Matemáticas para ser docente o investigador, sino alternativas que preparen para ser un ingeniero matemático que pueda desarrollar una actividad profesional en la industria o la empresa. Hay diversas alternativas posibles. En febrero tendrá lugar en la Universidad de Santiago una reunión para estudiar y formular posibles propuestas de actuación sobre las licenciaturas de Matemáticas de España.

Un Año Mundial de las Matemáticas en el que hemos de transmitir a la sociedad que las Matemáticas son hermosas, elegantes, útiles e importantes. Un reto muy ambicioso pero ilusionante por su importancia social.

Ilustraciones:
Agustín de Betancourt y Molina (CMJT, KP 1768)
Leonardo Torres Quevedo (Real Academia de Ciencias)
Esteban Terradas e Illa (Real Academia de Ciencias)

¿Es posible describir el mundo de lo inanimado y del ser vivo con los lenguajes matemático e informático?

Jacques-Louis Lions
Collège de France

«El Universo está descrito en lenguaje matemático», nos decía Galileo en 1614. Con el tiempo se suscita un interrogante aún más ambicioso: ¿Podrán ser descritos, comprendidos y regulados los mundos del inanimado y del ser vivo gracias a los lenguajes matemáticos e informáticos?

Una cuestión de esta naturaleza, en algún sentido incluso más extendida, aparece ya en el siglo VIII, ¡sin referencia alguna a la Informática!, en la obra enciclopédica árabe, *El corpus de Jabir,* en la que figura como director Jabir ibn Hayyan. En ella, la teoría denominada «del balance» tiene como objeto reducir todos los datos del conocimiento humano a un sistema de cantidades y medidas. Todo entra en ese propósito: «la inteligencia, el alma del mundo, la naturaleza, la forma, las esferas, los astros, las cuatro cantidades naturales, el animal, el vegetal, el mineral y por último el balance de las letras, que es el más perfecto de todos».

Es claro que el objetivo de comprender lo inanimado y el ser vivo hace intervenir a todas las ciencias y conocimientos.

Mi exposición no tratará más que sobre algunas consideraciones acerca de lo que las Matemáticas y la Informática pueden aportar a esa cuestión. Incluso bajo una limitación de esa naturaleza, el objetivo sigue poseyendo una ambición inmensa.

Doce siglos después de Jabir, cuatro siglos después de Galileo, el *Año Mundial de las Matemáticas* ofrece la ocasión de una reflexión *colectiva.*

Lo abordaremos con la humildad que precisan objetivos de la amplitud y complejidad como el que nos proponemos. No debemos olvidar a D'Alembert cuando nos recordaba que «la naturaleza no está obligada a ajustarse a nuestras impresiones».

Fruto de varios siglos de trabajos, las Matemáticas y la Informática han desarrollado un «método universal para el estudio de los sistemas». Poco importa que se trate del sistema del planeta Tierra, del sistema constituido por un avión, por un automóvil, del conjunto del transporte aéreo, marítimo o terrestre, o del sistema del cuerpo humano.

Este método universal, basado en una «trilogía universal», consta de tres grandes partes (J. L. Lions: *El planeta Tierra. El papel de las matemáticas y de los superordenadores,* 1990; una versión revisada y actualizada está siendo preparada, en las presentes fechas, en colaboración con J. I. Díaz):

1. La modelización matemática.
2. El análisis y la simulación.
3. El control, o intervención, sobre los sistemas.

Intentaré comentar esos tres aspectos sin entrar en detalles técnicos apoyándome tan sólo en algunos ejemplos. Presentaré también algunas perspectivas para el futuro.

Modelización matemática

La experiencia asocia la palabra modelo a la representación esquemática de la realidad con el fin de su comprensión.

Intentando comprender los distintos aspectos del flujo de un fluido portando partículas en suspensión, Leonardo da Vinci construyó diferentes maquetas que no eran más que «modelos reducidos» en los que se podía observar a través de ventanales. Construyó diversos modelos mecánicos. Todo le parecía fácil una vez conocidos los efectos de las escalas, es decir, las leyes matemáticas que relacionaban entre sí las cantidades físicas.

Gracias al desarrollo científico y técnico se llega a disponer, en el siglo XIX, de un gran número de modelos mecánicos que «representaban» otros modelos mecánicos.

Escuchemos a William Thomson (Lord Kelvin) en sus *Lectures on molecular dynamics and the wave theory of light* de 1884:

> Mi objetivo es mostrar cómo se puede construir, en cada una de las categorías de fenómenos físicos que vamos a considerar, y cualesquiera que sean esos fenómenos, un modelo mecáni-

> co que satisfaga las condiciones requeridas... Si vamos a considerar las vibraciones de la luz se requiere un modelo de la acción que se manifieste con esos efectos. Experimentamos la necesidad de asociar a ese modelo nuestra comprensión del conjunto. Me parece que el verdadero sentido de la pregunta ¿entendemos o no tal tema de la Física? es el siguiente: ¿podemos construir un modelo mecánico asociado?

James Clerk Maxwell, uno de los más notables «modelizadores matemáticos» de todos los tiempos, se valió de modelos mecánicos para escribir las célebres ecuaciones que llevan su nombre: ecuaciones en derivadas parciales *lineales* que describen los comportamientos de los campos eléctricos y magnéticos.

Paralelamente al progreso de la técnica, el *modelo eléctrico* sucedió al modelo mecánico. Vito Volterra escribía en su trabajo *Sul la temperature nell'interno delle montagne* de 1912:

> il procedimento che io propongo di applicare in questo caso non è analitico, ma un processo diro cosi fisico, il quale non è utile solo nel problema speciale qui trattato, ma in un gran numero di questioni riferentisi alle funzioni armoniche, alle funzioni di variabile complessa, ed anche all risoluzione di equazioni algebriche. Sappiamo che su di una superficie conducttrice omogenea, percorsa da una corrente stazionaria, il potenziale elettrico è una funzione armonica. Lo studio diro cosi aritmetico delle funzioni armoniche puo farsi facendo lo studio fisico delle distribuzione delle corrente.

Para estudiar la distribución de la temperatura en el interior de las montañas, Vito Volterra utilizó dos modelos matemáticos de sendos fenómenos físicos diferentes: *a)* un modelo matemático de propagación del calor basado en las ecuaciones propuestas por el barón Joseph Fourier en 1822, y *b)* un modelo matemático de campos eléctricos basado en las ecuaciones de Maxwell. Después de algunas simplificaciones, cada uno de los modelos matemáticos conduce al mismo *problema matemático*: encontrar una función armónica, definida sobre un dominio acotado del plano, verificando un cierto número de condiciones sobre el borde del dominio (denominadas «condiciones de contorno»).

Dado que dos situaciones físicas diferentes conducían a un mismo problema, se podía utilizar uno de los fenómenos para estudiar el otro y calcular los valores deseados. La elección era evidente en aquel caso: el modelo eléctrico permitía calcular las temperaturas pretendidas sin más que materializar físicamente el modelo eléctrico correspondiente. Siempre en el artículo citado, Vito Volterra indicaba los principios que permitían la adecuada materialización. Era el origen del cálculo de todo tipo de fenómenos por las *máquinas analógicas reo-eléctricas* (materializando físicamente los modelos eléctricos). Las numerosas aplicaciones de este modo de cálculo (llamado «analógico») continuarían hasta finales de los años cincuenta, especialmente en el ámbito aeronáutico.

Se comenzaba a definir con precisión el concepto de modelo matemático: un conjunto de ecuaciones, de relaciones y de restricciones que, en principio (¡y si el modelo es adecuado!), contiene toda la información buscada.

¿Cómo es posible que un modelo matemático pueda contener, en principio, *toda la información sobre un sistema dado*?

Hay dos razones fundamentales para ello: *a)* las notaciones y las catalogaciones que permiten la concisión y la descripción ordenada de la información, y *b)* la universalidad de las leyes matemáticas.

Las notaciones y las catalogaciones

Leibniz les concedía la mayor importancia por contener el máximo de información en fórmulas sencillas y contundentes. Fue así como se llegó al cálculo de áreas y superficies que se expresan mediante símbolos de integrales inalterados desde Leibniz.

Lo mismo sucede con los índices, que nos permiten catalogar y orientarnos en las bibliotecas clásicas (también incluso ese asunto evoluciona rápidamente con Internet). Leibniz, en su *Discurso tocante al método de la certeza y el arte de inventar para acabar las disputas y para lograr un tiempo de grandes progresos,* escribe:

> Algunas veces estoy obligado a comparar nuestros conocimientos a una gran botica... sin orden y sin inventario... Hay una infinidad de bellas ideas y observaciones útiles que se encuentran en los autores, pero aún hay muchos más que se encuentran dispersos entre los hombres en la práctica de cada profesión. Y si... lo más esencial de todo eso fuese recogido y clasificado por orden con varios índices... nos asombraríamos de nuestras propias riquezas... Se requerirían unos Repertorios Universales tanto Alfabéticos como Sistemáticos...

Más adelante Leibniz evoca en ese marco a la medicina, el derecho, la industria, el comercio...

Babbage dio un paso, modesto pero más concreto en esa dirección, introduciendo, en 1840, la notación mecánica para reorientarse entre las obras necesarias para la construcción de la máquina analítica cuando redactaba su *Tratado de economía de máquinas y de manufacturas.*

Todas esas nociones cristalizaron en la segunda mitad de los años cuarenta en el hipertexto, técnica que permite acceder, a partir de una palabra, a otras apariciones de esa misma palabra en el texto. Por tanto, a partir de un texto cualquiera se pueden construir las relaciones de una palabra con sus otras apariciones, las relaciones de una palabra, al reemplazarla, con sus sinónimos, etc. Y así hasta el infinito, pues esas relaciones no están limitadas a un solo texto ni a una sola máquina. Por la red de telecomunicaciones se puede tener acceso (gratuitamente o no, lo que es otro tema que no ha hecho más que comenzar...) a todas las bases de datos del mundo, a todos los textos del mundo (si es que han sido informatizados). Es la *Web* en la que se necesita la ayuda de navegantes y agentes, programas que buscan para sus usuarios las *relaciones entre las relaciones.*

La universalidad de las leyes matemáticas

Tal y como acabamos de mencionar, las mismas ecuaciones (Maxwell) describen los comportamientos de todos los campos eléctricos y magnéticos, las mismas ecuaciones (Fourier) describen los fenómenos de propagación del calor; todo ello gracias a las herramientas que Leibniz puso en marcha.

Demos otro ejemplo: en 1746 la Academia de Ciencias de Berlín puso a concurso la cuestión siguiente: «determinar el orden y la ley que debería seguir el viento si la tierra estuviese rodeada por todos los lados por el océano, de manera que se pueda predecir en cada instante la velocidad y la dirección del viento en cada lugar».

El premio fue otorgado a Jean Le Rond d'Alembert por su *Mémoire sur la cause générale des vents.*

Después de simplificaciones importantes, la mayor parte de ellas sugeridas por la Academia de Berlín, d'Alembert obtenía un modelo matemático de la situación. A esos efectos utilizó como herramientas las ecuaciones en derivadas parciales (derivadas direccionales de funciones de varias variables), herramientas que él mismo había introducido años antes para el estudio y resolución de la vibración de una cuerda.

Basó su análisis sobre las ecuaciones del movimiento de los fluidos perfectos, ecuaciones universales que Euler acababa de obtener.

Pero las ecuaciones de Euler son no lineales. Si se dispone de dos soluciones de la ecuación de la cuerda vibrante o de las ecuaciones que establecieron y estudiaron posteriormente Fourier (para el calor) y Maxwell (para la Electricidad y el Magnetismo), su suma es también solución. Nada similar se tiene para las ecuaciones de la dinámica de fluidos. Por tanto, no es posible representar «la» solución en forma de suma de soluciones «simples» a la hora de atender, tanto a los cálculos impracticables en los que una consideración similar hay que desechar, como a lo poco que se conozca de la superficie del globo terrestre, en una palabra, como lo denominan los geómetras, a los pocos *datos* de los que se dispone para resolver un problema tal. En definitiva, no cuesta ninguna dificultad darse cuenta de que las investigaciones más profundas sobre esta materia sólo proporcionaran resultados imprecisos e imperfectos. Más aún: «una teoría completa sobre el campo al que nos referimos es quizás la obra de varios siglos».

«Cálculos impracticables, escasez de datos», d'Alembert enunciaba así dos de las dificultades que necesitan aún «varios siglos» de esfuerzos. D'Alembert habría debido añadir «la nolinealidad del mundo», obra que por otra parte deberá ciertamente perseguirse aún a lo largo de todo el siglo XXI.

¿Cómo obtener verdaderamente, de manera concreta y explicita, esta información? Es la potencia del análisis matemático y de la simulación, objeto de la segunda parte de esta exposición.

El análisis y la simulación

«Extraer» la información de un modelo matemático no lineal no es tarea fácil. ¡Por esto el mundo de la naturaleza es tan complejo!

En 1256, Alfonso X el Sabio, a refugio en el Alcázar de Segovia de una violenta tormenta exclamó: «Si el Señor Todopoderoso me hubiese consultado durante la creación del mundo le hubiese recomendado algo más sencillo».

Las relaciones entre los diversos subsistemas, denominadas retro-alimentaciones o *feedbacks,* son muy abundantes: la temperatura de los océanos y de la atmósfera están evidentemente relacionadas (por cierto que de forma no lineal), vegetación y humedad están correlacionadas, etc.

Todos esos aspectos pueden ser modelizados cada vez más satisfactoriamente. Pero por medio de modelos no lineales.

Nadie mejor que Leonardo da Vinci supo representar los remolinos y turbulencias de los flujos de fluidos, las velocidades del flujo según las circunstancias de la geometría, de los obstáculos, fenómenos visiblemente no lineales en los que argumentos análogos a la sencilla y vigorosa regla de tres dejan de ser aplicables.

Intentar comprender y después cuantificar esas situaciones es uno de los hilos directores de la ciencia y de la tecnología, de manera constante en la actualidad y probablemente de igual modo durante muchos decenios del próximo milenio.

¿Cómo abordar esas dificultades? En primer lugar, gracias a los progresos de los métodos del Análisis Matemático que han permitido ver rigurosamente lo que faltaba aún para que los modelos fueran completos permitiendo preparar el camino para que el uso de los ordenadores fuese posible. Por ejemplo, los métodos matemáticos derivados del Cálculo de Variaciones (¡métodos en los que se trata de optimizar las cosas!) Son utilizados *cotidianamente* en los centros de previsión meteorológica (previsiones, dicho sea de paso, que no han cesado de mejorar).

Tras esto, las dificultades encontradas por d'Alembert han podido ser superadas gracias a los *superordenadores.*

Se trata de una larga historia. Comienza en 1640 con Blaise Pascal quien empleó en sus investigaciones para la puesta a punto de una calculadora «todo el conocimiento que mi inclinación y el trabajo de mis primeros estudios me han permitido adquirir en matemáticas», como él mismo escribía en 1645. La historia sigue con Leibniz y con Charles Babbage entre 1820 y 1840. Una contribución teórica fundamental fue aportada por el matemático Alan Turing, quien, en 1936, describía una máquina ideal, virtual, capaz de ejecutar (en principio) todo tipo de cálculo. En alguna manera, un resultado de existencia, que intervendría, en los años cuarenta, a la realización de los trabajos de los físicos sobre los transistores y a las contribuciones decisivas de John von Neumann sobre la lógica y las aplicaciones.

La aventura continúa. Simplificando al máximo, podríamos imaginar que un técnico hábil podía ejecutar algunas decenas de operaciones aritméticas por minuto con la máquina de Pascal (la Pascalina). John von Neumann se fascinaba, en 1944, por la perspectiva de algunos centenares de operaciones por segundo. En la actualidad, estamos en miles de miles de operaciones (lo que se llama el *Tera Flop*). Se divisa la centena de Tera Flops y se vislumbra el millar de Tera Flops (el *Peta Flop*)... Gracias a los progresos combinados de la Física y de la Informática.

Es así como se establecen los escenarios posibles de la evolución climática del planeta Tierra, herramientas indispensables para la toma de decisiones lo más racionales posibles en lo que concierne a la *Transición hacia el Desarrollo Sostenible.*

Aún no he evocado la modelización matemática en las *Ciencias de la vida.* Las modelizaciones en el dominio demográfico son antiguas y se remontan a T. R. Malthus. Las simulaciones basadas sobre sistemas de ecuaciones son corrientemente utilizadas para las prótesis, ya sea de huesos o de la circulación sanguínea. Y cómo no citar aquí el análisis del genoma, pese a que requiera técnicas matemáticas diferentes. Volveremos sobre todo eso más adelante.

Antes de pasar al control de los sistemas quisiera llamar la atención sobre un punto que concierne al rigor: me refiero al rigor matemático, por supuesto.

Conviene ser precisos: una vez representado (modelizado) un fenómeno mediante ecuaciones matemáticas los métodos matemáticos dan acceso a las informaciones obtenidas *rigurosamente*, sin contestación posible, una vez que la demostración ha sido validada por otros matemáticos.

Si las ecuaciones modelizan un fenómeno matemático la causa es comprendida, el teorema demostrado, la conjetura es resuelta (como la reciente resolución de la conjetura de Fermat por Wiles).

Pero cuando las ecuaciones modelizan fenómenos de las ciencias de la naturaleza o las ciencias de la vida un resultado rigurosamente establecido puede no corresponder a la realidad si los modelos no se corresponden con el fenómeno estudiado más que *de manera aproximada.* Es evidente que, por ejemplo, el sistema de los océanos del planeta Tierra *no puede* ser modelizado hasta sus mínimos detalles. Los resultados deducidos *rigurosamente* a partir de los modelos no pueden dar más que a lo sumo una *aproximación* del fenómeno real.

A veces se utiliza una expresión un poco vulgar pero gráfica: PIPO («Poubelle *In* Poubelle *Out*») pretendiendo indicar con esto que las consecuencias correctamente deducidas de un modelo falso no pueden ser más que falsas.

La simulación debe ser validada. Si los resultados numéricos de la simulación no concuerdan convincentemente con los resultados de medidas experimentales hay que reconsiderar el modelo, lo que a veces implica revisar la teoría. Es por medio de ese va y viene incesante como avanzan las ciencias y la tecnología. La tan citada aceleración es fruto simplemente de la potencia de los métodos matemáticos y de los ordenadores.

Éstas son, a grandes líneas, algunas ideas para el análisis y comprensión de los fenómenos que gracias a los ordenadores llega a plasmarse en resultados cuantitativos.

¿Qué consecuencias se derivan a la hora de la acción? El papel de las Matemáticas y de la Informática en la acción corresponde a la *Teoría de Control* que será el objeto de la tercera parte de esta exposición.

El control o intervención sobre los sistemas

Controlar un sistema es actuar sobre él de manera que se comporte según nuestros deseos. Tomaré como ejemplo el de la misión Apollo. El 25 de mayo de 1961, en el mensaje al Congreso sobre las necesidades nacionales urgentes, John Fitzgerald Kennedy declaró: «Nuestra nación debe consagrarse a la realización, antes del fin del decenio, del envío del hombre a la Luna y su regreso a Tierra efectuado con toda seguridad». Se iniciaba así la misión Apollo encargada a la NASA.

Una sonda lanzada a la Luna debe seguir una trayectoria calculada, optimizada, denominada «nominal». Los cálculos son efectuados por métodos del Cálculo de Variaciones en el que Euler y Lagrange habían puesto las bases. Esos métodos conducen a un cálculo *off line* (independiente de la ejecución de la misión, de la conducción del sistema). Pero ínfimas variaciones del impulso de los motores conllevan desviaciones de la trayectoria de la sonda previamente calculada. Otros impulsos calculados (las variables de control) permiten corregir esas desviaciones y reconducen la trayectoria real hacia la trayectoria nominal. Eso no tiene sentido más que cuando, por una parte, se sabe dónde se está (no se puede controlar lo que no se puede medir) y, por otra, se tienen los medios de decidir la corrección *en tiempo real.* ¡Se precisa la decisión adecuada en el instante adecuado!

R. Kalman introdujo en 1960 el «filtro» que lleva su nombre dando en tiempo real la solución de sistemas lineales con criterios cuadráticos (se intenta minimizar, por ejemplo, el cuadrado de la distancia del estado a un estado optimal). Ésta se calcula *off line* por la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales de J. Riccati, introducidas en 1700, y se ejecuta *on line* (en tiempo real) por «aplicación» de la solución así calculada en el estado medido del sistema.

¿Por qué un *filtro*? Porque este método «elimina los ruidos» y permite corregir las pequeñas variaciones entre la trayectoria nominal y la trayectoria observada.

La linealidad requerida por el método conlleva una restricción severa. No cesaremos de recordarlo: la naturaleza es no lineal. La misión Apollo no es ninguna excepción.

Bajo la hipótesis de no separarnos demasiado de la trayectoria nominal se podría linealizar en cada instante, al menos formalmente (mediante la consideración de las ecuaciones diferenciales tangentes). Eso es exactamente lo que hace la NASA (según se indica en el trabajo de 1981 de S. F. Schmidt: *The Kalman Filter: its Recognition and Development for Aerospace Applications*). Y lo hace con el éxito de la misión, éxito que por supuesto hace intervenir otras ideas y otras técnicas.

La intervención en este marco de las ecuaciones de Riccati merece que nos detengamos un instante. El conde Riccati había estudiado los trabajos de Leibniz y Euler sobre las ecuaciones diferenciales. Personaje con fortuna, poeta a ratos (muy mediocre por lo demás), había rehusado las invitaciones de Euler, especialmente para ir a trabajar a Berlín. Toda su carrera se desarrolló en Venecia donde era consultado frecuentemente por las autoridades para estudiar las medidas a tomar para evitar el encenagamiento de la ciudad. Se ocupaba del medio ambiente, como diríamos en nuestros tiempos. En el campo de las ecuaciones diferenciales obtuvo la forma general de las ecuaciones que se pueden resolver analíticamente por simples transformaciones y estudió, de manera primordial, las ecuaciones con una nolinealidad cuadrática (y con una estructura particular) que hoy día llevan su nombre. Con el transcurso de los siglos, sus resultados se han convertido en un mero ejercicio para los estudiantes de la materia.

Examinemos ahora otros métodos sobre nuevos ejemplos.

La cuestión más general que uno puede imaginar en el marco del control es la del control del clima, cuestión que requiere una gran audacia. Siempre se podrá decir que el control del clima ya ha comenzado. Dictar normas obligatorias sobre las emisiones atmosféricas de gases de efecto invernadero es efectivamente una decisión de tipo «control» pero sin búsqueda de la optimalidad. En ese caso el criterio es el de mantener al planeta Tierra en un estado aceptable. En ese marco se toman las decisiones que se juzgan «razonables» y que se confía en no tener que lamentarse. Son las políticas denominadas «de precaución» y la teoría de los controles «sin lamentos» o «del menor lamento».

Una vez más la cuestión no era nueva. John von Neumann lo mencionaba en un artículo de 1955, *Can we survive technology:*

> Modificar la cantidad de energía solar va, por supuesto, más allá de las posibilidades humanas. Pero lo que cuenta realmente no es la cantidad que llega a la Tierra sino la fracción que es retenida por ella [...]. De hecho, la cantidad absorbida por la Tierra sólida, el océano o la atmósfera parece estar sometida a influencias delicadas. A decir verdad, ninguna de ellas ha sido hasta ahora significativamente controlada por la voluntad humana aunque hay muchas indicaciones sobre la posibilidad de su control.

Pero John von Neumann se apresura a añadir, después de haber descrito algunas de las acciones posibles (por ejemplo, el cambio del albedo de los glaciares polares mediante el esparcimiento de polvos negros):

> Es claro que lo que se podría hacer no es indicativo de lo que debería hacerse: provocar una nueva era glacial para incomodar a otros, o una nueva era tropical para el placer de todos no es necesariamente un programa racional...

La gestión de los embalses, depósitos fluviales y *polders* suministra algunos ejemplos en los que la modelización, simulación y control juegan un papel esencial. Quizás, la dificultad principal resida en este caso en la elección de los criterios a optimizar. En el caso de los embalses o de las esclusas las variables de control son la mayor o menor apertura de los vanos o de las esclusas, así como los instantes de apertura y cierre. El sistema contiene como principales componentes, por una parte, la hidrodinámica (modelizado ahora, en general, por las ecuaciones de las aguas poco profundas, modelizadas por Saint Venant en la primera mitad del siglo XIX) y, por otra, de la meteorología local sobre los vientos, las lluvias, la presión atmosférica y, por último, en ciertos casos (*polders,* laguna de Venecia...) el «subsistema» de las mareas.

Algunos ejemplos de la puesta en marcha de este tipo de control son: la apertura de las esclusas de Nieuw Statenzijl, la apertura de las esclusas sobre el Támesis para la prevención de inundaciones en la región de Londres, gestión optimizada de la energía hidráulica por EDF (Electricité de France), etc.

Existen algunos estudios en curso sobre el sistema, muy complejo, de la laguna de Venecia (Proyecto Venecia Nueva).

He intentado mostrar, a partir de ejemplos históricos y de situaciones actuales, la potencia de la trilogía «Modelización matemática, Análisis y Simulación, y Control».

Un dicho francés afirma lo siguiente: el estúpido habla del pasado, el sabio del presente y el idiota del futuro...

Sin embargo quisiera esbozar ahora algunas perspectivas futuras.

Esas perspectivas no podrán atender a los métodos e ideas en la investigación fundamental pues por su propia esencia son imprevisibles.

Así, los resultados fundamentales obtenidos en Química supramolecular hacen quizás abordable la creación de nuevas moléculas (y por supuesto de agentes físico-químicos), tan útiles en la ciencia de materiales como para los medicamentos, por medio de control matemático.

Los progresos de la biología molecular pueden conducir a resultados de ese tipo. Todo ello por medio de cálculos sobre numerosas ecuaciones de Schrödinger acopladas entre sí, fuera del alcance en el momento actual pero quizás no en una decena de años.

Se sabe ya cómo modelizar la circulación sanguínea sobre partes del corazón o de una u otra arteria. ¿Acaso es impensable conseguir de aquí a una decena de años una simulación cada vez más realista de la circulación global?

Desde hace ya algunos años, las herramientas de simulación de intervenciones quirúrgicas (corazón, hígado) son utilizadas para la formación inicial de los futuros cirujanos, de igual manera que los recursos de simulación son utilizados de manera habitual para la formación de pilotos.

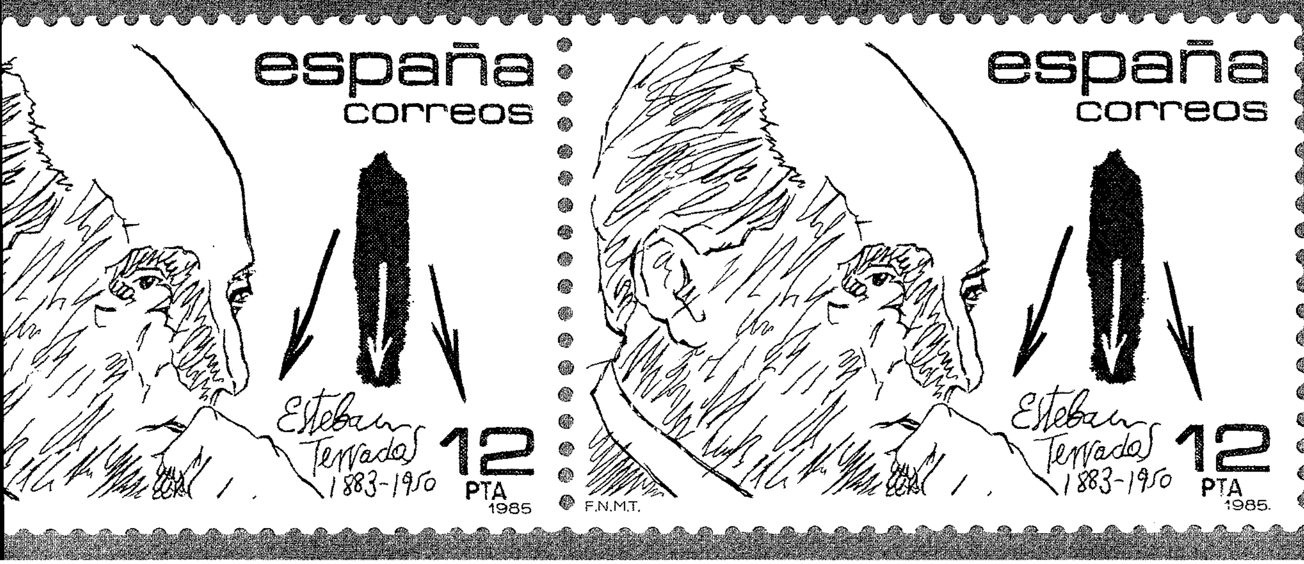
Qué decir tiene que la ambición última de esta modelización es el cerebro humano. No haré a ese respecto ningún pronóstico, observando solamente cómo la imitación de la naturaleza (lo que se llama la «ingeniería reversa») es un método cada vez más útil que ha aportado sus frutos como las redes neuronales y los algoritmos genéticos.

«Espesad todos los sueños, tenéis la realidad», nos dice Victor Hugo.

He intentado mostraros que las Matemáticas y la Informática pueden sustentar la ambición de describir, comprender y regular los mundos de lo inanimado y del ser viviente, transformando, poco a poco, los «sueños» en «realidad».

Al-Zargali. Plancha calcográfica y dos efectos

Leopoldo Torres Quevedo. Dibujo original y dos efectos



Ilustraciones:

Al-Zargali (Azarquiel). Plancha calcográfica y 2 efectos. Serie Patrimonio Cultural Hispano-islámico. Emisión 3-XII-1986 (Museo de la Fábrica Nacional de Moneda y Timbre)

Leonardo Torres Quevedo. Dibujo original y 2 efectos. Serie Personajes. Emisión 6-IX-1955 (Museo de la Fábrica Nacional de Moneda y Timbre)

Esteban Terradas e Illa. Dos efectos. Serie Personajes. Emisión 24-VII-1985 (Museo de la Fábrica Nacional de Moneda y Timbre)

Las Matemáticas en la actividad política

David Nualart
Universitat de Barcelona

Como herramienta para el estudio cuantitativo y la modelización de fenómenos, las matemáticas están presentes en todas las disciplinas, y en particular en las ciencias políticas. Cuestiones fundamentales como la medición del poder político del Presidente de una nación, el reparto más adecuado de escaños entre diversas formaciones políticas en función del número de votos, la elección de una estrategia en una situación de conflicto o el establecimiento de un sistema de votación justo y razonable pueden abordarse utilizando teorías matemáticas adecuadas como la teoría de juegos, la teoría de la elección social o la programación entera.

En esta conferencia intentaré presentar algunas de estas cuestiones con objeto de mostrar el papel que juegan las matemáticas en la vida política.

Sistemas de votación e índices de poder

Uno de los elementos básicos de la política es la noción de poder. Esta noción tiene diversos aspectos pero a nosotros nos interesa el poder relacionado con un determinado sistema de votación en el que cada votante emite un SÍ o un NO a una cierta proposición. Si todos los votantes tienen un solo voto y se usa la regla de la mayoría, todos tendrán el mismo poder. Sin embargo existen situaciones en las que no se sigue el principio de «una persona, un voto». Por ejemplo, los accionistas de una empresa tienen un número de votos en función de las acciones que poseen. También en una asociación económica entre tres países A, B y C puede ocurrir que por razón de mayor peso al país A se le asignen tres votos, mientras que a B y a C se les asigne un solo voto. ¿Significa esto que el país A tiene el triple de poder que B o que C? La respuesta es claramente no porque B y C no tienen ningún poder si se sigue la regla de la mayoría para tomar acuerdos. Se trata entonces de introducir una medida cuantitativa del poder de cada votante entendido como su capacidad para influir en las decisiones.

Supongamos que en un *sistema de votación ponderado* hay n votantes $A_1, \ldots, A_n$ y cada votante tiene asignado un cierto número de votos $v(A_1), \ldots, v(A_n)$. Para completar la descripción de este sistema de votación hay que especificar una cuota q que es el mínimo número de votos necesario para aprobar un acuerdo. Representaremos este sistema de votación mediante la notación:

$$[q: v(A_1), \dots ,v(A_n)].$$

El primer índice numérico para evaluar el poder en los sistemas de votación fue propuesto en 1954 por Shapley y Shubik. El índice de poder de Shapley-Shubik de un votante concreto A_i se define como el número $N(A_i)$ de permutaciones de los votantes en las que A_i es un elemento decisivo (o *pivote*) respecto a los votantes que le preceden, dividido por el número total de permutaciones, es decir:

$$\frac{N(A_i)}{n!}$$

Que A_i sea un pivote en una ordenación de los votantes significa que los votantes anteriores a A_i no forman una coalición ganadora pero al incluir A_i la coalición se convierte en ganadora.

Por ejemplo, examinemos el caso de un sistema de votación ponderado con tres votantes, A, B y C, que tienen 50, 48 y 2 votos, respectivamente. Podemos imaginar que estos votantes son accionistas de una empresa que poseen el 50%, el 48% y el 2% de las acciones. Si los acuerdos se toman por mayoría simple, la cuota es de 51 votos y expresaremos este sistema de votación como [51: 50, 48, 2]. Con objeto de calcular el índice de Shapley-Shubik de cada votante, en la tabla siguiente hemos encuadrado el votante pivote en cada una de las seis posibles ordenaciones:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{A}\ \boxed{\mathrm{B}}\ \mathrm{C} & \mathrm{B}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \mathrm{C} & \mathrm{C}\ \boxed{\mathrm{A}}\ \mathrm{B} \\ \mathrm{A}\ \boxed{\mathrm{C}}\ \mathrm{B} & \mathrm{B}\ \mathrm{C}\ \boxed{\mathrm{A}} & \mathrm{C}\ \mathrm{B}\ \boxed{\mathrm{A}} \end{array}$$

De lo que se deduce que A tiene un índice de poder de $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$, mientras que B y C tienen un índice igual a $\frac{1}{6}$. Observemos que B y C tienen el mismo índice de poder, aunque B tenga 24 veces más votos que C.

El índice de Shapley-Shubik representa una fracción del poder total en el sentido de que la suma de todos los índices es 1. Por otra parte, este índice puede utilizarse para medir el aumento de poder al hacer coaliciones. Por ejemplo, consideremos un sistema con 100 votantes en el que cada uno tiene un voto. El índice de poder de cada votante es 0,01. Sin embargo, si 12 votantes deciden votar conjuntamente, el índice de poder de este grupo de votantes pasa a ser de $\frac{12}{89} = 0{,}135$ que es mayor que la suma de los índices individuales. En general si hay n votantes y aparece un bloque de tamaño b el índice de poder del bloque se calcula mediante la fórmula $\frac{b}{n-b+1}$, que corresponde al índice de un votante con b votos en un sistema en el que los restantes n-b votantes tienen un solo voto.

Un índice de poder diferente fue introducido en 1965 por el abogado estadounidense John Banzhaf. El índice de Banzhaf de un votante se define como el número de coaliciones ganadoras a las que pertenece dicho votante y que perderían si desertase. En cualquier coalición ganadora, un votante que es capaz de causar la derrota de la misma al desertar se denomina un *votante basculante.* Contrariamente a lo que ocurría con el índice de Shapley-Shubik, aquí las coaliciones se cuentan sin tener en cuenta la ordenación de los votantes. En el sistema [51: 50, 48, 2], los índices de Banzhaf serían 3, 1, 1, ya que A es basculante en las coaliciones {A,B,C}, {A,B} y {A,C}, mientras que B es basculante en {A,B} y C lo es en {A,C}. El índice de Banzhaf se acostumbra a normalizar, es decir, dividir por la suma total de los índices, y de esta forma, en este ejemplo obtendríamos los índices normalizados $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{5}$.

Estos dos índices no proporcionan una solución perfecta al problema de la medición cuantitativa del poder debido a ciertas paradojas. Por ejemplo, al pasar de la distribución de votos [8: 5, 3, 1, 1, 1] a [8: 4, 4, 1, 1, 1] el primer votante tiene menos votos pero aumenta su índice de Banzhaf de 0,47 a 0,5 debido a que los tres últimos votantes se convierten en innecesarios para cualquier coalición ganadora. El índice de Shapley-Shubik no presenta esta paradoja, pero puede ocurrir que al aumentar el número total de votantes el índice de un votante aumente aunque su fracción de votos disminuya. Por otra parte, estos índices pueden dar valores muy diferentes. Por ejemplo, el bloque de 12 votantes en un sistema de 100 miembros tiene un índice de Banzhaf de 0,632, mientras que el índice de Shapley-Shubik era de 0,135.

Los índices de poder se pueden calcular para sistemas de votación más complejos que los sistemas ponderados, definidos mediante un determinado conjunto de coaliciones ganadoras. Se dice que dos sistemas de votación son equivalentes si tienen las mismas coaliciones ganadoras. Puede demostrarse que hay sistemas equivalentes a un sistema ponderado, y otros que no lo son. Por ejemplo, el Consejo de Seguridad de las Naciones Unidas está formado por 15 países, cinco de ellos, los miembros permanentes, con derecho a veto. Para aprobar una resolución se requieren nueve de los 15 votos. Este sistema de votación es equivalente a un sistema ponderado de cuota 39, con siete votos para cada miembro permanente y uno para cada miembro no permanente. En cambio el sistema de votación Federal de los Estados Unidos de América, en el que el Presidente tiene derecho de veto, excepto si se alcanzan los dos tercios de los votos, no es un sistema ponderado. Es curioso observar que en este sistema el índice de Shapley-Shubik del Presidente es 0,16, mientras que el de Banzhaf es 0,04.

Los índices de Shapley-Shubik y de Banzhaf aportan una medición del poder desde perspectivas diferentes, siendo el índice de Shapley-Shubik más adecuado si hay una gama de opiniones sobre la mayoría de cuestiones sobre las que han de decidir los votantes, mientras que el de Banzhaf sería preferible si la pregunta no admite un conjunto amplio de opiniones. En conclusión, el problema de la medición del poder en un sistema de votación no está completamente resuelto, existiendo diversos modelos matemáticos posibles.

Los sistemas de votación SÍ-NO son casos particulares de juegos de n personas, y el índice de Shapley-Shubik se derivó de la noción de valor Shapley del juego. La teoría de juegos proporciona un modelo matemático simple para situaciones de conflicto, que en algunos casos ha aportado un nuevo enfoque a sucesos que en un principio parecían intratables por su enorme complejidad.

La teoría de la elección social

Hasta ahora hemos considerado sistemas de votación con dos alternativas: SÍ y NO. Si existen más de dos alternativas, el problema se vuelve más complicado. Cada individuo tendrá un cierto orden de preferencia entre las diferentes alternativas y se plantea el problema de convertir las distintas preferencias individuales en una sola elección para todo el grupo. Ésta es la cuestión básica en la denominada *teoría de la elección social*.

Para ilustrar este problema, consideremos el caso de tres opciones a, b y c, y supongamos que las seis posibles ordenaciones de preferencia entre ellas tienen los siguientes porcentajes de aceptación:

abc	*acb*	*bac*	*bca*	*cab*	*cba*
22%	23%	15%	29%	7%	4%

Observamos que la alternativa a es preferida como la primera sobre las otras por un 45%, la alternativa b por un 44% y la alternativa c por un 11%, sin embargo la ordenación *abc* no es la que tiene más votos. Por lo tanto, no queda claro cómo elegir una ordenación a partir de las preferencias particulares.

Una regla o procedimiento de agregación que permita elegir una ordenación entre las alternativas a partir de preferencias particulares se denomina una *función de bienestar social*. Como ejemplos de funciones de bienestar social pueden citarse:

a) El método de la *mayoría relativa* consiste en ordenar las alternativas según el número de veces que aparecen como mejor opción. En primer lugar aparecerá la alternativa con mayor número de votos aunque no tenga la mayoría absoluta. En el ejemplo anterior, la ordenación ganadora sería la *abc*.

b) El procedimiento denominado *índice de recuento de Borda* consiste en puntuar de 1 a *n* las alternativas de cada lista individual, y luego sumar los puntos de cada alternativa para llegar a una clasificación final.

c) El método de *comparación por parejas* coloca la alternativa *x* delante de la alternativa *y* si más del 50% de los individuos prefieren *x* a *y*. En el ejemplo anterior, *a* gana a *b* por 52% a 48%, *a* gana a *c*, por 60% a 40%, y *b* gana a *c* por 66% a 34%. Luego la ordenación final es *abc*. El problema con este método es que la relación obtenida puede no ser transitiva; es decir, puede ocurrir que *a* gane a *b*, *b* gane a *c* y, sin embargo, *a* no gane a *c*.

Dada esta diversidad de métodos, pueden apuntarse varias propiedades que deberían tener un método razonable:

a) Dominio universal: Cualquier preferencia individual es legítima.

b) El principio Pareto: Si hay unanimidad en considerar una alternativa mejor que otra entonces el procedimiento de agregación debería colocar siempre la alternativa mejor delante de la peor.

c) Independencia de alternativas irrelevantes: La ordenación social de dos alternativas sólo depende de su ordenación en cada lista individual y no de su relación con otras alternativas.

En 1951, el economista Kenneth Arrow demostró un *Teorema de Imposibilidad* que afirma que si hay más de dos alternativas, cualquier función de bienestar social que cumpla las propiedades anteriores coincide con las preferencias de un cierto individuo, que varía según cuál sea la función, y podríamos hablar de una cierta *dictadura*. Este resultado es sorprendente y nos dice que es imposible encontrar un método de agregación justo y razonable.

A partir de este teorema, diversos autores han intentado obtener resultados positivos modificando las propiedades anteriores. Por ejemplo, hay situaciones en las que la hipótesis de dominio universal no tiene sentido. Esto ocurre, en particular, cuando las posibles alternativas están ordenadas de forma natural como la ordenación de izquierda a derecha de los partidos políticos. En tal caso se supone que las preferencias individuales son *unimodales* respecto a tal ordenación, lo que significa que fijada la mejor alternativa para un individuo, al alejarnos en cualquiera de las dos direcciones encontramos alternativas menos preferidas. En tal situación, Black demostró en 1958 que la relación obtenida mediante el método de comparación por parejas es transitiva y, por tanto, constituye el método más apropiado en este caso.

En 1966 Sen introdujo una noción de coherencia que refleja de otro modo la idea de similitud entre listas y que también implica la transitividad de la lista obtenida mediante el método de comparación por parejas. Podemos concluir, por tanto, que, aunque no hay un método matemáticamente perfecto, en algunos casos pueden hallarse procedimientos de agregación que funcionen bien.

El reparto proporcional de escaños

De forma más concreta, las matemáticas intervienen en el problema del reparto proporcional de escaños entre diversas formaciones políticas en función del número de votos. Éste es un caso particular del problema de *la asignación proporcional entera*. Problemas análogos serían la asignación de escaños del Congreso de los Diputados a las provincias en proporción a la población de cada una o la asignación de puestos escolares a los pueblos en proporción a la población. Muchos problemas de asignación de recursos en Economía admiten planteamientos similares.

Supongamos que hay que repartir una cantidad h de escaños entre n formaciones políticas. A partir del número de votos $v_1, \ldots, v_n$, pueden calcularse las *cuotas,* definidas como la parte del número de escaños proporcional al número de votos:

$$q_i = \frac{v_i}{v_i + \ldots + v_n} h$$

Estas cuotas suman h, pero, en general, no son números enteros. Una solución al problema de la asignación proporcional entera consistirá en encontrar números enteros $a_1,\ldots,a_n$ próximos a las cuotas y que sumen h.

Se plantea entonces el problema de cómo construir un método adecuado de asignación proporcional entera. A lo largo de la historia se han utilizado esencialmente el método basado en los restos y los métodos basados en divisores. La asignación obtenida en cada caso parte de una idea simple y termina siendo la solución de un problema de optimización.

El método más simple es el de los *Restos Mayores.* Se asigna, en primer lugar, a cada partido la parte entera de su cuota $[q_i]$, luego se ordenan de mayor a menor los restos $q_i - [q_i]$ y se asigna un escaño más a cada uno de los partidos con mayor resto hasta completar los h escaños. Este método tiene la buena propiedad de que da soluciones que difieren de la cuota en menos de un escaño. Sin embargo presenta paradojas inaceptables como que al aumentar el número de escaños de la circunscripción haya partidos que reciban menos representantes. Ésta es la denominada *paradoja de Alabama* debido a que en 1880 este estado tenía derecho a ocho representantes si el tamaño de la cámara era de 299, pero sólo a siete representantes si el tamaño era de 300. En este caso el Congreso de los Estados Unidos eligió un tamaño de 325 escaños, con lo que se produjo un reparto justo. Por otra parte, puede ocurrir que al comparar dos elecciones distintas un determinado partido haya obtenido más votos pero menos escaños. A esta paradoja se la denomina *paradoja de los votos.* Estas paradojas califican el método de los Restos Mayores de poco razonable y conducen a la búsqueda de métodos alternativos.

El denominado método de los *divisores* tiene dos ingredientes: por una parte, se elige una forma de redondear fracciones a cantidades enteras. En general, el redondeo de un número real x será un número entero que designaremos por $[x]_{red}$ que diferirá de x en menos de una unidad. Fijado un divisor d, se divide el número de votos de cada partido v_i por d, y se redondea el resultado. La solución se obtiene entonces eligiendo un divisor d, de forma que la suma de las fracciones redondeadas $\left[\frac{v_i}{d}\right]_{red}$ sea igual al número de escaños a repartir h, es decir,

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{v_i}{d}\right]_{red} = h$$

Existirán tantos métodos diferentes como formas de redondeo. Los ejemplos de redondeo más simples son:

a) La parte entera del número, $[x]$, o redondeo hacia abajo.

b) La parte entera más una unidad, $[x] + 1$, o redondeo hacia arriba.

c) La parte entera del número más 0,5, $[x + 0{,}5]$, que es el entero más próximo a x.

En general, una forma de redondeo viene definida por la elección de unos números $r(s)$ comprendidos entre cada par de enteros consecutivos s y $s + 1$:

$$0 \leq r(0) \leq 1 \leq r(1) \leq 2 \leq r(2) \leq 3 \leq ...$$

Se define entonces el redondeo de un número real x comprendido entre $r(s)$ y $r(s+1)$ como $s+1$.

El caso particular de una función aditiva del tipo $r(s) = s + m$, donde m es un valor fijo del intervalo [0,1], da lugar al redondeo $[x]_{red} = [x - \mu] + 1$.

Un procedimiento práctico para aplicar el método de los divisores asociado al redondeo del tipo $r(s)$ consiste en hacer una tabla de las fracciones $\frac{v_i}{r(j)}$, para $i = 1,..., n$, y $j = 1,...,h$. A continuación se localizan en la tabla las h fracciones mayores y se asignan al partido i tantos escaños como fracciones mayores tengan por numerador v_i.

Se han utilizado históricamente diversas funciones $r(s)$:

a) El método asociado a $r(s) = s + 1$ es el conocido método de d'Hondt y fue introducido por Jefferson para el reparto de escaños en el Congreso de los Estados Unidos en 1794. El redondeo utilizado en este método es simplemente la parte entera.

b) Si $r(s) = s + 0{,}5$, se obtiene el método St. Laguë, desarrollado por Webster como alternativa al método de Jefferson que favorecía a los grandes estados.

c) Si tomamos $r(s) = s$, tendremos el método de los Divisores Pequeños o de Adams.

d) El método asociado a $r(s) = s + 0{,}4$ fue inventado por Condorcet.

En cuanto a métodos más complicados puede citarse el de Hill-Huntington o de la Media Geométrica que utiliza los números $r(s) = \sqrt{s(s+1)}$, y el de Dean o de la Media Armónica basado en $r(s) = \frac{2s(s+1)}{2s+1}$.

Desde un punto de vista matemático el problema de la asignación proporcional entera se puede abordar como un problema de programación entera. Es decir, se trata de optimizar una determinada función objetivo, bajo un conjunto de restricciones que en nuestro caso consistirán en imponer que el vector solución $(a_1, ... ,a_n)$ tenga las componentes enteras no negativas y de suma h. La función objetivo dependerá de cada método. Por ejemplo, el método de los Restos Mayores corresponde a la minimización de la función $\sum_{i=1}^{n} |a_i - q_i|$ igual a la suma de los valores absolutos de las diferencias entre las asignaciones y las cuotas. El método de la Media Geométrica corresponde a la minimización de la función definida como la suma ponderada de los cuadrados de las diferencias entre el número de votos por escaño de cada partido, $\frac{v_i}{a_i}$, y el número medio de votos por escaño $\frac{v}{h}$, donde $v = v_1 + \cdots + v_n$ es el número total de votos. Es decir, la función

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{v_i}{a_i} - \frac{v}{h} \right)^2$$

Dada la diversidad de métodos, ¿cómo elegiremos el más razonable? Un procedimiento habitual en Matemáticas consiste en imponer ciertas propiedades deseables, como en el caso de la elección social, y luego buscar un método que las cumpla. Entre estas propiedades podemos citar:

1. *Verificación de la cuota:* Ninguna diferencia entre escaños y cuota es superior a la unidad.
2. *Monotonía respecto a la cantidad de escaños:* Al aumentar el número h de escaños de la circunscripción, ningún partido debería recibir menos escaños, para una distribución fija de votos.
3. *Monotonía respecto a los votos:* Al comparar los resultados de dos elecciones, si el número de votos de un partido aumenta y el de otro disminuye, no debería ocurrir que el primero tenga menos escaños y el segundo más.
4. *Homogeneidad:* La solución no se altera si se multiplican los números de votos por un factor $\lambda > 0$.

En 1982, los matemáticos Balinski y Young demostraron que no es posible definir un método de asignación que sea homogéneo, monótono respecto a los votos y verifique la cuota. Se trata, por tanto, de un teorema de imposibilidad similar al de Arrow que nos lleva a prescindir de alguna de las propiedades anteriores.

Verificar la cuota supone exigir mucho a los partidos grandes y poco a los pequeños. Si a un partido cuya cuota es 0,5 se le asigna un escaño, recibe el doble y se verifica la cuota, mientras que a otro partido al que corresponde una cuota de 13,5 puede recibir como máximo 14 escaños para verificar la cuota, lo que no parece justo. Por tanto, las limitaciones que marca la cuota no corresponden a la idea de proporcionalidad. Por otra parte, un método de asignación que no sea monótono es susceptible de manipulación política en beneficio de uno o varios partidos. Por todo ello, parece ser más importante la monotonía que la verificación de la cuota.

Otras dos propiedades interesantes son la *consistencia* y la *exactitud*. Que un método sea consistente significa que las partes proporcionales de una asignación deben ser proporcionales. Es decir, si en una elección en la que participan más de dos partidos, a los partidos A y B se les otorgan a_1 y a_2 escaños, respectivamente, entonces, si sólo hubiesen participado estos dos partidos y el número de escaños a asignar hubiese sido $a_1 + a_2$, la asignación debería ser la misma. La exactitud significa que si las cuotas son enteras el método de asignación debería dar como solución las mismas cuotas.

Balinski y Young demostraron también que si un método es exacto, monótono respecto a los votos, consistente, homogéneo y continuo respecto a los votos, debe ser necesariamente un método de divisores. De lo que se deduce que los métodos de divisores son los únicos candidatos razonables como métodos de asignación proporcional entera.

Dentro de los métodos de divisores, parecen especialmente interesantes los métodos basados en la familia paramétrica de funciones $r(s) = s + \mu$, donde μ es un número entre 0 y 1. Un análisis más a fondo de estos métodos puede hacerse introduciendo una noción de sesgo como medida de la tendencia sistemática a favorecer a unos partidos a costa de otros: grandes frente a pequeños, o viceversa. Se dice que un método de divisores basado en $r(s)$ es *insesgado* si fijada una asignación $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y un divisor d, la media de los vectores de votos $v = (v_1, \ldots, v_n)$ que dan por solución la asignación a con el divisor d es igual al vector $(da_1, \ldots, da_n)$, suponiendo que los votos v_i son cantidades aleatorias con distribución uniforme en el intervalo $[dr(a_i - 1), dr(a_i)]$, para $i = 1, \ldots, n$. Es decir, un método de divisores basado en $r(s)$ será insesgado si se cumple

$$a_i = \frac{r(a_i - 1) + r(a_i)}{2},$$

para cada $i = 1, \ldots, n$.

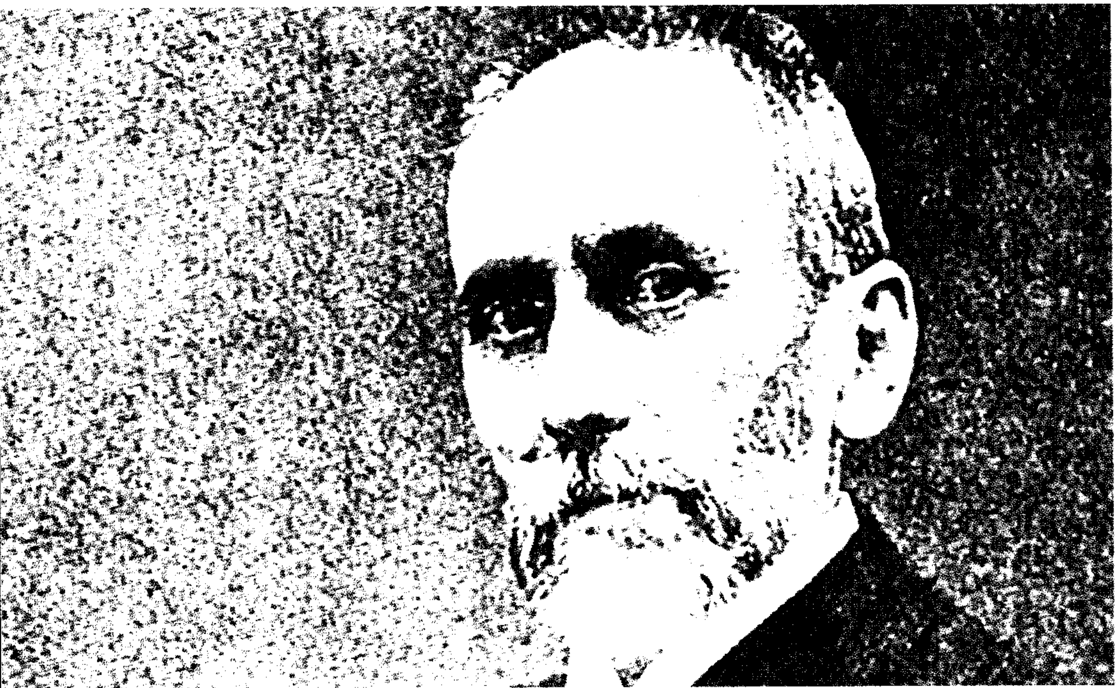
Puede demostrarse que el único método de divisores insesgado es el correspondiente a $r(s) = s + 0{,}5$. Por otra parte, si nos restringimos a los métodos de la forma $s + m$, si $m > 0{,}5$, el método es sesgado en favor de los partidos más votados y si $m < 0{,}5$ el método es sesgado en favor de los partidos menos votados.

En nuestro país, la elección del Congreso de los Diputados comporta dos problemas de asignación que se resuelven mediante métodos diferentes. Por un lado, la distribución de los escaños entre las provincias, dejando aparte Ceuta y Melilla y los dos escaños que automáticamente recibe cada una de las provincias, se hace mediante el método de los Restos Mayores. Por otra parte, la asignación de escaños a los partidos se efectúa mediante el método de d'Hondt, con una barrera inicial del 3% para participar. Como hemos visto el método de d'Hondt es el método de divisores asociado al redondeo hacia abajo. La utilización de este método insesgado que favorece a los grandes partidos se justifica por razones de estabilidad del sistema.

Un examen global de los resultados de las siete elecciones generales habidas en nuestro país muestra una baja proporcionalidad entre el número total de votos y el número total de escaños recibidos por cada partido. Si se suman las cuotas y los votos de cada circunscripción en las que se presenta cada partido, se observa que los partidos de ámbito autonómico reciben un número de escaños similar a su cuota, los dos partidos más votados de ámbito nacional reciben más de su cuota, el tercer partido de ámbito nacional recibe aproximadamente la mitad de los escaños que corresponden a su cuota y los restantes partidos de ámbito nacional tienden a desaparecer. Esta baja proporcionalidad no sólo se debe al método de d'Hondt sino principalmente a la existencia de muchas circunscripciones pequeñas. La combinación de estos dos factores puede dar lugar a situaciones paradójicas como que un partido tenga globalmente más votos pero menos diputados, como ha ocurrido recientemente en las elecciones de Catalunya.

En un interesante estudio publicado recientemente en el Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, Balinski y Ramírez proponen diversas modificaciones al sistema electoral español en el marco de la Constitución, con objeto de aumentar la proporcionalidad. Concretamente, estos autores sugieren aumentar el tamaño de la Cámara al máximo y asignar sólo un escaño inicial por provincia, repartiendo los otros mediante el método de St. Laguë. Además, como alternativa al método d'Hondt para repartir los escaños en función del número de votos, proponen el método de divisores basado en el redondeo $s+\frac{2}{3}$. Este método es el que favoreciendo a los partidos grandes, perjudica menos al tercer partido, suponiendo que a lo sumo tres partidos consigan representación. En efecto, puede demostrarse que $\frac{2}{3}$ es el valor mínimo de μ para el cual un método del tipo $s+\mu$ no prime el resto del tercer partido sobre los otros dos ni el resto del segundo partido sobre el del primero. Por otra parte, con este método el tercer partido obtiene un escaño siempre que su cuota supere el valor $\frac{2}{3}$.

En conclusión, la elección de un método de reparto es una decisión política ya que no existe ningún método óptimo, aunque las Matemáticas pueden ayudar a encontrar la solución que mejor se ajuste a unas circunstancias determinadas.



Ilustraciones:

Eduardo Torroja Caballé (Real Academia de Ciencias)
Julio Rey Pastor (Real Academia de Ciencias)

El sentido de la educación matemática y la orientación actual de nuestro sistema educativo

Miguel de Guzmán
Real Academia de Ciencias

De los tres objetivos de la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas* expresados en la Declaración de Río de Janeiro, dos de ellos se refieren muy explícitamente a la educación.

El segundo viene a afirmar que puesto que la Matemática es una clave muy fundamental para la comprensión del mundo y el desarrollo integral humano, resulta esencial que la cultura matemática, así como el acceso a la información científica, en particular matemática, sean bienes suficientemente compartidos por todos los países. Una educación y formación matemática bien diseñada en los diferentes niveles es un medio necesario para conseguirlo.

El tercer objetivo se refiere a la educación matemática de la sociedad en su conjunto. Se trata en el fondo de que la sociedad tenga una imagen cabal de lo que la Matemática ha representado y representa en el desarrollo integral de la humanidad. La presencia de la Matemática en la sociedad actualmente suele ser mucho más tenue de lo que debiera, y, por otra parte, suele aparecer distorsionada a través de falsos estereotipos relativos a su carácter, para muchos abstruso e inútil.

Esta visión contrasta fuertemente con lo que la matemática ha sido en muchas de las etapas más gloriosas de su larga historia. La Matemática, tal como la entendemos y practicamos hoy día, nació en la comunidad científico-religiosa de los pitagóricos, en el siglo VI a. de C., y fue concebida como una vía, un método, a través del cual el hombre pudiera asomarse a lo profundo del universo, a eso que los pitagóricos expresaban como «las raíces y fuentes de la naturaleza». En aquel tiempo, el quehacer matemático estaba muy lejos de ser la mera técnica rutinaria para dominar algunos aspectos de nuestro entorno físico en que en gran parte lo hemos convertido hoy. Lo que Pitágoras y los pitagóricos comenzaron a percibir en su contemplación matemática, y de ello fueron muy conscientes, eran las armonías más hondas presentes en la estructura misma de este universo en el que vivimos. Y en tal contemplación basaban su misma vida ética y religiosa.

Si el universo todo está construido de forma tan armoniosa como lo percibimos a través del conocimiento matemático, les resultaba claro que nuestra propia vida humana debería tratar de acomodarse a esa armonía, primero contemplándola, y después respetándola y favoreciéndola, tanto en sus aspectos físicos más externos como también en los más específicamente humanos, a través del respeto especial hacia los seres vivos, y muy en particular a través de las relaciones mutuas con los demás seres, tanto humanos como divinos. El quehacer matemático fue entre los pitagóricos en cierto modo una guía de contemplación y de comportamiento. Una buena lección de humanismo ecológico que lastimosamente hemos desaprovechado convirtiendo, en gran parte, la educación matemática en una rutina un tanto vacía en las aulas de formación de nuestros jóvenes, precisamente donde sería más necesario hacer uso de la capacidad formativa e integradora del quehacer matemático.

Es claro sin embargo que la Matemática ha sido también y debe seguir siendo, una ciencia en busca de la verdad, una herramienta que acude en ayuda de todas las otras ciencias y actividades del hombre, una actividad creadora de una belleza «sólo asequible a los ojos del alma», como decía Platón. Y para hacerse eficientes en estos aspectos de la Matemática es necesario, por supuesto, adquirir un dominio básico inicial de sus herramientas más básicas.

Esta visión amplia del quehacer matemático debería transformar la educación matemática de rival, en perpetua competencia con la educación humanística, como parece ser percibida por muchos, en el aliado educativo valioso que ha sido en el pensamiento y en la práctica de los más destacados pensadores de nuestra civilización. Estas facetas hondamente humanas de la Matemática son las que deberían hacer de ella uno de los grandes ejes de nuestro sistema educativo, si fuéramos capaces de preparar a nuestros profesores de los diversos niveles para tal tarea y de orientar convenientemente nuestros programas educativos.

Porque, por otra parte, la misma naturaleza del quehacer matemático es capaz de estimular algunos de los aspectos éticos importantes que una educación moderna debiera contemplar también como objetivos, tal como trataré de poner de manifiesto brevemente a continuación.

La raíz del carácter abarcante de la matemática incluso sobre los aspectos éticos de nuestro comportamiento está en su propia naturaleza. La Matemática es una exploración de ciertas estructuras omnipresentes y más o menos complejas que aparecen en nuestra realidad y que admiten ese acercamiento racional, manipulable mediante símbolos, que pone en nuestras manos un cierto dominio de la realidad a que se refieren y que llamamos matematización. La Matemática se acerca a la multiplicidad de las cosas y crea la Aritmética, se aproxima a la forma y se origina la Geometría, explora el propio símbolo surgido en la mente y nace el Álgebra, analiza los cambios y transformaciones en el espacio y en el tiempo y surge el Análisis Matemático...

En este quehacer el cometido de la mente humana consiste en interpretar racionalmente, lo mejor que puede, unas realidades, unos hechos que se le presentan como dados, como previos. Esto constituye una de las experiencias profundas que todo matemático vive en su tarea ordinaria: percibir que está siguiendo unas huellas que hasta cierto punto le están guiando en su trabajo. Este sometimiento a la verdad y a la realidad, que está normalmente tan enraizado en el científico, constituye sin duda uno de los rasgos importantes que deberíamos apreciar y estimular en todos nosotros. Y esta búsqueda de la verdad, de cómo es la situación, constituye uno de los rasgos típicos del científico, y muy en particular del matemático, para quien suele estar bastante más claro que para los demás científicos cuándo una situación es una hipótesis de trabajo y cuándo ha llegado a convertirse en una verdad incontrovertible. La aceptación gozosa de esta verdad, sea quien sea el que la haya encontrado y contradiga o no nuestras expectativas previas, es otro de los rasgos de generosidad que se dan en el trabajo matemático. El goce en la contemplación de la verdad y en la participación con otros de la belleza que suele resultar de su contemplación es el premio que el matemático recibe de esa actitud abierta y generosa.

El sentimiento de profunda humildad ante la multitud de verdades aún por descubrir es otra de las actitudes éticas importantes que la Matemática puede estimular. Newton lo expresó en bellas palabras: «No sé lo que la posteridad pensará de mí, pero a mí me parece haber sido solamente como un muchacho jugando a la orilla del mar y divirtiéndose al encontrar de vez en cuando un guijarro más suave o una concha más bonita que de ordinario mientras que el gran océano de la verdad yace sin descubrir ante mí».

El quehacer matemático nos hace sentir, más que en ninguna otra ciencia, cercanos a todos quienes trabajan con entusiasmo en la actualidad en nuestras mismas tareas y también a nuestros antecesores más lejanos. Los teoremas que fueron alcanzados por los babilonios o por los antiguos griegos siguen siendo tan válidos hoy como entonces. El trabajo matemático es tarea común y participada. Newton mismo decía: «Si algo he conseguido, es porque me he encaramado a hombros de gigantes». Por eso desde la matemática podemos aprender a percibir muy claramente esta responsabilidad común en hacer progresar nuestra cultura.

La Matemática se fundamenta en su mismo comienzo sobre el consenso. Sus propios inicios se llaman postulados, y las definiciones de los nuevos objetos que se van introduciendo también son convenciones. Sobre ellos se asienta la totalidad del edificio que vamos construyendo. La aceptación del consenso es otra de las actitudes importantes en nuestra sociedad que la matemática es capaz de fomentar.

La Matemática es consenso, es sometimiento a la realidad, pero es también, y de forma muy importante, libertad creativa. Como Georg Cantor, el creador de la Teoría de Conjuntos afirmaba solemnemente al comienzo del siglo XX, «la esencia de la Matemática es la libertad». Y es que, al igual que el artista que pretende expresar para los demás una vivencia, una visión muy especial que tiene, también el matemático dispone de muchos procedimientos posibles para hacerlo. La Matemática es, sin duda, descubrimiento, pero también creación libre, aventura.

Todo esto comporta un gran reto para un sistema educativo que pretende ser actual y eficiente. En mi opinión, que creo compartida por un gran segmento de la comunidad matemática española, existen muchos elementos en la actual estructura de nuestro sistema educativo que impiden que nuestros jóvenes reciban en su educación matemática los grandes beneficios que ésta les puede proporcionar. Enunciaré a continuación algunos que probablemente quedarán más explicitados en el transcurso de esta mesa redonda.

1. La formación en contenidos matemáticos y en métodos de didáctica propiamente matemática que en la actualidad reciben los profesores de enseñanza primaria, por diversos motivos, es insuficiente para su ejercicio posterior, incluso para desarrollar los relativamente pobres objetivos actuales, cuanto más para los que he señalado antes.

2. La formación de los profesores de enseñanza secundaria, y también la de los profesores de la enseñanza universitaria, fundamentalmente centrada en los contenidos y saberes propiamente matemáticos, omite muchos de los aspectos que tienen que ver con esa visión integral de la Matemática en la que ellos mismos deberían estar imbuidos y descuida los conocimientos y actitudes necesarios para hacerles capaces de estimular un correcto aprendizaje en sus alumnos.

3. El tiempo dedicado por nuestros estudiantes de los primeros niveles, primario y secundario, al estudio de la Matemática, es, en mi opinión, muy insuficiente. Estamos olvidando que los dos ejes sobre los que debe girar la formación actual de nuestros más jóvenes son la lengua y la matemática, como sucede en los países más avanzados científicamente de nuestro entorno. En Matemática, como disciplina claramente acumulativa, se necesita tiempo suficiente para la adquisición de las herramientas básicas. Sin un dominio satisfactorio de ellas es imposible llegar a apreciar su papel en nuestra cultura actual. Es muy deseable, para aprovechar el papel integrador de la Matemática, ir más allá de las meras consideraciones técnicas y rutinarias, pero es claro que sin un mínimo de conocimientos básicos nunca podremos conseguirlo. Aparte de que los elementos meramente rutinarios, en sí mismos, llegan a convertirse con el tiempo en un bagaje inútil.

4. La extensión de la educación obligatoria hasta los 16 años constituye claramente un progreso exigido por la sociedad y por el entorno en que nuestra sociedad está inmersa. Pero es patente que para realizar este cambio de manera satisfactoria no es suficiente aumentar o redistribuir el número de centros y de profesores, sino que es preciso efectuar una reforma mucho más radical de la organización del sistema secundario y de los programas mismos de estudio, con especial atención a la enorme heterogeneidad de alumnos, con intereses muy distintos, para quienes ni los programas ni los profesores actuales están preparados para atender.

En todos estos aspectos señalados la comparación de las estructuras educativas de nuestro país con las vigentes en otros países de nuestro entorno manifiesta claramente las carencias en que nos movemos. Con ello estamos poniendo en peligro, no sólo la eficacia de nuestro sistema educativo en la dirección correcta, es decir hacia la formación integral apropiada de nuestros jóvenes, sino también el desarrollo de las capacidades de nuestro potencial intelectual, industrial y tecnológico.

La enseñanza de las Matemáticas en España

Luis Balbuena Castellano
Instituto de Enseñanza Secundaria Viera y Clavijo (La Laguna)

Debo empezar agradeciendo al Congreso de los Diputados la oportunidad que me da para hablar de Matemáticas en su sede, en un año tan significativo como el 2000, que ha sido declarado *Año Mundial de las Matemáticas.*

En 1990 se aprueba en este mismo Parlamento, la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) con lo cual se culmina un proceso de experimentación de cambios en la educación no universitaria que se había iniciado en el curso 1983-84 y comienza, a su vez, con un nuevo marco legal, la Reforma educativa actualmente en marcha.

Con cierta frecuencia se oye decir a responsables educativos que el éxito de esta Reforma depende de la actitud que tome el profesorado. Y aunque es cierto que una actitud de rechazo por parte del profesorado podría significar su fracaso, el éxito no depende sólo de que éste tome una actitud positiva. Hay muchas más consideraciones que hacer y hay muchas más responsabilidades que compartir.

Lo que se expresará en las siguientes líneas es la opinión de un profesor de aula, en activo, que vive la Reforma desde el lado de su aplicación. Con esta óptica, lo que se diga no debe considerarse como verdad absoluta y puede que lo que se plantee como una situación problemática en mi entorno más inmediato, en otros lugares o en otros contextos, tal vez no lo sea.

Otra importante hipótesis de partida es que el autor de estas reflexiones comparte plenamente, tanto la necesidad de la Reforma como los grandes principios que la inspiran. En consecuencia, su visión no se corresponde con la de un detractor de la Ley, sino la de alguien que intenta aplicarla, que se encuentra con aspectos positivos y también con ciertas limitaciones que le impiden conseguirlo con éxito total. Así, por ejemplo, es muy positivo para la sociedad que la obligatoriedad se haya extendido hasta los 16 años. Igualmente lo es que la elección de opciones no se haga a una edad en la que la madurez y la formación son insuficientes. Está bien que el esfuerzo se centre no sólo en transmitir información sino que se trate de desarrollar capacidades y otras posibilidades. Es gratificante para el docente conseguir que sus alumnos descubran y desarrollen sus potencialidades disponiendo de los medios suficientes para que cada uno llegue hasta donde lo permitan sus posibilidades.

La Matemática, clave del desarrollo

Un argumento que se aporta para justificar que el año 2000 haya sido declarado por la UNESCO como *Año Mundial de las Matemáticas,* es que ésta es una disciplina que, entre otros efectos, influye directamente en el desarrollo científico y tecnológico de las naciones y, como consecuencia, en su desarrollo social y económico. Cabe deducir de este principio que, aquellos países que apuesten a medio o a largo plazo por su desarrollo científico y técnico, deberán primar los estudios de Matemáticas para que las sucesivas generaciones de estudiantes eleven su nivel de conocimientos en esta disciplina y, con ello, consigan acceder con mayor facilidad y seguridad a los estudios de esas áreas. De no ser así, seguirán teniendo una dependencia del exterior y no podrán acercarse a los niveles del legítimo desarrollo al que aspiran y contemplan en otros países que sí hicieron esa apuesta.

Lamentablemente, observamos cómo en nuestro país los hechos demuestran que navegamos en sentido contrario. No parece que lo que se pretenda sea conseguir o fomentar ese desarrollo a medio o a largo plazo. Incluso cabría pensar que podría perderse lo poco o mucho que se haya logrado hasta ahora. Una de las razones que se puede sostener para denunciar este lamento es que, en las dos últimas Reformas de la Enseñanza Secundaria, se ha pasado de impartir cuatro horas semanales en el Bachillerato Unificado y Polivalente de la Ley General de Educación de 1970 a tres horas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la LOGSE.

Lo anteriormente expresado contrasta con lo que se dice en el Informe a la UNESCO de la Comisión internacional sobre la educación para el siglo XXI, presidida por Jacques Delors, titulado *La educación encierra un tesoro:* «En los países donde no hay una enseñanza científica de calidad en el nivel secundario, el desarrollo de la capacidad científica nacional se encuentra en situación crítica, y es necesario resolver con urgencia este problema, en el propio país y mediante la cooperación regional».

Por otra parte, la reducción horaria tampoco parece estar en consonancia con las directrices metodológicas. Se pretende que el estudiante disponga de tiempo para poder acceder a los contenidos y a sus aplicaciones. Se propone el aprendizaje significativo y no centrarlo en una retahíla de algoritmos que resuelvan las rutinas. Pues bien, todo ese planteamiento correcto y asumible, requiere tiempo y no se comprende bien por qué, con esos principios, se procede a reducir el número de horas semanales. Una consecuencia inmediata de esta decisión es la dificultad con la que tropieza el profesor para poder desarrollar los currículos que, además, ha de adaptar a varios ritmos.

Enseñar Matemáticas no consiste sólo en enseñar algoritmos de cálculo o fórmulas de aplicación inmediata. Es mucho más que eso. Es estimular a los alumnos para que piensen, para que aprendan a realizar investigaciones adaptadas a su nivel; es enseñarles a utilizar su imaginación y su intuición; es ensayar y errar para corregir y aprender del error; es hacer conjeturas y discutir resultados con sus compañeros; se aprovecha también para enseñar a trabajar en equipo y a manejar bibliografía; hay que hacerles ver lo importante que es ir acumulando estrategias de resolución de problemas para que éstos sean cada vez más asequibles. Todos esos objetivos se pueden resumir en una sola frase: hay que enseñar Matemáticas consiguiendo que los alumnos aprendan a hacer Matemáticas. Si eso se consigue, el alumno terminará preparado no sólo para aprender más Matemáticas, sino que se le habrá dotado de estrategias para resolver también situaciones que se le presenten en su actividad cotidiana más allá de los estudios. ¿Y todo eso con tres horas a la semana?

Textos

En el reparto de responsabilidades sobre el desarrollo de la Reforma hay una importante cuota que corresponde a las empresas editoras de los libros de texto. Había mucha expectación sobre la forma en la que afrontarían este reto las editoriales. Pues bien, en mayor o en menor grado, lo que se ha hecho es reestructurar los textos que se utilizaban para el anterior sistema y, con ligeros retoques, se han ofrecido como textos para la nueva secundaria. Esta preocupación por el negocio y la despreocupación por las cuestiones metodológicas están teniendo una seria repercusión en el desarrollo de la Reforma. Se ha creado una sensación de angustia y de ansiedad en gran parte del profesorado al ir comprobando cómo sus alumnos, en general, no pueden seguir el ritmo que le marcan los libros. A esto hay que unir otro aspecto de especial trascendencia que veremos más adelante: el tratamiento de la diversidad.

La enseñanza y el aprendizaje de un concepto matemático no es una tarea fácil por muy sencillo que pueda parecer el concepto al profesor. Por eso, esta actividad debe ocupar la mayor parte del tiempo. Pero es que, además, la mencionada diversidad se muestra en estos momentos con toda su intensidad. Tendrá que elaborar estrategias adaptadas a los distintos niveles de desarrollo del grupo y, en general, esta diversidad no es contemplada en los libros de texto al uso.

El tratamiento de la diversidad

Es, sin duda, uno de los retos más fuertes que establece la Ley y también uno de los avances más significativos. La Reforma considera como un principio básico la individualización en el sentido de ofrecer a *todos* los alumnos la ayuda pedagógica que necesiten en función de su capacidad de aprendizaje, de sus motivaciones y de sus intereses. Recibir una enseñanza de calidad es un derecho y para que se pueda ejercer, se deben poner los medios necesarios. Téngase en cuenta, por otra parte, que esa ayuda ofrecida no ha de proporcionarse sólo a los menos capacitados, sino también a los que van por encima de la media, detalle éste al que no siempre se le presta toda la atención que requiere. Tanto unos como otros tienen una forma diferente y diferenciada de aprender, por lo que es muy importante conocerla para producir los medios adecuados y adaptados a cada caso.

Con la positiva generalización de la enseñanza obligatoria hasta los 16 años se ha producido una nueva situación en los Centros de Enseñanza Secundaria: la presencia de todos, sea cual sea su nivel de desarrollo. Se trata de una modificación esencial e insisto que positiva, que introduce esta Ley en relación con la situación anterior. Con la Reforma, además, los mismos profesores han pasado de impartir una enseñanza selectiva a otra comprensiva y básica.

Quizá en este punto convenga insistir en la idea de que el carácter comprensivo de este nivel de enseñanza incrementa la justicia social y por eso es bueno el planteamiento. Ahora bien, en la práctica diaria hay que estar alerta para que esta teórica justicia no se convierta en una injusticia al no ponerse los medios suficientes para que *todos* tengan las mismas posibilidades de promocionarse social y culturalmente y poder, con ello, llegar a ocupar puestos de responsabilidad de cualquier tipo en la sociedad.

No se puede decir que no se hiciese un esfuerzo por parte de las administraciones para orientar al profesorado y darle pautas para afrontar los retos de la Reforma. Se hicieron cursos pero, en general, siguieron unos planteamientos muy teóricos y bastante alejados de las aplicaciones prácticas que se demandaban por parte de los docentes. Esta deficiencia se manifiesta de manera especial en el tratamiento de la natural diversidad que ahora se produce. A la mayoría nos resulta extraño oír hablar de adaptabilidad progresiva, de diferenciación de los contenidos en función de los intereses, motivaciones, capacidades y ritmos de aprendizaje de los alumnos, etc.

Sin embargo hay que tener en cuenta que la Ley prevé la creación de los equipos de profesionales que han de resolver la problemática derivada de ese tratamiento. Los Departamentos de Orientación están creados desde 1995 y habrá que esperar que pronto se considere normal que hagan diagnósticos a los estudiantes para indicar cuál es el nivel que tienen y hacer así las adaptaciones necesarias. Pero esta positiva labor debe complementarse con la formación del profesorado para garantizar el éxito de ese tratamiento.

En Matemáticas, la adaptación a la diversidad se hace patente de una forma más sensible. Se trata de un conocimiento con unas peculiaridades especiales que influyen, de forma decidida, tanto en su enseñanza como en su aprendizaje. Podría ir desgranando ahora la necesidad de desarrollar ciertas capacidades (abstracción, deducción, etc.) para acceder al conocimiento matemático. Resulta que esas capacidades no se desarrollan de manera uniforme en todos los estudiantes. Cada uno tiene sus propios ritmos. Y no sólo eso, sino que, además, cada uno tiene tras de sí su propia historia académica. Unos han recibido una enseñanza con la que han conseguido los objetivos propuestos, mientras que otros no. Por todo ello es normal encontrarse en el aula con una marcada disparidad tanto de desarrollos de capacidades como de niveles de conocimientos.

A los anteriores aspectos hay que añadir otros de índole social, cultural y humana que también inciden en la creación de diversidad en el aula. Una diversidad que el profesor de Matemáticas, por ser profesor, no puede pasar por alto. No puede actuar como si sus alumnos fueran un conjunto de robots ajenos por completo a la problemática de su propia existencia. No se debe ser insensible ante un alumno triste o ante un alumno rebelde y no tratar de averiguar cuál es el origen de su tristeza o de su rebeldía. Y más en este período de su desarrollo en el que se está fraguando un proyecto humano para toda la vida.

La familia

Los profesores de aula podemos observar y comprobar la influencia de la familia, como institución, en la situación académica y humana de nuestros alumnos. En general, las familias suelen marcar diferencias. Al decir «familia» no tiene por qué entenderse el término en el sentido tradicional. Se trata del entorno de relaciones humanas que rodea al alumno una vez que deja el centro.

La familia estimula. Para ello basta con que exista una preocupación por la marcha de los estudios. No es imprescindible que se tenga formación académica para poder ayudarles y estimularles directamente en los estudios. Se trata de hacer preguntas sobre el centro, las disciplinas, los compañeros, los profesores, las actividades, los exámenes, los trabajos que se piden, etc.; en definitiva, que la familia «viva» sus estudios y no sólo reprima ante un bajo rendimiento sin entrar a analizar las causas que lo producen.

La familia debe conocer y transmitir el valor de la educación y las metas que con ello se pueden alcanzar. Sabemos que no es tarea fácil si se tiene en cuenta que la sociedad ha sido invadida por ciertos «valores» alejados de la cultura, fácilmente alcanzables y que tienen mucho que ver con el consumismo y la rápida fortuna.

Desde el punto de vista de las Matemáticas, el papel de la familia es especialmente importante. No saber muchas Matemáticas no es excusa para que deje de existir una preocupación por la marcha del alumno en esta disciplina. Hay formas de conseguirlo adaptables a las distintas situaciones. Afortunadamente, la mayor parte de la población que hoy tiene hijos en edad escolar han recibido formación académica. Por esta razón están suficientemente formados como para poder hacer un seguimiento de sus hijos, desde los primeros ciclos de enseñanza primaria. Es muy importante hacerlo para evitar que desconozcan los fundamentos de aritmética y geometría que figuran en los currículos.

Por desgracia no suele haber estimulación hacia las Matemáticas en las familias. Sin embargo, habría que empezar a trabajar para conseguir que la Ciencia, en general y las Matemáticas, en particular, pasaran a tomar parte de la cultura familiar como un tema más de conversación y de comunicación. Tal vez el año 2000, como *Año Mundial de las Matemáticas,* pueda significar el inicio de esa labor.

Tecnologías

Hay, por último, otro aspecto que no debo pasar por alto. Se trata de las tecnologías y su relación con la enseñanza de las Matemáticas.

Hacia 1970 empezaron a popularizarse las calculadoras. Las prestaciones eran cada vez más amplias y los precios más asequibles a cualquier economía. En todos los Congresos sobre Educación Matemática de esa época y de muchos años posteriores, era un tema estelar por cuanto que se presentaban muchas comunicaciones y concitaba enconados debates sobre si era o no conveniente el uso de las calculadoras en la clase de Matemáticas y, en el supuesto de que sí, desde qué edad y otras muchas consideraciones que en estos primeros momentos no se tenían nada claras. Poco a poco, la calculadora se fue abriendo su hueco en el aula y disminuyendo el número de detractores. Actualmente ya pocos discuten su bondad e incluso muchos libros de texto de Enseñanza Secundaria, señalan pautas para su uso.

Al mismo tiempo que la calculadora buscaba y encontraba su hueco en la enseñanza de las Matemáticas, se desarrollaba con una enorme fuerza todo lo relacionado con el ordenador y con la comunicación. Esta irrupción no ha sido ignorada por los encargados de planificar la educación. En distintos documentos hacen mención a ellos y se han emprendido programas para la implantación de estos medios en los centros. Los resultados prácticos han sido escasos pese al enorme esfuerzo desplegado tanto por las administraciones como por las personas que han estado al frente de esos programas. Y también conviene subrayar que el profesorado desplegó unas enormes dosis de voluntarismo a la hora de participar y de acogerse a esos programas.

No es necesario explicitar la incidencia que tienen estas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas. Pero si bien la calculadora ha permitido profundizar y simplificar el aprendizaje de ciertos temas (logaritmos, estadística, etc.), los ordenadores van a incidir de forma más directa y firme en la metodología. Algunos de los objetivos previstos por la Ley para ser alcanzados durante la Enseñanza Secundaria, no serán plenamente satisfechos si no se logra introducir el ordenador en el aula por todo lo que supone de potencia de cálculo, de manejo de la imagen y de acceso a la información.

Conclusión

Es evidente que por mucho que nos esforcemos será difícil –tal vez hasta imposible– que encontremos la «varita mágica» que resuelva todos los problemas que conlleva enseñar Matemáticas. Lo llevan intentando en otros países desde hace más de cien años y no lo han conseguido... Un trozo de «varita» puede estar logrado con la sola preocupación de que hay que mejorar, porque con ello estaremos sobre los problemas buscando alternativas y posibles soluciones. Es importante resaltar que aún no se ha inventado la metodología perfecta y universal que nos guíe a la hora de desarrollar los currículos. Existen muchas y de cada una debemos tomar aquello que nos parezca más adecuado a cada situación, a cada grupo y a cada alumno.

Tampoco creo que sea bueno tomar actitudes maniqueas y pensar que todo lo anterior era «malo» y «obsoleto» y por eso había que cambiarlo. Siempre hay aspectos que deben considerarse.

En cualquier caso y ante cualquier situación, el profesional de la docencia debe luchar para conseguir el mayor éxito en su trabajo y mantener siempre la ilusión y el esfuerzo del primer día. La Reforma hay que sacarla adelante y si en algo hay que modificarla, que sea nuestra práctica seria y entregada la que indique cuáles deben ser esos ajustes y que no se utilicen solamente criterios economicistas o políticos para determinarlos.

Retos actuales de la Educación Matemática en Secundaria

María Jesús Luelmo
Instituto de Educación Secundaria San Mateo (Madrid)

Presentación

La Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) ha introducido grandes cambios en la organización y en la vida cotidiana de los centros de Secundaria: nuevo alumnado, al ampliarse la edad de la escolarización obligatoria; nuevas materias, especialmente en el ámbito de las optativas; nuevo enfoque de las materias tradicionales, de acuerdo con los objetivos de la Ley; nuevas pautas de evaluación y promoción del alumnado; nuevos campos de actuación y nuevas tareas para el profesorado.

Simultáneamente a la implantación de la reforma que ha supuesto la LOGSE se están produciendo importantes cambios sociales en nuestro país, como son el descenso demográfico o la llegada masiva de inmigrantes a algunas zonas; también se detectan nuevas tendencias en valores y comportamientos, y un cambio importante en las estructuras y funciones de las familias.

Estos cambios sociales amplifican aún más los producidos por la reforma educativa. Puede imaginarse, por tanto, la transformación tan profunda que se está viviendo en las aulas, transformación que se afronta en muchos casos sin los medios humanos y materiales adecuados y que produce inquietud en un sector del profesorado.

Los profesores y profesoras de Matemáticas estamos viviendo este reto desde la sensibilidad especial que, tradicionalmente, hemos manifestado hacia los problemas de enseñanza-aprendizaje en nuestra materia; somos conscientes de la importancia de la misma en la educación de nuestro alumnado, pero también somos conscientes de sus dificultades específicas.

Precisamente por ello, desde hace dos décadas, el profesorado de Matemáticas comenzó a organizarse, buscando un marco que facilitara la mejora de la práctica diaria. Actualmente la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas cuenta con dieciséis Sociedades que cubren la casi totalidad del territorio español. La Federación, además de fomentar actividades de innovación, de intercambio de experiencias y de formación, ha canalizado las opiniones de sus socios y socias sobre aspectos muy variados de la enseñanza de nuestra materia, a través de la revista *Suma* o mediante la realización de numerosos encuentros monográficos.

Además de actuar en el ámbito escolar, la Federación desarrolla otras actividades con los fines de acercar las Matemáticas a la población y de cambiar su tradicional imagen poco atractiva, desde el convencimiento de que las Matemáticas pueden contribuir a formar personas más capaces y más críticas. Sus objetivos coinciden, pues, plenamente, con los del *Año Mundial de las Matemáticas,* para cuyo éxito trabajan codo con codo, y por primera vez en nuestro país, todas las instituciones del ámbito de las Matemáticas.

Deseo mostrar mi satisfacción y alegría porque el Parlamento español participe en la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas*. Y quiero agradecer la oportunidad que se me brinda de transmitir la opinión de un amplio sector del profesorado sobre algunas de las dificultades y las expectativas de la educación matemática en nuestro país.

Las Matemáticas en la Secundaria Obligatoria

Una de las grandes modificaciones del sistema educativo ha sido la de unificar los dos ciclos de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), impartiéndose en un mismo centro y con un mismo tipo de profesorado. Éste es un factor especialmente positivo para las Matemáticas, ya que en nuestra materia una buena secuencia y organización de los contenidos es muy importante para que alumnos y alumnas realicen un aprendizaje eficaz. Por tanto, las administraciones educativas deberían hacer un esfuerzo para que esta unificación se produjera cuanto antes y para todos los centros.

También es positivo que el alumnado esté en un mismo sistema de enseñanza hasta una edad en que, razonablemente, sus opciones académicas o profesionales son más conscientes. En edades tempranas estas opciones pueden venir determinadas, con más frecuencia de lo deseable, por un desarrollo intelectual más lento que el promedio, por una mala escolarización anterior o, simplemente, por la pertenencia a un medio desfavorecido social o económicamente. Aspectos importantes de las Matemáticas como son las capacidades de abstracción, de razonamiento, de formalización, incluso ideas matemáticas claves como la de fracción o la de proporción, están muy vinculadas al desarrollo cognitivo general de chicos y chicas, por lo que elecciones tempranas e irreversibles pueden frustrar talentos y desarrollos personales, además de ser socialmente injustas. Añadamos a esto que las Matemáticas juegan un papel de indicador general del éxito o fracaso escolar, a veces de forma no explícita.

Sin embargo, la permanencia en un mismo sistema escolar no debe convertirse en sinónimo de una enseñanza uniforme para todos. Precisamente, a mi juicio, otro de los aspectos positivos de la LOGSE es reconocer la existencia de una gran diversidad entre el alumnado. En Matemáticas esta diversidad puede llegar a ser, como se ha apuntado más arriba, muy alta, y el gran reto que se abre ante nosotros es que la escuela sea de verdad un lugar donde todos y todas aprendan y desarrollen al máximo sus capacidades. Lograr esto no es tarea fácil, pues requiere cambios de mentalidad en el profesorado y en la sociedad misma, donde está fuertemente arraigado el hábito de que la evaluación escolar se realice a través de los resultados obtenidos, sin prestar atención a la totalidad del proceso de adquisición. En este sentido son preocupantes las tendencias actuales a resucitar una especie de reválida o prueba externa al final de la ESO.

Los instrumentos para abordar la diversidad del alumnado vienen, teóricamente, previstos en la misma LOGSE, a través de un currículo que puede ser adaptado sucesivamente por las Comunidades Autónomas, los centros y el profesorado. En la práctica, la posibilidad de elegir en 4.º de la ESO entre dos opciones diferentes de Matemáticas, la existencia de los llamados «grupos de diversificación» o los de educación compensatoria, no cubren la atención a todos los casos. Por una parte, se necesitan adaptaciones más tempranas (incluso en Primaria), en ningún caso encasilladoras e irreversibles; por ejemplo, debería facilitarse desdoblar grupos en determinados momentos, prestar apoyo específico o realizar adaptaciones del currículo al alumnado que lo precise, pero para ello se requieren dotaciones adecuadas de profesorado, de materiales y cambios en la organización escolar. En paralelo es necesario desarrollar los llamados programas de «garantía social», contemplados como una forma de «diversidad radical» en la Ley, ya que en la práctica son una alternativa casi inexistente y muy desprestigiada.

Desde el punto de vista del currículo de Matemáticas, la LOGSE ha supuesto un cambio importante respecto del anterior. Se pretende de manera prioritaria, por primera vez en nuestra historia, facilitar a los jóvenes de este nivel el conocimiento de las Matemáticas necesarias para desenvolverse desde el punto de vista profesional, laboral o como simples ciudadanas y ciudadanos, en una sociedad cambiante en la que la presencia de las Matemáticas adopta manifestaciones cada día más diversas o completamente nuevas. Este hecho supone un cambio radical en la forma de contemplar tanto los contenidos como la manera de enseñar, ya que ni los unos ni la otra tiene como única guía, como sucedía hasta ahora, el éxito en los futuros estudios, sino proporcionar conocimientos reales (lo que hay que saber) y potenciales (prepararles para aprender cosas nuevas de forma autónoma) a la futura ciudadanía. Tampoco pueden obviarse las posibilidades que nos abren el uso de nuevas tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas, pues relativizan la importancia de ciertas destrezas muy arraigadas en la tradición escolar a la vez que abren campos de actuación antes insospechados.

El cambio en el currículo de Matemáticas ha supuesto un reto para buena parte del profesorado, que ha debido adecuar sus competencias profesionales. Hay sectores críticos con este cambio, ya sea porque mantienen posturas didácticas diferentes, ya sea porque reclaman directrices más claras y unificadoras. Sin embargo, otro sector se encuentra cómodo y valora positivamente la posibilidad de adecuar el currículo a sus circunstancias concretas. Bien es verdad que la escasez de materiales, salvo los que ofertan las editoriales comerciales, hace muy trabajoso al profesor o profesora desarrollar satisfactoriamente su programación. Sería muy interesante que las administraciones educativas estimulasen la publicación de modelos de calidad y suficientemente experimentados entre los que el profesorado pudiera elegir de acuerdo con sus circunstancias. También se precisa una mejor dotación de material manipulativo, informático y audiovisual.

Por último, un aspecto claramente insatisfactorio de la actual ordenación educativa es el número de horas lectivas asignadas a las Matemáticas, que no permiten a la mayoría del alumnado aprender satisfactoriamente lo previsto en las programaciones.

La formación profesional

Hasta el momento, la formación profesional prevista en la LOGSE no tiene el desarrollo suficiente para dar salida a los estudiantes que así lo deseen al finalizar bien sea la Secundaria Obligatoria bien sea el Bachillerato. Los módulos formativos de nivel 1 (a los que se puede acceder al final de la ESO) tienen un escaso prestigio social, y los de nivel 2, mejor considerados, ofertan un número aún más reducido de plazas.

Esta carencia tiene implicaciones muy negativas en el sistema escolar en su conjunto, pues sobrecarga el Bachillerato de alumnado poco motivado y, paradójicamente, hace que los enfoques de muchas materias, en especial de las Matemáticas, sean más académicos, pues la mayor parte del alumnado ve como único futuro posible seguir estudiando y acceder a la Universidad, opinión que comparten sus profesores. La conexión entre la ESO y el Bachillerato, ya de por sí delicada, se dificulta aún más.

En consecuencia, debería realizarse un gran esfuerzo de promoción de la Formación Profesional, haciéndola socialmente atractiva y acrecentando el número y variedad de plazas ofertadas.

Los Bachilleratos y el acceso a la Universidad

Los Bachilleratos merecerían, a mi juicio, una discusión especial en cuanto a su estructura y sus finalidades, discusión que excede los propósitos de este debate. Pero sí me gustaría hacer unas consideraciones respecto al enlace entre los Bachilleratos y la Universidad.

Coordinar la formación matemática entre estos dos tramos educativos es una tarea tremendamente compleja; nos falta aún un largo camino para abordarla de modo global con la participación de todos los sectores implicados. Por el momento, el engarce de hecho entre la Secundaria y la Universidad lo constituyen las PAU (pruebas de acceso a la Universidad) y las directrices que dan quienes las coordinan son el auténtico programa que sigue el profesorado de Bachillerato, pues desea, lógicamente, que sus alumnos y alumnas tengan éxito en ellas.

Pero la estructura de este tipo de pruebas puntuales –con tiempo limitado, alumnado procedente de muchos centros, corregidas por varias personas– invita, casi obliga, a proponer cuestiones «objetivas», poco susceptibles de diferentes interpretaciones. Así, de modo indirecto, se priman los aspectos más rutinarios de las Matemáticas, en detrimento de otros tan interesantes como las aplicaciones o la resolución de problemas.

A esto podemos añadir que en ocasiones los equipos de coordinación de las PAU interpretan los programas de los nuevos Bachilleratos desde una óptica bastante similar a la de los planes aún vigentes que están en vías de extinción, sin tener suficientemente en cuenta, a mi juicio, los cambios habidos tanto en el tipo de alumnado como en los objetivos y contenidos matemáticos de la Secundaria en su conjunto.

Conviene recordar el carácter de «prueba de madurez» para el alumnado que la LOGSE atribuye a las PAU, siendo competencia incluso de las administraciones educativas y no de las universidades. Sin embargo, se están utilizando de hecho como forma de selectividad, lo que está viciando su planteamiento original, sin cumplir tampoco de forma racional y eficaz esa función de selección para los distintos estudios. Es bien sabido, por ejemplo, que una parte del alumnado que accede a las licenciaturas de Matemáticas o Físicas lo hace con una nota escasamente superior al 5, nota que no les ha permitido entrar en otras carreras más solicitadas como Derecho o Económicas, con el consiguiente fracaso en los primeros años universitarios.

Es urgente, pues, iniciar un debate entre el profesorado de Matemáticas de Bachillerato y de Universidad y las administraciones educativas, para buscar modelos de acceso más racionales y acordes con los propósitos del Bachillerato.

Hacia un currículo de matemáticas dinámico

Todo currículo, a mi juicio, debe integrar la posibilidad de ser modificado gradualmente, de ser mejorado y adaptarlo a un entorno con perspectivas sociales y científicas cambiantes, sin necesidad de tener que esperar a grandes cambios estructurales del sistema educativo.

Un elemento importante para mejorar la educación matemática estriba en disponer de estudios serios que ayuden a conocer los resultados que produce, no sólo dentro de las aulas, sino también en las personas adultas que ya abandonaron el sistema escolar; y, por otra parte, que nos den una perspectiva a medio plazo de los usos profesionales, sociales y personales de las Matemáticas en la sociedad del siglo XXI.

Estos estudios son necesarios para mantener un currículo matemático vivo, accesible al alumnado, sensible a las necesidades de la ciudadanía e independiente de modas y vaivenes políticos. Sin embargo, ésta es una tarea que falta por acometer en nuestro país. Algunas pruebas que se han realizado para detectar el nivel matemático de nuestros estudiantes están siendo cuestionadas desde el punto de vista de su validez técnica, o se presentan a veces de forma sesgada para defender argumentos preconcebidos, como ha ocurrido con el informe internacional TIMSS (Third International Mathematics and Science Study) o algunos estudios del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación.

Desde el punto de vista de las necesidades matemáticas de la sociedad, carecemos de estudios significativos en nuestro ámbito cultural, teniendo como referencia más cercana los que se han hecho en países anglosajones. Precisamente en el Reino Unido, en 1977, fue el Parlamento quien pidió al gobierno un estudio amplio sobre la situación de la educación matemática, a la vista de los problemas observados. Se elaboró así el famoso *Informe Cokcroft*, consultando durante cerca de tres años a un amplio número de representantes de distintas profesiones, expertos en educación, matemáticos y profesores, con el propósito de detectar los elementos básicos de un currículo de Matemáticas y se dieron orientaciones sobre cómo llevarlo a la práctica.

Desde la convicción de que una educación matemática adecuada es de enorme importancia para el desarrollo de los países, pienso que sería muy conveniente que en España se hiciera algo similar al *Informe Cokcroft*. Para ello se podría contar con el concurso del Comité español del ICMI (International Commission on Mathematical Instruction, integrado en la Unión Matemática Internacional IMU), organismo en el que participa la práctica totalidad de las instituciones españolas relacionadas con la educación matemática. Sería una excelente manera de desarrollar los objetivos que la IMU y la UNESCO han señalado para este *Año Mundial de las Matemáticas*.

La enseñanza de las Matemáticas y la formación de los profesores

María Victoria Sánchez
Universidad de Sevilla

En los últimos años se han publicado algunos libros que han recogido diferentes aspectos de las prácticas escolares habituales en la década de los cuarenta. Quizás una de las causas de su aceptación sea debida a que estas prácticas se prolongaron bastantes años, de tal manera que muchos de los que ahora tenemos una cierta edad hemos visto reflejadas en dichas prácticas, en mayor o menor medida, nuestra propia experiencia. Sin embargo, coexistiendo con ellas, se iban produciendo una serie de cambios en nuestra sociedad, que iba pasando gradualmente de ser una sociedad industrial a una basada en la información, en la que la tecnología juega un papel fundamental.

Dado que los objetivos que las escuelas tratan de alcanzar son un reflejo de las demandas de la sociedad en la que están inmersas, en la sociedad industrial se trataba de proporcionar una preparación fundamentalmente en lectura, escritura y aritmética, para unos ciudadanos que, en su mayoría, iban a desempeñar un trabajo en el campo, fábricas o comercio, estando reservados los estudios avanzados para una minoría. Estas metas son claramente insatisfactorias para la sociedad actual en la que, junto con objetivos de carácter social, como puede ser la igualdad de oportunidades para todos los ciudadanos, se demandan, entre otros aspectos, los recursos matemáticos necesarios para desenvolverse en una sociedad tecnológicamente avanzada, lo que incluye la capacidad de razonar lógicamente, resolver problemas no rutinarios, comunicar ideas matemáticas, etc. Es evidente que todo esto requiere la creación de un currículo y de un entorno en el que tenga lugar la enseñanza y el aprendizaje de características muy diferentes a la práctica escolar inicialmente mencionada.

Como consecuencia, en numerosos países se iniciaron movimientos de reforma que pusieron de manifiesto la necesidad de adaptar las matemáticas escolares a esos objetivos. Dentro de la comunidad de educadores matemáticos se empezó a resaltar la necesidad de establecer cambios con relación al contenido matemático escolar, y a la forma en la que las matemáticas en la enseñanza obligatoria eran enseñadas y aprendidas. Todas estas aportaciones, que iban siendo recogidas en diferentes documentos, como el *Informe Cockcroft* en el

Reino Unido en 1985, o los *Estándares Curriculares y de Evaluación* publicados en EE.UU. por la National Council of Teachers of Mathematics en 1989, tuvieron su reflejo en las orientaciones curriculares oficiales de distintos países, entre ellos el nuestro.

En líneas generales, por citar algunos cambios significativos con relación a los contenidos que subyacen en mayor o menor medida en todos esos documentos, podemos apreciar cómo en ocasiones se produce una traslación en lo que se considera importante. Así, por ejemplo, en las operaciones y cálculos, frente a los cálculos complejos de lápiz y papel (evidentemente útiles para desenvolverse en una sociedad industrial) se destaca la importancia del significado de las operaciones, y el cálculo mental y la estimación (algo indispensable si se pretende, por ejemplo, decidir si el resultado de una operación proporcionado instantáneamente por una calculadora es adecuado o no). Aparecen en las matemáticas escolares contenidos nuevos, como la probabilidad y estadística, con especial atención a la recogida de información, organización de los datos e interpretación de los resultados (fundamental si se aspira a unos ciudadanos bien informados). Con relación a la resolución de problemas, disminuye la importancia del resultado frente al proceso seguido, colocándose el énfasis en las estrategias de resolución y el planteamiento de problemas abiertos, frente a la simple búsqueda de palabras «clave» (o la «lección» a la que los problemas corresponden) que permitan identificar la operación a ser utilizada. Además, se incluyen como contenidos matemáticos procesos tales como comunicar ideas matemáticas oralmente y por escrito, establecer conexiones y relaciones, razonar inductiva y deductivamente, etc. En otras palabras, «saber» matemáticas pasa a entenderse no como una acumulación de hechos y procedimientos, sino como la capacidad de «hacer» matemáticas, recomendándose el uso de calculadoras y ordenadores como herramientas que se pueden incorporar a ese quehacer matemático.

Pero, sin duda alguna, el mayor cambio experimentado está relacionado con la forma de entender cómo el proceso de construcción del conocimiento matemático se desarrolla en las aulas. Se asume que los alumnos crean este conocimiento a través de una actividad desarrollada con un fin, pasando de este modo a centrarse la atención no tanto en qué contenido hay que enseñar sino en la propia actividad generada en el proceso de resolución de la tarea planteada, entendiendo el aprendizaje como un proceso activo y constructivo.

Podríamos entrar a debatir si esta nueva cultura matemática escolar es un ideal al que aspirar o es algo real, que se quiere asumir. Podríamos discutir si un cambio hacia clases como comunidades en las que la evidencia y la lógica sean la fuente de verificación de los resultados (y no exclusivamente el profesor), donde tenga lugar el razonamiento matemático y se potencie, junto con la conjetura y la resolución de problemas, los procesos de conexión entre ideas matemáticas, no viéndose éstas como un cuerpo aislado de procedimientos, son un deseo de futuro más que la búsqueda de una realidad presente. También podríamos acudir a que todas estas manifestaciones son impensables en países como el nuestro (y mucho más si se trata de comunidades rurales o centros desfavorecidos). O que sólo son «palabras nuevas» para expresar «ideas viejas», a las que no hay que prestar demasiada atención (algo así como llamar segmento lúdico al recreo). Pero lo que no se puede negar es que de todo lo anteriormente mencionado emergen dos aspectos clave: en primer lugar, si se quiere cambiar algo en este sentido se necesitan profesores en los niveles obligatorios que dejen de ser meros transmisores de conocimientos, y que sean capaces, entre otras cosas, de seleccionar tareas matemáticas, establecer conexiones entre diferentes partes (o conceptos) de las Matemáticas, así como dentro de una misma parte, proporcionar oportunidades a todos los aprendices, organizar adecuadamente las clases. En segundo lugar, que el asumir estos cambios en la forma en que se caracteriza la enseñanza de las Matemáticas conlleva una nueva definición del trabajo del profesor y su papel en el aula. En esta situación, los profesores pasan a ser una figura clave en el cambio.

Ahora bien, el pretender que los profesores que van a enseñar Matemáticas asuman y desempeñen funciones y responsabilidades diferentes, y más variadas, que las desempeñadas hasta ahora determina un cambio en la caracterización de su papel en la enseñanza en general (y de las Matemáticas en particular), cambio que lleva asociada una mayor profesionalización. En este contexto, cabe plantearse: ¿cuál debe ser la formación (tanto inicial como permanente) de los profesores en relación con las Matemáticas que permita tanto a los futuros profesores como a los profesores en ejercicio realizar los cambios pretendidos? Dos son las referencias que pensamos hay que tener presentes en esta formación: el cambio en la cultura matemática escolar, al que hemos hecho referencia, y el papel de los conocimientos y creencias previas en la construcción del nuevo conocimiento. De estas referencias se derivan una serie de implicaciones. Entre ellas, el que los programas de formación de profesores deben capacitar a los futuros profesores para que sean capaces en su práctica de caracterizar esa nueva cultura matemática escolar, diferente de la que proceden como aprendices. Nos planteamos entonces *qué* debe conocer un profesor para abordar las nuevas situaciones y *cómo* puede acceder a ese conocimiento específico.

Los intentos de la Administración en el pasado de dotar a los profesores de ese conocimiento específico en relación con las Matemáticas no podemos decir que hayan sido demasiado fructíferos (basta con recordar el escaso impacto que ha tenido el Certificado de Aptitud Pedagógica, necesario desde los años setenta para impartir docencia en Secundaria, o la multitud de cursos desconectados que se han organizado para los docentes de Primaria y Secundaria en ejercicio, conduciéndoles en ocasiones a un mayor desánimo). Pero lo que queremos destacar es la poca atención que se prestó en todo momento a las investigaciones que se estaban desarrollando. Porque el tratar de dar respuesta a las preguntas anteriormente planteadas estaba siendo, y es, uno de los problemas objeto de investigación dentro de la Didáctica de las Matemáticas considerada como campo científico. Numerosos investigadores, tanto nacionales como extranjeros, han intentado identificar diferentes dominios de conocimiento específicos y caracterizar la forma en que el profesor hace uso de ese conocimiento en las situaciones de enseñanza de las Matemáticas, abordando el problema desde muy diversas perspectivas teóricas. Sus aportaciones nos han permitido identificar diferentes componentes del conocimiento base para la enseñanza que deberían tenerse en cuenta en los programas de formación, y de las que vamos a hacer un breve resumen. Por supuesto, nadie duda de que un profesor que va a impartir clase de Matemáticas tiene que saber Matemáticas, pero estas investigaciones han puesto de manifiesto que junto con un conocimiento de las mismas que incluye conceptos y procedimientos matemáticos, múltiples representaciones de esos conceptos, etc., se añade, entre otras cosas, un conocimiento de y sobre la actividad matemática, de la historia y epistemología de la disciplina y del currículo matemático escolar. También es necesario un conocimiento de los aprendices y de los procesos de aprendizaje, que le capacite para analizar los errores y dificultades; las aportaciones de los investigadores que se han centrado en el aprendizaje matemático han proporcionado información sobre esos procesos con relación a las características del aprendizaje de tópicos concretos, el propio aprendiz, la forma en que se estructura la información, el papel que desempeñan las representaciones, etc. Además, se incluye un conocimiento del proceso instructivo, que permita establecer objetivos, planificar, seleccionar y diseñar tareas matemáticas, valorar y evaluar el aprendizaje con relación a los objetivos matemáticos pretendidos, gestionar la interacción en el aula, etc.

Ahora bien, podríamos caer en el error de pensar que, ampliando y detallando esta lista tenemos ya los contenidos a impartir en un programa de formación inicial de profesores de

Matemáticas, y que con esto ya está todo resuelto. No es así. Dar respuesta al «cómo», es decir, a la forma que puede adoptar el proceso de acceso y generación de ese conocimiento necesario para la enseñanza, desde la perspectiva de que pueda fundamentar una determinada práctica, es algo mucho más complejo. Desde mi punto de vista, aprender a enseñar Matemáticas tiene lugar a través de procesos activos, en un contexto y ante una situación/tarea a la que estudiantes para profesores dotan de significado a través de sus referencias previas, y en la que ponen en funcionamiento los diferentes aspectos relacionados con los dominios anteriormente identificados, que son de este modo experimentados y perfeccionados. La integración de esos diferentes aspectos, que va configurando el conocimiento específico para la enseñanza de las Matemáticas, se origina cuando se inicia el proceso de transformación del conocimiento con el propósito de la enseñanza. En resumen, los procesos de formación de los profesores de Matemáticas deben articularse a través de la práctica, planteando situaciones/tareas relacionadas con los diferentes dominios, en las que se pueda compartir, discutir y negociar significados y, a partir de lo sucedido, reflexionar sobre el proceso seguido. Evidentemente, estas situaciones/tareas adquirirán características distintas si se piensa en la formación inicial o en la permanente. En esta última, las situaciones pueden adoptar la forma de casos surgidos de la propia práctica de los propios profesores.

Para concluir, queremos destacar que se debe prestar la máxima importancia a los procesos de desarrollo profesional y de aprender a enseñar. Si queremos que mejore la situación presente en la enseñanza de las Matemáticas en Primaria, Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato hay que abordar el problema de la formación permanente. No se trata de crear cursos inconexos, sino potenciar verdaderos programas de formación, que permitan plantear propuestas, validarlas en el aula, y reflexionar sobre el proceso seguido, creando un ciclo continuo que permita la construcción del nuevo conocimiento. Y si queremos que mejore la situación futura, en el caso de la formación inicial de los maestros, prestar atención a los nuevos planes de estudio, cuya articulación en líneas generales puede ser considerada como un ejemplo de algo realizado a espaldas de todas las consideraciones anteriores y en los que han disminuido drásticamente las horas dedicadas a la formación matemática. Basta considerar como ejemplo que en el Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de maestro, en la especialidad de Educación Primaria se asigna a esa formación ocho créditos (equivalentes a ochenta horas lectivas) en todo el plan de estudios, número de créditos incrementado escasamente en la concreción de estos planes en las diferentes universidades. Y es la especialidad que tiene más créditos dedicados a ella. Por otro lado, en la formación inicial de maestros es necesaria además una coordinación entre las diferentes materias del plan de estudios, entre sí y con el *practicum,* coherencia imprescindible si se pretende hablar de un programa de formación. Esto, junto con la ralentización en la puesta en marcha de un plan generalizado de formación inicial del Profesorado de Secundaria (necesidad reconocida expresamente en el artículo 24 de la LOGSE), hace pensar en una situación futura mucho peor que la actual.

Me voy a permitir terminar todo esto con una referencia personal. Mi abuelo fue durante toda su vida maestro en un pueblo muy pequeño. No puedo decir precisamente que se hiciese rico con su trabajo, pero la coherencia existente entre lo que la sociedad demandaba, sus propias experiencias y formación, y las expectativas de sus alumnos con relación a la utilidad de los conocimientos matemáticos adquiridos, lograron que se sintiese plenamente satisfecho de su labor, y que los pocos discípulos que aún viven recuerden todavía lo mucho que aprendieron de su maestro. Creo que la búsqueda de esta coherencia es algo que entre todos debemos intentar.

El desarrollo de la sociedad y las Matemáticas en la Universidad

Sebastià Xambó Descamps
Universitat Politècnica de Catalunya

Como matemático quiero primero expresar mi satisfacción, y me gustaría que este fuese el sentir de todos, por el hecho de que el Congreso de los Diputados reaccionara ante el *Año Mundial de las Matemáticas,* en el cual apenas hemos entrado, apoyando sus fines, primero con la correspondiente aprobación de la proposición no de ley, y ahora con la organización de esta *Jornada matemática.* Para las personas que de política no tenemos más noción que la transmitida por la televisión y los periódicos, este hecho resulta incluso sorprendente, ya que la fructificación de tales iniciativas sólo parece concebible si la vida parlamentaria ordinaria es más rica y matizada de lo que permiten inferir los medios de comunicación.

En todo caso es un deber congratular al Congreso de los Diputados, y a todas las personas que han hecho posible esta *Jornada,* aunque sólo fuese por el hecho de que, se sea consciente o no de ello, el tema de las Matemáticas, y su enseñanza a todos los niveles, es importante para la sociedad en general. Las iniciativas del Congreso reconocen implícitamente esta valoración, lo cual, por otra parte, está en línea con el segundo punto de la declaración de Río de Janeiro, esto es, con promulgar que *la matemática es una de las principales claves para el desarrollo.*

Esta afirmación adquiere sustancia sólo con recordar el papel que históricamente han jugado las Matemáticas en la Ciencia, particularmente la Física, y en la Técnica. Fue Galileo quien primero constató la importancia de este papel con una expresiva metáfora: «el libro de la naturaleza está escrito con caracteres matemáticos». Éste es sin duda el caso del extenso primer capítulo sobre la «naturaleza mecánica», que es la que escrutaba Galileo, y cuya importancia fundamental en la sociedad actual es visible por cualquiera, sea en el transporte, la industria, o los viajes interplanetarios.

La metáfora reapareció en el capítulo sobre la «naturaleza eléctrica», iniciado en el siglo pasado y cuya escritura ha proseguido con vigor creciente en el siglo XX. Es claro que la actual civilización no sería posible sin la comprensión y dominio de la Electricidad y el Magnetismo, a todas las escalas, y a su vez esta comprensión y dominio no serían posibles sin las Matemáticas.

A este papel instrumental de las Matemáticas hay que añadir un papel todavía más central que ha emergido paulatinamente en las últimas décadas con las nuevas tecnologías informáticas y de comunicación. Todos los análisis indican que nos dirigimos hacia un «mundo digital», un mundo en el cual el grueso de la economía estará formado por productos digitales y del cual tenemos ya indicios con los discos compactos, la telefonía móvil y la televisión digital. Ahora bien, esta digitalización masiva hacia la cual tiende el mundo es en buena parte un proceso matemático: la información digitalizada (incluyendo el dinero) de hecho no es más que números, y los tratamientos a los que hay que someter esta información para su transmisión, almacenamiento y uso no son más que operaciones matemáticas sobre dichos números. Más todavía, la garantía de que tales operaciones son seguras y eficientes es proporcionada por teoremas matemáticos cuyo descubrimiento y demostración no tuvo, por lo general, nada que ver con las aplicaciones.

En todo caso vivimos un momento histórico en el cual las Ciencias Físicas, la Tecnología y las Matemáticas convergen en un punto que hace posible objetos como el disco compacto o el teléfono móvil. El papel de las Matemáticas aquí no es sólo instrumental, sino una componente más de los sistemas. En los dos casos citados, por ejemplo, la calidad de su funcionamiento depende de modo crucial del uso de códigos autocorrectores, que son esquemas matemáticos de codificación y decodificación descubiertos en las últimas décadas y que permiten que la calidad de la música del disco compacto no se vea alterada de modo inaceptable por defectos de la superficie del disco o por su gradual deterioro con el uso.

El mundo digital al que nos hemos referido, distribuido en la red, es llamado «ciberespacio», y se habla abiertamente de su «colonización». Se habla también, más allá de la sociedad de la información, de la del conocimiento. Creo que este fenómeno ha de ser visto como una oportunidad histórica para un país como el nuestro en el que la tradición matemática no ha tenido la fuerza de la de otros países, pero que afortunadamente en el último cuarto de siglo ha despegado hasta alcanzar niveles internacionales muy respetables. Otros ya se están moviendo organizadamente, y no veo razón alguna para que aquí no podamos hacer lo mismo, para que no podamos dar los pasos adecuados para contar, en la sociedad del conocimiento, como quien más.

De acuerdo con lo expuesto, resulta claro que es importante para el país, sobre todo en lo que se refiere a su futura economía, que sea capaz de garantizar que el ciudadano corriente tenga unos conocimientos apropiados de Matemáticas (erradicar el anumerismo debiera ser el objetivo) y, al mismo tiempo, que el número y calidad de los matemáticos (junto con el de científicos e ingenieros), y de los medios a su disposición, sean suficientes.

Pero en las actuales circunstancias no parece fácil alcanzar plenamente estos objetivos. Si de un lado hay indicios fidedignos de que el crecimiento (al menos cuantitativo) de la investigación en Matemáticas ha sido espectacular, ya que actualmente España produce el 4% de los artículos en esta materia, y que la enseñanza en las facultades tiene muchos aspectos positivos, hay un buen número de dificultades y problemas diversos. Intentaré destacar unos pocos de los que me parecen más importantes, y sugerir, aunque sea de un modo muy preliminar y a título dialéctico, algunas de las ideas y líneas de trabajo que me parecen indispensables para poder avanzar en el sentido aludido.

Una primera cuestión es la preparación de los estudiantes que llegan a la Universidad. Este punto fue el foco, en el Reino Unido, del informe Howson encargado por la Sociedad Matemática de Londres, el Instituto de Matemáticas y sus Aplicaciones y la Real Sociedad de Estadística (*Tackling de Mathematical Problem*, 1995). No teniendo constancia de la existencia de un informe global sobre la misma cuestión en España, pero habiendo detectado ciertamente una preocupación general sobre el problema, son necesarios algunos comentarios.

En el caso del Reino Unido, se afirma que «los cambios recientes en la enseñanza de las Matemáticas en primaria y secundaria pueden haber sido ventajosos para algunos estudiantes, pero no han construido los fundamentos para mantener la cantidad y calidad de los matemáticamente competentes y han sido altamente desventajosos para todos los que han de continuar su educación matemática después de secundaria». Es bastante seguro que una buena parte de estas afirmaciones son aplicables a nuestro sistema educativo y que la actual situación favorece la tendencia a que lo sean.

Por ejemplo, parece ser que actualmente, al menos en algunas comunidades autónomas, hay más demanda que oferta para las plazas de enseñanza de las Matemáticas, de manera que un número significativo queda cubierto con especialistas de otras materias. Sea lo que fuere, quizá sería conveniente, para salir de dudas de un modo objetivo y lejos de cualquier apriorismo, que un grupo de trabajo cualificado pudiera delinear y formular con precisión cuál es nuestra situación real.

Las recomendaciones del informe Howson fueron que se creara una comisión encargada de presentar sintéticamente el estado de la educación matemática desde primaria hasta la Universidad y de asegurar directrices sólidas y adecuado apoyo a todas las personas que la imparten, o que están involucradas en su organización. Dicho grupo debiera asegurar que las diversas cuestiones sean debatidas abierta y extensamente por todos los sectores implicados. Además, el proceso para identificar representantes apropiados de la educación terciaria debiera incluir consultas a sociedades científicas y profesionales.

¿Se dan actualmente las condiciones para que una iniciativa de esta envergadura tenga sentido en nuestro país? Yo creo que sí, y que vale la pena examinarla con cuidado. Es difícil imaginar avances significativos sin un conocimiento detallado de nuestra realidad y de nuestros propios problemas.

Ahora quisiera hacer algunos comentarios sobre la cuestión de la matemática pura *versus* la matemática aplicada. No quisiera que mi posición a favor de explorar todas las posibles aplicaciones de las Matemáticas, y de que los esfuerzos en esta dirección aumenten sustancialmente en los años venideros, sea entendida como una oposición al desarrollo de la matemática pura. Más bien es al contrario: puesto que la historia nos muestra que las aplicaciones de las ideas matemáticas suelen aparecer mucho después de su desarrollo teórico, considero obligado que las Administraciones Públicas tengan siempre en cuenta este hecho en la distribución de los recursos y en la evaluación de los resultados. Con una visión meramente utilitaria y de corto alcance, los estudios del griego Apolonio sobre las secciones cónicas, que más de un milenio después fueron la llave que permitió a Kepler descubrir sus famosas leyes, se valorarían como irrelevantes; los trabajos de Galois sobre las condiciones de resolubilidad de las ecuaciones algebraicas, en los que se introdujeron los cuerpos finitos que en la actualidad se usan para la construcción efectiva de códigos autocorrectores, se habrían puesto de lado como simples disquisiciones teóricas; o los trabajos de Riemann sobre las ideas fundamentales que subyacen a la geometría, que sentaron, entre otras, las bases matemáticas de las teorías de Einstein, se hubieran tildado de meras especulaciones. El *tempo* de las ideas matemáticas suele ser, pues, mucho más largo que el de un mandato electoral o incluso que el de una o varias generaciones, y creo que para un país sería insensato ignorarlo a la hora de priorizar el destino de los recursos.

Otro aspecto que es preciso comentar es el del binomio docencia-investigación. En el estudio encargado por la Sociedad Matemática Americana con objeto de destilar recomendaciones útiles para la dirección de departamentos de Matemáticas en la próxima década (*Towards Excellence: Leading a Mathematics Department in the 21st Century*, 1999, referencia que agradezco a Manuel de León) se aboga por un perfil de departamento cuya misión incluya un compromiso de excelencia tanto en la investigación como en la docencia. Aunque el modelo en cuestión no es directamente transferible a nuestro entorno, algunas de sus características sí lo son, con todos los matices que se quiera.

De un lado se sigue afirmando que en la Universidad se ha de proseguir con la investigación de calidad. Pero es bien sabido que este empeño conlleva a menudo que la docencia sea considerada como un estorbo para la carrera investigadora y que, en consecuencia, su calidad sea baja en muchas ocasiones. La recomendación del informe es precisamente que esta tendencia se ha de invertir si se desea que el departamento sobreviva saludablemente a los cambios a medio y largo plazo.

Es de notar que por docencia se entiende no sólo la de las asignaturas de la licenciatura propiamente dicha, sino también las que se imparten en otros estudios (docencia externa) y las incluidas en los estudios propios para preparar a los estudiantes respecto de los empleos reales que van a encontrar. De hecho, se considera indispensable incluir en el plan docente una proporción equilibrada de los tres tipos de asignatura, ya que por lo general resulta ser la manera más asequible de concretar la necesaria contribución desde la docencia de las Matemáticas a la realización de la misión de la Universidad. Se insiste, además, que el mejor perfil del docente es el de un profesor con curiosidad intelectual sobre la enseñanza, con una dedicación apropiada a la misma, y que es además responsable de llevar adelante un buen programa de investigación.

Para promover la innovación en la docencia, pueden jugar un papel muy importante las nuevas tecnologías y a este fin convendría que todos los centros pudieran disponer de los medios apropiados. Hoy, por ejemplo, se puede impartir una clase, o una sesión de laboratorio, por medio de un videoproyector con el cual se presentan, según convenga, los conceptos y resultados matemáticos, en hypertexto y gráficos de alta calidad; o la expresión transparente de los algoritmos pertinentes, por medio de lenguajes de última generación; o la ejecución de los mismos *in situ*, invocando un programa apropiado. Pero en general el profesorado no dispone de estos medios, ni de una conexión a internet desde el aula, con lo cual ha de retroceder al sistema clásico de tiza y pizarra, o al proyector de transparencias como mucho.

En la innovación en materia de investigación considero que es muy importante que en los estudios de licenciatura se introduzcan elementos de iniciación a la investigación, ya que el inicio formal a estas tareas según los programas de doctorado ocurre a una edad que juzgo demasiado tardía. El modelo de Proyecto Tecnológico introducido en la Facultat de Matemàtiques i Estadística de la Universitat Politècnica de Catalunya es un paso positivo en la dirección indicada, ya que el estudiante que elige esta modalidad ha de presentar un proyecto, ha de desarrollarlo (bajo la supervisión de un tutor) y ha de redactar y defender una memoria sobre el trabajo realizado y los resultados conseguidos. Se obtiene así una preparación excelente, comparable a la del proyecto de fin de carrera de un ingeniero o un arquitecto, tanto para proseguir investigación en Matemáticas como para acceder a otros empleos. Pero posiblemente se debe ir más allá, no en el sentido de alargar o complicar el proyecto tecnológico, sino en el de fomentar el espíritu crítico y la actitud investigadora ante cualquier problema o situación.

La enseñanza de las Matemáticas en España: Conclusiones

Los componentes de la mesa redonda sobre la enseñanza de las Matemáticas en España, tras haber discutido internamente las ponencias presentadas por cada uno, han decidido unánimemente resaltar como prioritarios los tres puntos siguientes:

> La necesidad de cambios profundos en nuestra educación matemática en lo que respecta a los niveles obligatorios, con especial atención al tiempo de dedicación a la matemática y a la diversidad de intereses de los alumnos.
>
> La necesidad de efectuar importantes transformaciones en la preparación del profesorado de primaria y secundaria en lo que respecta a la formación relacionada con la matemática y su didáctica a fin de que nuestro sistema educativo pueda hacer frente con competencia a los cambios necesarios. Para ello será preciso estimular la investigación en educación matemática.
>
> La necesidad de establecer un amplio diálogo de la comunidad matemática con los diferentes agentes sociales a fin de llegar a acuerdos explícitos sobre las competencias básicas necesarias a la ciudadanía y sobre los modos de hacer posible que sean alcanzadas. Para ello será necesario que se cree un organismo adecuado o una comisión especial que apoye y estimule tal diálogo. Dicho organismo debería identificar asimismo los problemas que afectan a nuestra universidad en lo que se refiere a la docencia en el nivel superior y promover las medidas oportunas para su solución.

Miguel de Guzmán
Luis Balbuena
María Jesús Luelmo
María Victoria Sánchez
Sebastiá Xambó

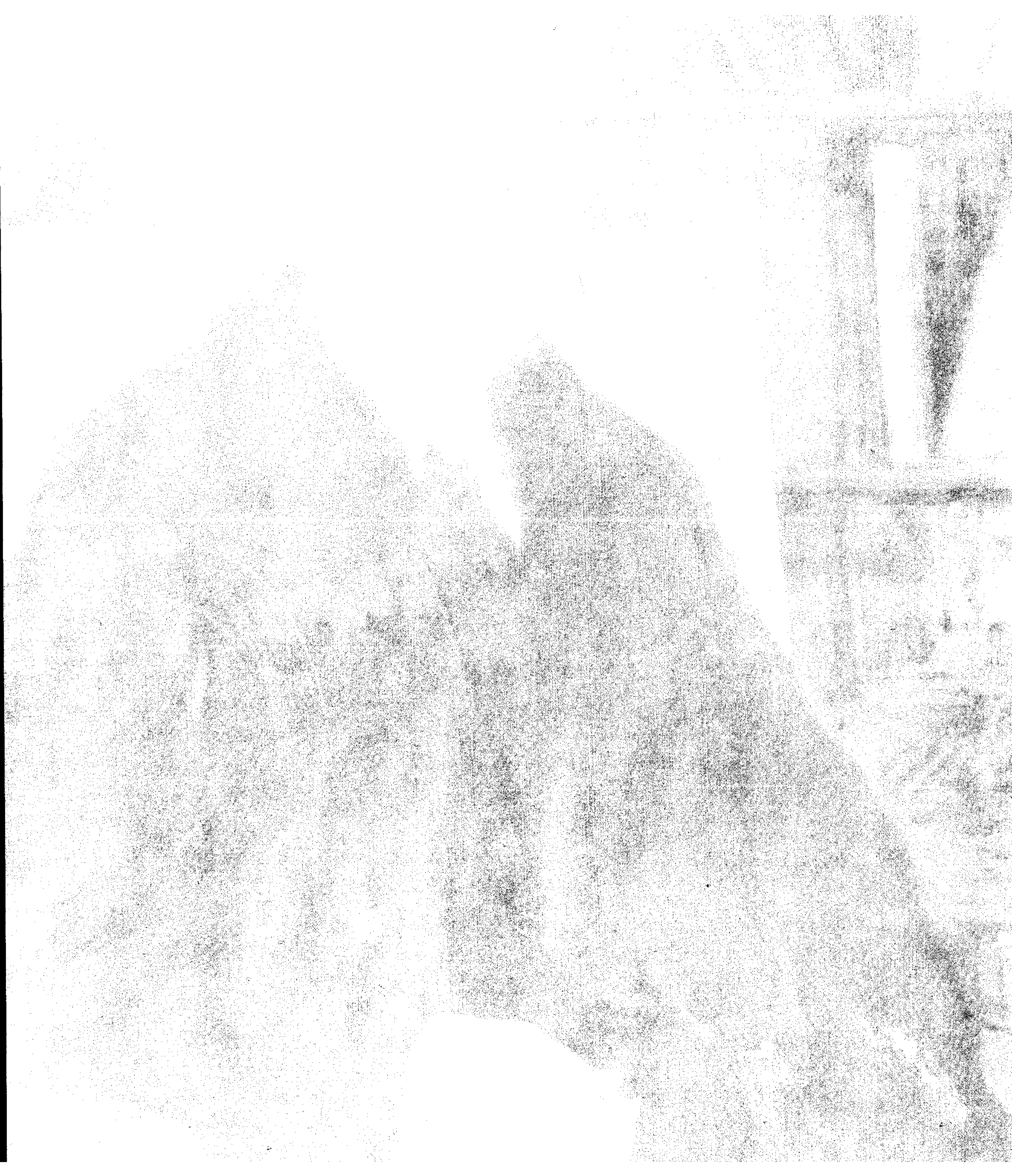


Ilustración:

José Echegaray y Eizaguirre (Real Academia de Ciencias)

José Echegaray y la Matemática como instrumento de regeneración

José Manuel Sánchez Ron
Universidad Autónoma de Madrid

José Echegaray y Eizaguirre (1832-1916) fue un personaje polifacético; ingeniero de Caminos, matemático, físico-matemático, divulgador científico, dramaturgo, economista y político, alcanzó en todas estas actividades renombre: número 1 de su promoción en la Escuela de Ingenieros de Caminos, más tarde profesor de Cálculo y Mecánica –y también de otras materias– en la misma Escuela, ministro primero de Fomento y de Hacienda después, ateneísta distinguido, figura prominente en la creación (con, esencialmente, las funciones que hoy desempeña) del Banco de España, académico de Ciencias y de la Española, presidente del Ateneo, del Consejo de Instrucción Pública, de la Junta del Catastro, de la Real Academia de Ciencias, de la Sociedad Española de Física y Química, de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, premio Nobel de Literatura (1904), catedrático de Física Matemática en la Universidad Central, o senador vitalicio, son títulos que ningún otro español, de su época, de antes o de después, ha conseguido reunir.

Y aunque la mayoría de los españoles de hoy lo ignore, fue la Matemática la gran pasión de Echegaray. Él mismo así lo señaló en su autobiografía (*Recuerdos,* 1913-1915):

> Las Matemáticas fueron, y son una de las grandes preocupaciones de mi vida; y si yo hubiera sido rico o lo fuera hoy, si no tuviera que ganar el pan de cada día con el trabajo diario, probablemente me hubiera marchado a una casa de campo muy alegre y muy confortable, y me hubiera dedicado exclusivamente al cultivo de las Ciencias Matemáticas. Ni más dramas, ni más argumentos terribles, ni más adulterios, ni más suicidios, ni más duelos, ni más pasiones desencadenadas, ni, sobre todo, más críticos; otras incógnitas y otras ecuaciones me hubieran preocupado.

Y por qué, podemos preguntarnos, no hizo aquello que más le gustaba. La razón es sencilla (y significativa para la situación de la matemática española de entonces). Tomemos de nuevo su palabra: «Pero el cultivo de las Altas Matemáticas no da lo bastante para vivir. El drama más desdichado, el crimen teatral más modesto, proporciona mucho más dinero que el más alto problema de cálculo integral; y la obligación es antes que la devoción, y la realidad se impone, y hay que dejar las Matemáticas para ir rellenando con ellas los huecos de descanso que el trabajo productivo deja de tiempo en tiempo».

Aun así, Echegaray contribuyó de manera notable a la matemática española. Citaré, en este sentido, de una nota necrológica, escrita tres días después del fallecimiento de Echegaray, a Zoel García de Galdeano (1916) (seguramente nadie mejor que él –fue otro de los que más hizo por la matemática hispana de aquella época– para apreciar realmente las contribuciones de su colega):

> Echegaray en matemáticas, no fue un Cauchy ni un Riemann, ni como estadista un Bismarck o un Metternich, ni como poeta un Petrarca o Dante o un Lope de Vega; pero aquéllos arriba citados respiraron un ambiente ya purificado por las corrientes ideales de ilustres predecesores. Un Cauchy tuvo por predecesores un Lagrange y un Laplace, como un Petrarca o un Calderón lo tuvieron en un Virgilio o en el bullicioso Aristófanes... y los actuales físicos y químicos los tuvieron, desde Pascal y Newton hasta Davy, Cavendish, Gay-Lussac y otros muchos eminentes guías, sobre cuyos resultados pudieron hacer progresar la Ciencia.
> Pero cuando Echegaray apareció como alumno brillante, excepcional y sin rival alguno en la Escuela de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, apenas en España se había constituido la segunda enseñanza bajo la ley de Moyano, ni la Real Academia de Ciencias, que por entonces se hallaba en estado embrionario, cuando ya las otras Reales Academias de San Petersburgo, de Berlín, de París y de Londres estaban pletóricas de los trabajos de Euler, de Gauss, de Lagrange, de Laplace y de otros muchos talentos.
> Echegaray llegó a un desierto azotado por el simoun de las luchas civiles, cuando el edificio nacional se hallaba en estado de equilibrio inestable, flotando bajo los más encontrados impulsos. Y desde este momento entró en la lucha por la vida, aromatizada no obstante por una invencible aspiración a los purísimos ideales de la Ciencia, como infatigable obrero que se propone roturar campos estériles, a fin de obtener con labor pertinaz, abundantes y sabrosos frutos.

Ingeniero de Caminos

En el mérito que le correspondió a Echegaray como pionero de la matemática moderna en España, una parte importante le corresponde al lugar en el que estudió: la Escuela de

Ingenieros de Caminos de Madrid, en la que la enseñanza matemática desempeñaba un papel muy importante, hecho éste que no era sino manifestación de la influencia que en las Escuelas especiales de Ingeniería españolas de la segunda mitad del siglo XIX ejercían las Escuelas Técnicas francesas, especialmente la École Centrale des Arts et Manufactures y la École Polytechnique, fundadas, respectivamente, en 1829 y 1794. Una influencia que se plasmaba, por otra parte, en que los libros de texto que estudió Echegaray durante su carrera fuesen casi exclusivamente franceses; sólo «por casualidad», recordó en sus memorias, «estudiábamos alguna Memoria en inglés, o alguna del alemán traducido al francés, y esto en los últimos años... El francés, y siempre el francés, y autores franceses dominaban en la Escuela de Caminos». Esta circunstancia muy probablemente servía los intereses de una enseñanza que pretendía formar ingenieros y no matemáticos que contribuyesen a hacer avanzar a la matemática, pero por otra parte los textos franceses utilizados no eran realmente obras modernas, propias del siglo XIX, un hecho éste que señaló Julio Rey Pastor en su discurso inaugural en la sección 1.ª (Ciencias Matemáticas) del Congreso de Valladolid de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, cuando manifestaba, revisando la situación de la Matemática en España a mediados del siglo pasado:

> Comienza por entonces la importación de obras francesas: los libros de Ciroddle, el Álgebra de Lefebure de Fourcy, la de Bourdon, la Geometría de Vincent, el Cálculo de Navier, el de Cournot..., obras anodinas todas, incapaces de inspirar amor á esta Ciencia en un país que nace á ella. Si alguna obra original existe entre los libros importados, como son los *Elementos* de Legendre, es del siglo XVIII; y todas, sin excepción, entran de lleno en esa canturria, si nos atenemos á su contenido, aunque lleven fecha posterior.
>
> Éstas eran las fuentes en que bebían nuestros antepasados, cuando Gauss, Abel y Cauchy habían renovado todo el Análisis; y habían nacido las Geometrías no euclidianas; y la Geometría proyectiva había llegado con Staudt á completa madurez; y Riemann había creado la moderna teoría de funciones; en una palabra, cuando ya había nacido, no solamente toda la Matemática que conocemos actualmente, sino muchas otras teorías.

El gran mérito de Echegaray sería el que contribuyó, más que ningún otro matemático de los años que van desde, aproximadamente, 1860 hasta 1890, a introducir en España algunas de las nuevas teorías a las que se refería Rey Pastor.

La España de la época en la que Echegaray finalizó sus estudios de Caminos (septiembre de 1853, el número 1 de su promoción), se puede caracterizar con bastante precisión sin más que recordar su primer destino: el distrito de Granada. Nada más llegar (en enero de 1854) a Granada fue enviado a Almería (se trasladó allí a caballo, ya que no existía ninguna carretera; tardó tres días), donde su trabajo consistía en conservar una carretera de cinco kilómetros y medio que había hasta Gador y vigilar la monótona prolongación de un muelle de escollera.

En la soledad de Almería, lejos de su familia y de sus amigos, una de las pocas distracciones accesibles para Echegaray era el estudio de la Matemática. Y allí se llevó, «entre otras, las... *Recherches Arithmétiques,* de Gauss; *La teoría de los números,* de Legendre, y la *Mecánica analítica,* de Lagrange».

No es sorprendente que Echegaray recordase con precisión cuando estudió estos tres tratados, obras fundamentales de la literatura matemática. En particular, las *Disquisitiones arithmeticae* que Carl Friedrich Gauss publicó en 1801, cuando únicamente tenía veinte años, es una obra cumbre de la matemática, con la que se abrió una nueva era en la teoría de los números. Hasta entonces ese apartado de la Matemática consistía de una serie de resultados aislados, por muy brillantes que fuesen; eso es lo que ocurría, por ejemplo, con el *Essai sur la théorie des nombres* (1798) de Adrien-Marie Legendre, otro de los tres libros estudiados por Echegaray en Almería. En las *Disquisitiones,* Gauss sistematizó y desarrolló la teoría existente entonces, clasificó los problemas a estudiar y los métodos de resolución conocidos, introduciendo al mismo tiempo otros nuevos. Uno de los aspectos más fascinantes de las *Disquisitiones* es el que contiene claros prototipos de las modernas demostraciones y conceptos algebraicos. Un ejemplo en este sentido es de la teoría de Gauss de las ecuaciones ciclotómicas («De aequationibus circuli sectiones definientibus»), que constituyó un paso importante en el desarrollo de la teoría de la resolución de ecuaciones algebraicas mediante la utilización del concepto de permutación. Ahora bien, como se sabe el uso del concepto de permutación en la investigación del problema de la solución de ecuaciones de grado mayor que cuatro fue una de las claves que llevó, a través de Cauchy, Abel y, sobre todo –ya lo veremos– Galois, a la Teoría de Grupos. Si recordamos ahora que una de las aportaciones más notables de Echegaray a la introducción de la Matemática moderna en España, lo constituye su obra *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois* (1897, 1898-1902), tenemos que hacia 1854 y mientras estudiaba las *Disquisitiones* de Gauss, Echegaray se estaba preparando para comprender la obra de Galois.

En cuanto a la *Mécanique analytique,* el libro que Joseph-Louis Lagrange publicó en 1788, basta con decir que constituye una de las obras cumbres de toda la historia de la física matemática, la disciplina a la que Echegaray consagró una buena parte de sus energías (recordemos que, como veremos más adelante, llegaría a ocupar la cátedra de Física matemática de la Universidad Central).

En Almería Echegaray pasó casi todo el año 1854, pero una infección palúdica le obligó a pedir una licencia. Regresó a Madrid para recuperarse, y en la capital de España recibió un nuevo destino: Palencia. No parece, sin embargo, que llegase a incorporarse a su nuevo destino; pronto fue llamado a la Escuela de Caminos como profesor. A partir de entonces, Madrid sería el centro de sus múltiples actividades.

Profesor en la Escuela de Caminos

El que Echegaray entrase a formar parte del claustro de la Escuela fue consecuencia, en cierta medida, de los acontecimientos políticos que tuvieron lugar durante aquel año (el pronunciamiento de 1854); se efectuaron bastantes cambios en la Administración y, en particular, salieron algunos profesores de la Escuela de Caminos para ocupar otros puestos; resultaron vacantes y Echegaray fue nombrado para ocupar una de ellas.

Ya profesor en la Escuela, no pasó mucho tiempo hasta que Echegaray publicase su primer libro: *Cálculo de Variaciones*. Esta obra surgió de sus clases de Cálculo diferencial e integral, para las que utilizaba como texto la obra de Cournot, *Teoría de las funciones y del cálculo infinitesimal* (1841). Uno de los temas que abordaba Echegaray en su curso era el del Cálculo de Variaciones, y resultó que los estudiantes no comprendían las explicaciones que el libro de Cournot dedicaba a este asunto. Sobre este punto, leemos en la introducción del libro de Echegaray (1858): «Sencillo en el fondo [el texto de Cournot]; pero fundándose en transformaciones y artificios de análisis, ingeniosísimos sin duda alguna, mas un tanto nuevos para el alumno que por vez primera estudia esta teoría, aparece á su vista con formas vagas, indecisas, que no acierta a comprender y á definir bien». Echegaray se empeñó entonces en «demostrarles que la cuestión, a pesar de los pesares, era elemental y sencilla, y en el fondo idéntica a los métodos empleados en los problemas ordinarios de máximos y mínimos».

Poco antes de la aparición del *Cálculo de variaciones* Echegaray había contraído matrimonio (el 16 de noviembre de 1857). Las nuevas obligaciones, a las que se sumó pronto una hija (y algún tiempo después un hijo), le llevaron a intentar conseguir ingresos suplementarios estableciendo una academia particular de matemáticas para preparar a los estudiantes de la Escuela, o a los que querían ingresar en ella. El éxito inicial que obtuvo se vio truncado por una disposición ministerial que declaraba incompatibles el simultanear la enseñanza privada y la pública. Intentó entonces Echegaray salir transitoriamente del Cuerpo, abandonando toda posición oficial, pero el Director de la Escuela, y después también el Director de Obras Públicas, le negaron el permiso, y él no se atrevió a dejar definitivamente el Cuerpo, solución a la que, por supuesto, podría haberse acogido. «Por ser un buen profesor, según ellos decían, se me cerraba el porvenir y se me condenaba a una decorosa miseria, encerrándome en mi cátedra como una gloriosa prisión y anticipada tumba», escribiría en sus *Recuerdos.*

Continuando con sus obras matemáticas, tenemos que en 1865 publicó sus colecciones de *Problemas de geometría plana* y *Problemas de geometría analítica en dos dimensiones,* que según el propio Echegaray le había solicitado un amigo de la infancia que tenía en Madrid una clase particular de Matemáticas. De nuevo, y en esta ocasión de forma todavía más acusada que con el *Cálculo de variaciones,* estos libros no aportaban nada nuevo a la Matemática practicada en España. Se trata de dos colecciones de problemas, bastante elementales, resueltos.

A pesar de todo este, en realidad escaso, bagaje científico, ese mismo año de 1865 (el 3 de abril) Echegaray era elegido miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, corporación que había sido creada pocos años antes: en febrero de 1847.

Académico de Ciencias

La propia elección de Echegaray como miembro de la Academia de Ciencias indica el escaso nivel científico que existía en la España de entonces (cuando menos, si medimos «desarrollo científico» en términos de «capacidad investigadora», o de contribuciones, aunque fuesen modestas, al avance de la ciencia). Ni siquiera se puede decir que Echegaray ya hubiese contribuido significativamente a introducir nuevas ideas matemáticas en España, aunque comenzaría a hacerlo inmediatamente (en el volumen XVI de la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales,* la revista de la Academia, correspondiente al año 1866, Echegaray comenzaba la publicación de su *Introducción a la Geometría superior*; una simple ojeada a ese volumen basta para comprobar que los dos artículos de Echegaray eran de los pocos debidos a un autor español; la gran mayoría de los artículos que componen ese tomo de la revista eran traducciones o noticias de trabajos de científicos extranjeros).

En 1865, cuando Echegaray fue elegido para la Academia, de las 35 medallas de la corporación (a las que hay que añadir la de Echegaray) 10 estaban ocupadas por ingenieros, 7 por militares, 5 por médicos, 3 por farmacéuticos, 2 por astrónomos, 2 por físicos, encontrándonos además con un, respectivamente, arquitecto, profesor de Agronomía, catedrático de Matemáticas, catedrático de Fitografía y de Geografía botánica, catedrático de Química, y un personaje polifacético, Vicente Vázquez Queipo. De todos estos, los únicos con alguna eminencia en ciencias físico-matemáticas eran: Juan de Cortázar, catedrático de Complementos de Algebra y de Geometría Analítica; Venancio González Valledor, catedrático de Física; Antonio Aguilar Vela, catedrático de Astronomía y director durante muchos años del Observatorio Astronómico, y Manuel Rico y Sinobas, catedrático de Física superior (todas las cátedras eran de la Universidad Central). En otras palabras, a pesar de que con nuestros criterios actuales no se pueda decir que Echegaray era un matemático realmente notable por los años sesenta, en la Academia de Ciencias no desentonaba en absoluto, probablemente todo lo contrario, si tenemos en cuenta el magnífico historial académico que podía exhibir.

La toma de posesión tuvo lugar el 11 de marzo de 1866 y su discurso de entrada versó sobre *La historia de las Matemáticas puras en nuestra España.*

El discurso de Echegaray es importante por el papel que ha desempeñado en la denominada «polémica de la ciencia española». Brevemente expuesta, la tesis que defendió Echegaray en su discurso es que mientras que España ha tenido grandes literatos, artistas, militares, músicos, filósofos, navegantes y conquistadores, jamás ha tenido un matemático de categoría: «la ciencia matemática», declaraba, «nada nos debe: no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que lábios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo». Analizando el discurso de Echegaray desde un punto de vista historiográfico, el problema es que el nuevo académico manejaba un concepto muy estrecho de Matemática; implícito en su exposición estaba el que Matemática era lo que habían producido, creado, hombres como Pitágoras, Tartaglia, Descartes, Newton, Leibniz, Monge, Lagrange, Abel, Cavalieri, Euler, De Moivre, Fourier, Jacobi, Cauchy, Gauss, Galois, o similares. Evidentemente, si la Matemática se pudiese reducir a tales términos, entonces se podría decir que, efectivamente, nunca hubo matemáticas en España, pero, naturalmente, la historia de una actividad, sea ésta la que sea, no se puede limitar a la historia de sus más distinguidos exponentes.

Otra limitación del discurso es la de su pobreza de datos históricos; el tratamiento de Echegaray fue el de un matemático familiarizado con los clásicos de su disciplina, pero que no mostraba ningún conocimiento especial de la historia de la matemática en España –el tema del que se suponía estaba hablando– más allá de que en ella nunca hubo un Newton, un Leibniz, o científicos de talla parecida. Éste sería uno de los puntos al que se acogerían los muchos que, a lo largo de los años, se pararon con ojo crítico ante el discurso de Echegaray. Entre ellos se encuentran: Felipe Picatoste (profesor de Matemáticas en el Instituto San Isidro de Madrid), Manuel de la Revilla, Marcelino Menéndez y Pelayo, José del Perojo, Gumersindo de Azcárate, Gumersindo Laverde, José Antonio Sánchez Pérez, Alejandro Pidal y Mon, Francisco Vera o Julio Rey Pastor.

Una dimensión básica del discurso de Echegaray es la política. En su intervención en la Academia, nuestro personaje iba mucho más allá de la propia ciencia matemática, insistiendo en que el problema de la ciencia española surgía de otras deficiencias nacionales, deficiencias que tenían que ver con la falta de libertad: España no podría tener ciencia, señalaba, mientras no se conquistase en ella «la libertad filosófica, que es la libertad del pensamiento», concluyendo con amargura que la historia de la ciencia que estaba repasando, no era, ni podía ser, la de una nación en la «no hubo más que látigo, hierro, sangre, braseros y humo».

Introducción de nuevas ideas matemáticas en España

Las obras matemáticas de Echegaray que he mencionado hasta el momento aportaban muy poco al panorama matemático español de la época en que aparecieron; eran, fundamentalmente, ayudas para el estudio de temas de ciertas asignaturas. Pero tras su entrada en la Academia, sus aportaciones a la Matemática cambiaron de cariz, hasta el punto de hacer exclamar a Rey Pastor (1915), tal vez algo exageradamente: «Para la Matemática española, el siglo XIX comienza en 1865, y comienza con Echegaray».

En realidad 1865 es mal punto de partida; mucho más adecuado es 1866, el año en que comenzó a publicar en la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* sus trabajos sobre la geometría superior, que aparecerían en forma de libro el año siguiente con el título de *Introducción a la Geometría superior* (1867). En esta obra Echegaray importaba a España el sistema geométrico de Michel Chasles, que por aquellos años gozaba de gran popularidad en Francia y que constituiría más tarde el punto de partida para la «revolución geométrica», como la denominó Rey Pastor, operada en España por obra de Eduardo Torroja, a la que también contribuyó, aunque con menos intensidad que Torroja y sus discípulos, Zoel García de Galdeano, y de la que bastantes años más tarde el joven Rey Pastor también participaría.

Después de su *Introducción a la Geometría superior,* Echegaray dio un nuevo paso en la introducción de nuevas teorías matemáticas en España con la publicación, en 1868, de su *Memoria sobre la teoría de las determinantes*. Una vez más, no se hacía demasiadas ilusiones con su libro, que se abre con la siguiente «Advertencia»: «Esta Memoria es un arreglo, y casi pudiera decir que una traducción libre de la parte elemental de la excelente obra del profesor Trudi. No conozco libro mejor escrito que el del profesor italiano: claridad, método, exactitud, todo lo reúne, y lo más á que puedo aspirar es á que en mi trabajo se refleje algo de las brillantes cualidades del original».

La teoría de los determinantes, el más inmediato predecesor de la teoría de los invaginares, fue concebida originariamente por Leibniz, mejorada, entre otros, por Vandermonde en el siglo XVIII y por Cauchy en el XIX, y perfeccionada finalmente por Jacobi y Hesse. El libro de Echegaray –en el que aparte de Trudi no se menciona a ningún otro matemático– constituye una exposición muy completa y clara de –como él mismo reconocía– las partes elementales de la teoría de los determinantes, un instrumento tan útil para la física, la matemática y la ingeniería que ya hace mucho tiempo que se estudia en los primeros cursos de esas carreras. Cumplió Echegaray, por consiguiente, una importante función, pero limitándose a lo más esencial; dejando al margen, por ejemplo, los resultados sobre divisores elementales que James Sylvester había obtenido en 1851, y que entroncaban directamente con la teoría de invariantes (en este caso de formas cuadráticas) que sería una de las áreas de investigación matemática preferentes a finales del siglo pasado y comienzos del presente (recuérdense, en este sentido, los nombres de Cayley, el mismo Sylvester, Gordan, Clebsch, o Max Noether).

Político y dramaturgo

Hasta ahora he estado refiriéndome básicamente al Echegaray ingeniero y matemático, pero no es posible continuar sin mencionar otras facetas de su personalidad, otros intereses que coparon durante mucho tiempo gran parte de sus energías y que, aunque dan a su figura un inmenso atractivo, contribuyeron a limitar severamente sus aportaciones a las ciencias físico-matemáticas, aunque también dan una dimensión más completa, más cívica e integral, a su personalidad. Amaba la matemática, sin duda, pero ello no significaba que ignorase sus responsabilidades como ciudadano.

Ya desde su regreso a Madrid procedente de Almería, Echegaray había comenzado a interesarse por temas alejados, al menos en principio, de las ciencias exactas. Así, entró en círculos dedicados a la economía política, defendiendo las ideas de la doctrina librecambista frente al proteccionismo imperante. En unión de Gabriel Rodríguez fundó *El Economista,* revista en la que escribió numerosos artículos, iniciando de esta manera una actividad periodística que no abandonaría a lo largo de toda su vida. Asimismo, participó en el establecimiento, en abril de 1850, de la Asociación para la Reforma de los Aranceles, actividad que le llevó a pronunciar discursos en las tribunas públicas de la Bolsa y el Ateneo.

Al llegar la revolución de septiembre de 1868, «La Gloriosa» o «Septembrina», entró de lleno en política. «Yo era», escribió en sus *Recuerdos,* «revolucionario, pero teórico; y en la práctica, un revolucionario pacífico, que jamás tomó parte activa en ninguna conspiración ni en ningún trastorno... Amaba la revolución, porque amaba la democracia, en la región de las ideas; porque estaba profundamente convencido de que, en cuanto triunfasen en España la democracia y la revolución, el país forzosamente había de transformarse, o, por mejor decir, había de regenerarse». Echegaray fue, como vemos, un regeneracionista temprano, bastante antes que esta corriente se extendiese en España, en, habría que decir, la España finisecular.

Poco después de constituido el primer Gobierno, presidido por Prim, Manuel Ruiz Zorrilla, ministro de Fomento, nombró a Echegaray –que de los tres grandes partidos políticos de entonces, el Progresista, el de la Unión Liberal y el Demócrata, pertenecía a este último– director de Obras Públicas, Agricultura, Industria y Comercio; es decir, de todas las Direcciones del Ministerio de Fomento reunidas en una, con la excepción de la Dirección de Instrucción Pública. En las Cortes Constituyentes, que habían de dar a España (el 6 de junio) la Constitución de 1869, fue diputado por Asturias, y no sólo eso, pronto entró en el Gobierno ocupando la cartera de Fomento, de la que tomó posesión el 15 de julio de 1869 y en la que permaneció hasta comienzos de 1871, cuando Amadeo de Saboya, Amadeo I de España, llegó a España (Echegaray fue uno de los que le recibieron en Cartagena). Sin embargo, no tardaría demasiado en volver a desempeñar la misma cartera: en el verano de 1872 entró en el que había de ser el último Gobierno del hijo de Víctor Manuel, Gobierno presidido por Ruiz Zorrilla, y en diciembre del mismo año pasó a ocupar la cartera de Hacienda.

A raíz de la abdicación, en febrero de 1873, de Amadeo, a quien el asesinato de Prim (el 28 de diciembre de 1870) había privado de su principal valedor, el poder legal quedó en las Cortes, que se constituyeron en Asamblea Nacional. Esta Asamblea fue la que proclamó, el 11 de febrero de 1873 y por 258 votos contra 32, la Primera República española. Cuando en junio se reunieron las Cortes Constituyentes, con mayoría de republicanos federales, se nombró una comisión permanente de la que también formaba parte Echegaray. Precisamente por su participación en aquella comisión Echegaray se vio obligado, en la confusión y conflictos de aquellos meses y por motivos de seguridad, a abandonar España. Marchó a París, en donde permanecería seis meses. Fue allí en donde escribió *El libro talonario,* una comedia de un acto que se estrenó, con Echegaray ya otra vez en Madrid, en la primavera de 1874, y que significó el inició de su carrera como dramaturgo.

Después del golpe de Estado –el 3 de enero de 1874– del general Pavía, que llevaría a la disolución de la Primera República, el general Serrano ocupó la jefatura del ejecutivo y Echegaray fue nombrado ministro de Hacienda en representación del partido radical. A los tres meses, sin embargo, dejó la cartera. Poco tiempo, pero en su haber hay que señalar un logro importante: el dar al Banco de España estructura de banco nacional; en particular el concederle el monopolio de emisión de dinero. De los propósitos de Echegaray cuando procedió a tal «recreación» (con la que, incidentalmente, traicionaba sus antiguos ideales librecambistas) dan idea los siguientes párrafos de la parte expositiva del correspondiente decreto (de 19 de marzo de 1874), en el que no puede pasar desapercibida la vena literaria de su autor: «abatido el crédito por el abuso, agotados los impuestos por vicios administrativos, esterilizada la amortización por el momento, forzoso es acudir a otros medios para consolidar la deuda flotante y para sostener los enormes gastos de la guerra... En tan críticas circunstancias... el ministro que suscribe se propone crear un Banco Nacional, nueva potencia financiera que venga en ayuda de la Hacienda Pública».

Una vez fuera del Gobierno, se dedicó cada vez con mayor intensidad al teatro, pero nunca abandonó la política y el mundo que la rodeaba por completo. En 1876, todavía boyante su espíritu progresista, figuró entre los socios accionistas fundadores de la Institución Libre de Enseñanza. Firmó, junto con Martos, Salmerón y otros, el manifiesto del 1 de abril de 1880, del que nació el partido republicano progresista. También fue durante algunas legislaturas diputado por el distrito de Quintanar de la Orden. Asimismo, fue senador vitalicio, presidente del Consejo de Instrucción Pública y, en 1908, director de la Compañía Arrendataria de Tabacos y Timbre.

Más matemáticas

Una de las facetas de Echegaray que más admiración produce es la de su capacidad de simultanear su afición por la matemática con otros intereses. A pesar de que su vida sufrió un cambio radical a partir de 1868, continuó estudiando y efectuando contribuciones al conocimiento de la Matemática en España. Una de esas contribuciones (en realidad varias, ya que inicialmente fueron artículos en la *Revista de los Progresos de las Ciencias,* volúmenes XXI y XXII) fue la monografía que publicó en 1887: *Disertaciones matemáticas sobre la cuadratura del círculo. El método de Wantzel y la división de la circunferencia en partes iguales.*

Uno de los pocos problemas cuya fama ha salido del dominio de la matemática, digamos profesionales, ha sido el de la cuadratura del círculo; más concretamente, el de si es posible o no llevar a cabo tal cuadratura. Este problema fue el que abordó Echegaray en la publicación que acabo de citar.

Cuando se intenta precisar la fecha exacta en que llegó a España la demostración de la imposibilidad de la cuadratura del círculo, se observa que antes de 1886 se encomia por todos la dificultad de la cuadratura, que se consideraba como «descomunal empresa», en palabras de Miguel Merino (1885), doctor en Exactas, director del Observatorio de Madrid y académico de Ciencias. Así, nada menos que en el Anuario de la Academia de Ciencias de Madrid se afirmaba en 1885 que, desgraciadamente, no era posible «tomar resolución alguna que aparte la turba de los cuadradores del círculo», como habían hecho algunas corporaciones extranjeras, teniéndose que resignar «á examinar con paciencia cuantas singularidades se les ocurra presentar». «Nos encontramos tan atrasados –señalaba otro académico, esta vez nada menos que Eduardo Saavedra (1885)– que en realidad no se puede contestar en nombre de la Ciencia, que cierto número de investigaciones sea totalmente absurdo».

Ésta era la situación cuando Echegaray publicó un artículo, «Sobre la imposibilidad de la cuadratura del círculo», en el volumen correspondiente (el XXI) a 1886 de la *Revista de los Progresos de las Ciencias,* el artículo que abre la obra *Disertaciones matemáticas.* En esta obra, en la que con un conocimiento imperfecto Echegaray reconstruyó la demostración de Ferdinand Lindemann de 1882, dando de verdad, acaso por primera vez, talla de matemático. A pesar de no haber podido acceder al artículo de Lindemann, no fue la suya una contribución original (jamás fue un matemático original, creativo), pero no importa, se había acercado más que nunca a las investigaciones de la matemática contemporánea. Es comprensible, aunque un tanto exagerado, por consiguiente, que Julio Rey Pastor exclamase en el discurso inaugural que pronunció en el V Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1915): «en todas las regiones de la Ciencia... a cada idea o hecho nuevo, corresponde una fecha y un nombre propio; como á cada nueva estrella y á cada cometa, va inseparablemente unido el nombre de su descubridor en los cielos. En la esfera mucho más modesta de la historia científica de un país, le corresponden también dos coordenadas geográficas que determinan su introducción en él; y en este ejemplo, son: una fecha, 1886, y un nombre: Echegaray».

Echegaray, el Ateneo y la teoría de Galois

La siguiente obra matemática importante de Echegaray me obliga a efectuar algunos comentarios sobre una institución con la que, como ya apunté antes, estuvo ligado: el Ateneo Científico y Literario de Madrid. Fundado –con 329 socios– en 1835, el Ateneo era una Sociedad científica, literaria y artística con el triple carácter de Academia, Escuela de Estudios Superiores y Círculo Literario (de hecho también se constituyó en una de las principales tribunas de la vida política española). Como Academia inicialmente se dividió en tres secciones, pasando en 1884 a cuatro: Ciencias Morales y Políticas, Ciencias Naturales, Ciencias Matemáticas y Literatura y Bellas Artes (en 1894 se aumentaron hasta seis). En estas secciones se leían y discutían trabajos considerados de interés y actualidad por los ateneístas. Echegaray, un ateneísta destacado, participó tanto en los debates políticos y culturales que se celebraron allí, como en cursos que se organizaron.

Una de las funciones del Ateneo fue la de actuar como Escuela de Estudios Superiores. Muchos de los personajes más prestigiosos de España, en la ciencia, las letras y las artes explicaron temas avanzados en las aulas del Ateneo, especialmente a finales del siglo XIX. Personajes como Leopoldo Alas, Adolfo Álvarez Buylla, Gumersindo Azcárate, Ignacio Bolívar, José Canalejas, Manuel Bartolomé Cossío, Joaquín Costa, Zoel García Galdeano, Eduardo Hinojosa, José Marvá, Marcelino Menéndez y Pelayo, Ramón Menéndez Pidal, el propio Moret, Emilia Pardo Bazán, Santiago Ramón y Cajal, José Rodríguez Carracido, José Rodríguez Mourelo, Eduardo Saavedra y Luis Simarro, aparte, naturalmente, de Echegaray.

Echegaray fue uno de los que comenzaron a dictar cursos al abrirse la Escuela. Como tema eligió el de «Resolución de las ecuaciones de grado superior y teoría de Galois». En aquel curso (1896-1897) el interés que despertó la iniciativa fue considerable, registrándose cifras de matrícula muy elevadas: el más numeroso fue el curso de Emilia Pardo Bazán, para el que se apuntaron ¡825 personas!, pero también nos encontramos con que a los cursos de, por ejemplo, Cajal, Simarro, o Gumersindo de Azcárate asistieron, respectivamente, 221, 167 y 243 alumnos. En cuanto al curso de Echegaray, la matrícula fue 122 (cifra increíblemente alta, dada la temática abordada), y el número de lecciones dictadas 21.

El siguiente año (1897-1898), Echegaray continuó con el mismo tema, aunque la cifra de estudiantes con que contó fue ya más razonable: 32, siendo 23 las lecciones dictadas (en general todos los cursos vieron reducidos drásticamente el número de asistentes). El año siguiente (1898-1899) el interés se apagó considerablemente, y no sólo en número de alumnos, sino también en cursos impartidos (16 frente a 28 el año anterior). Esa vez Echegaray varió de tema, abordando el de «Estudio de las funciones elípticas» (tuvo 24 alumnos y dio 14 clases), con el que prosiguió el curso siguiente. De hecho, Echegaray continuó ostentando una cátedra en la Escuela Superior del Ateneo todos los años hasta el curso 1904-1905, este último año eligiendo el tema de «Ecuaciones diferenciales en general y, en particular, las lineales»; a partir de entonces sus cursos, como nuevo catedrático de Física matemática, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, absorberían sus energías didácticas.

En al menos una ocasión Echegaray (un artículo titulado «Notas sobre ecuaciones diferenciales», publicado en 1904 en la *Revista de la Academia de Ciencias*) se refirió a sus cursos en el Ateneo, mencionando algo del carácter que les quiso dar, así como de su contenido:

Hace bastantes años, que vengo explicando en el Ateneo de Madrid y en las clases de estudios superiores, una serie de lecciones sobre teorías matemáticas, que son al mismo tiempo de altas matemáticas, y de propaganda.

De altas matemáticas, porque en dichas lecciones me ocupo, en problemas de orden superior; y de propaganda, porque parto siempre de los conocimientos que pueden adquirir los jóvenes en nuestras Universidades y en nuestras escuelas especiales.

Es un trabajo, por decirlo así, de transición, entre lo elemental y lo más elevado de la Ciencia.

En esta serie de cursos, he explicado las materias siguientes: la teoría de las substituciones y los métodos de Galois; las funciones elípticas, desde los trabajos de Legendre hasta los métodos modernos de Weierstrass; la teoría de las funciones abelianas; y en el curso anterior, empecé el estudio de la integración de ecuaciones diferenciales, ocupándome únicamente en el de la ecuación $(dy/dx) = X(x,y)$.

El problema de la resolución algebraica de ecuaciones figura entre los más antiguos de la Matemática. Desde los inicios del álgebra moderna se desarrollaron varios métodos para resolver ecuaciones de hasta cuarto grado (los trabajos de, entre otros, Diofanto, Tartaglia, Cardano, Ferrari, Descartes, Gauss, o Vandermonde), pero tales procedimientos, en general aislados entre sí y basados en artificios de cálculo, difícilmente podían ser considerados como constituyentes de una teoría. Más profundas, si no por los problemas que resolvieron en una primera instancia, sí por los caminos que abrieron, fueron las ideas y contribuciones de Lagrange. A lo más que pudo llegar el gran matemático francés fue a argumentar que la solución de ecuaciones generales de grado superior a 4 ($n > 4$) mediante operaciones algebraicas era probablemente imposible. No obstante el poco éxito conseguido por Lagrange en respuestas terminantes, el método que empleó iluminó los motivos por los cuales se podía resolver el problema para $n < 4$ y $n = 4$ y no para $n > 4$; tal contribución fue importante para Abel y Galois. Además, la idea de Lagrange de que se debe considerar el número de valores que toma una función racional cuando se permutan sus variables, conduciría posteriormente a la teoría de los grupos de permutación o sustitución.

Sería Niels Henrik Abel, «el Newton del Norte» como le denominó Echegaray en 1905, quien demostraría que es imposible resolver algebraicamente, por radicales, las ecuaciones generales de quinto grado. Buscando cuáles son las ecuaciones particulares susceptibles de ese tipo de resolución, Abel (1829) obtuvo, asimismo, una clase de ecuaciones que hoy llevan, a propuesta de Kronecker, su nombre: abelianas.

Los resultados de Abel no fueron sino el preludio de unos descubrimientos más importantes para la teoría de la resolución de ecuaciones, descubrimientos que asentarían esa teoría sobre una base definitiva. Me estoy refiriendo a la obra de Evariste Galois.

Lo que Galois se propuso fue el desarrollar la teoría general de las ecuaciones algebraicas que pueden ser resueltas por medio de ecuaciones auxiliares de grado menor. Galois (1846) se dio cuenta, y éste es el punto capital de sus investigaciones, de que este difícil problema está regido en cada caso particular por un cierto grupo de sustituciones, en el cual se reflejan las propiedades más importantes de la ecuación algebraica considerada. Este descubrimiento, que los sucesores de Galois, y en particular Camille Jordan (1870), esclarecerían y desarrollarían, tiene consecuencias que afectan a un área más vasta de la matemática que la teoría de resolución de ecuaciones. Como señaló Sophus Lie (1895): «El gran alcance de la obra de Galois se deriva de este hecho: que su teoría, tan original, de las ecuaciones algebraicas es una aplicación sistemática de dos nociones fundamentales como son la de grupo e invariante... la noción de invariante es evidente en los trabajos de Vandermonde, Lagrange, Gauss, Ampère y Cauchy. Por el contrario, es Galois el primero, me parece, que introdujo la idea de grupo; y en todo caso, él es el primer matemático que ha profundizado en las relaciones existentes entre las ideas de grupo y de invariante».

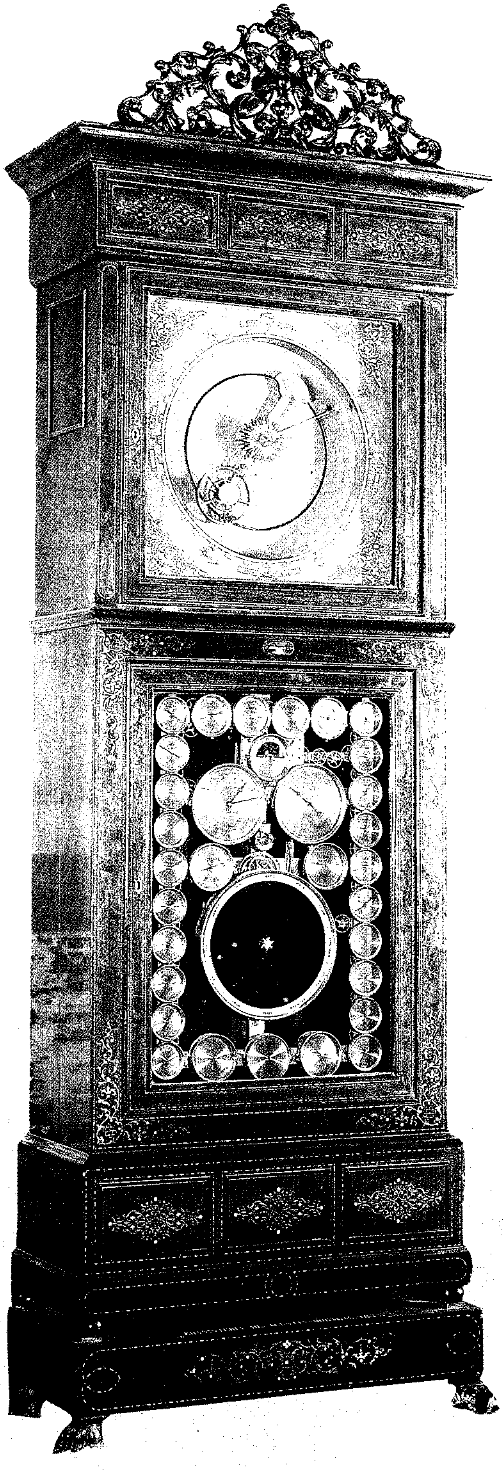
En ningún otro lugar Echegaray llegó a alturas matemáticas comparables. Se enfrentó con una de las teorías más difíciles de la matemática del siglo XIX, con notable retraso, es verdad (Liouville publicó en su *Journal* los trabajos de Galois en 1846, esto es, medio siglo antes de que tuviese lugar el curso del Ateneo; de todas maneras, una medida temporal más adecuada es el año de la publicación del *Traité des substitutions* de Jordan: 1870), pero, y a pesar de las indudables simplificaciones en que incurrió al desarrollar las correspondientes demostraciones, lo hizo con indudable dignidad y dando al mismo tiempo una lección de ambición científica a sus, en general, mucho más jóvenes colegas.

Echegaray y la Física matemática

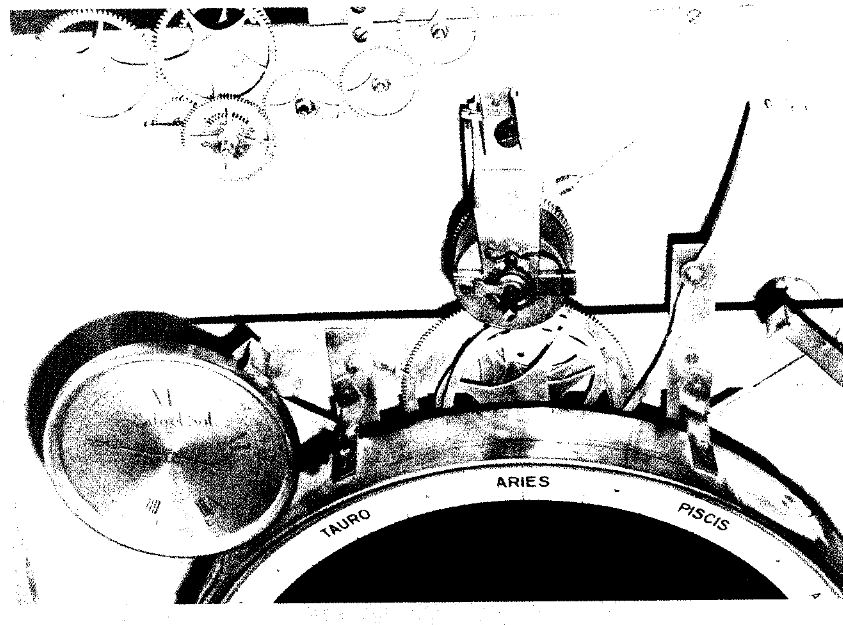
Un vistazo a la lista de publicaciones de Echegaray basta para comprobar que la Física figuró de manera prominente entre los intereses científicos de nuestro protagonista. Desde luego, y al igual que en Matemática, pero en este caso de manera todavía más acusada, Echegaray fue simplemente un expositor de teorías desarrolladas por otros; él nunca contribuyó con investigaciones propias que estuviesen siquiera medianamente estructuradas. Más aún, en Física Echegaray fue plena, y a veces patéticamente, un hombre del siglo XIX, pero del siglo XIX que sólo con extrema dificultad, pocas veces y de manera incompleta, pudo ver más allá de la imagen clásica, newtoniana (a lo sumo electromagnética) de la naturaleza.

Su producción en Física abarca una gran cantidad de artículos de divulgación, y libros como *Tratado elemental de Termodinámica* (1868), *Teoría matemática de la luz* (1871) y los diez tomos de *Física matemática,* que corresponden a los cursos que de esa materia dictó en la Universidad Central como catedrático de la asignatura (la cátedra la obtuvo Echegaray en 1905, al pedir la jubilación su anterior ocupante, Francisco de Paula Rojas, como un homenaje del Gobierno a quien el año anterior había obtenido el premio Nobel de Literatura).

Desde el año académico 1905-1906 hasta el 1914-1915 desarrolló Echegaray en la Facultad de Ciencias el curso de Física matemática. A pesar de su indudable interés y de que constituyó el esfuerzo docente más importante realizado en Física matemática en España, no parece que cambiase radicalmente, incluso en modo alguno, la situación en que se encontraba esa rama de la física y de la matemática en nuestro país; la Física que se hizo en España durante la primera mitad del siglo XX fue, a lo sumo, Física experimental. No obstante, Echegaray dejó en aquellos diez tomos, en sus 4.412 páginas, el testimonio de su saber y voluntad docente; más aún, de su pasión por el conocimiento. El historiador de la Física no puede sino emocionarse contemplando el esfuerzo de un hombre que comenzó sus clases con 73 años, y que produjo un auténtico monumento a la física del siglo XIX, a una física que pretendió dar acomodo en su estructura y principios a la avalancha de nuevos fenómenos que desde finales del XIX se venían observando, pero que, finalmente, perdió, clara e irrevocablemente, la partida frente a una Física nueva, la de la Relatividad y la Mecánica Cuántica, una Física que Echegaray vislumbró, y a la que ocasionalmente se refirió, pero que le superó totalmente.




TAURO
PISCIS
GEMINIS
ACUARIO
CANCER
CAPRICORNIO
LEO
SAGITARIO


ARIES
TAURO
PISCIS

Ilustraciones:

Reloj astronómico de Alberto Billeter, 1857

El reloj, en dos cuerpos, ofrece en su frente el sistema solar, en el que se reproduce la órbita de la Tierra en su ciclo actual. Abajo, un gran rectángulo comprende 26 esferas: semanario, diario, meses, años, segundero, tiempo medio, ecuación del tiempo, salida del Sol, puesta del Sol, planetario (con diez planetas), termómetro, lugrómetro, barómetro y la hora de veinte capitales del mundo (Palacio del Congreso de los Diputados)

Matemáticas y política

Joan Marcet i Morera
Vicepresidente del Congreso de los Diputados

«A Robert, como a otras muchas personas, no le gustan las matemáticas, porque no acaba de comprenderlas. Pero una noche sueña con un pequeño demonio que pretende iniciarlo en la ciencia de los números. Naturalmente, Robert piensa que es otra de sus frecuentes pesadillas, pero en realidad es el comienzo de un recorrido nuevo y apasionante a través del mundo de las matemáticas».

Este fragmento de la contraportada del excelente libro del filósofo alemán Hans Magnus Enzensberger *El demonio de los números,* nos ilustra sobre los miedos y la fascinación de esta ciencia, de la «ciencia» por excelencia que son las Matemáticas.

Para un jurista y constitucionalista, como es mi caso, que siempre se ha acercado a las Matemáticas con una mezcla de temor y de respeto y admiración, especialmente hacia aquellos que la practican como ciencia, éstas se nos antojan como algo lejano y distante. Aparentemente poco tiene que ver la ciencia jurídica y la lógica matemática.

Y algo parecido ocurre con la política. Tampoco parece que exista conexión alguna entre Matemáticas y política, más allá de algunos buenos matemáticos que se ha dedicado también a la política.

Pero entre derecho, política y matemáticas existen elementos de contacto y de proximidad, aunque sean simples conexiones temporales en su desarrollo o utilizaciones instrumentales de éstas en la praxis de las primeras.

La mayor parte de los ideales políticos modernos, como la justicia, la libertad, el régimen constitucional y el respeto al derecho, o cuando menos sus definiciones, comenzaron con la reflexión de los pensadores griegos sobre las instituciones de la ciudad-estado. Los conceptos de democracia y de ley están ligados, de manera armónica o disonante, a los mismos filósofos que desarrollaron la Matemática en la Grecia clásica. Baste recordar que las ideas políticas de Pitágoras o Heráclito no reflejan el racionalismo organizador que sus filosofías parecen postular. Así, Pitágoras, el hombre de las armonías de los números, en política es ingenuamente el defensor de las leyes de los antepasados; y Heráclito, filósofo del logos, justifica indiferentemente la emulación fecunda o la tiranía. Sin embargo, ambos colocan en el centro de su reflexión la lucha contra la anarquía e intentan legitimar la ley. Aunque sea desde postulados conservadores, ambos hacen corresponder la ley, como principio organizador de la sociedad, con los principios que, en sus metafísicas, son organizadores del mundo: la armonía o inteligencia.

El «no tenemos más amo que la ley» como principio democrático descrito por Herotodo –a quien se atribuye la utilización por primera vez del concepto de democracia–, se añadirá más tarde la máxima aristotélica de que «no hay orden concebible fuera de la ley».

La democracia, como término oficial que designa el estado político que prevalece en Atenas durante el siglo de Pericles, y que implica igualdad política, cierta igualdad social, gobierno del pueblo y primacía de la ley, toma cuerpo en el ámbito de una cultura basada en la razón y en la cual, desde Tales en el 600 a.C. hasta Euclides en el 300 a.C. se desarrollan las Matemáticas como disciplina científica que exige la justificación racional de las afirmaciones.

No parece que desde la relación existente durante la Grecia clásica hasta nuestros días se mantenga una clara conexión entre pensamiento matemático y política aunque es evidente y conocido el influjo del pensamiento filosófico en el acontecer y desarrollo político a lo largo de la histórica. Desde el *De República* de Cicerón al *Proyecto de paz perpetua* de Kant. Desde los influyentes postulados de Hobbes y Locke en la construcción del Estado moderno hasta las reflexiones y aportaciones de Habermas, Rawis y otros pensadores en el debate contemporáneo sobre la libertad y la justicia.

Quizá vale la pena destacar, en este contexto, una de las más interesantes direcciones en el desarrollo del pensamiento político contemporáneo: la que lleva a un creciente empleo para el estudio de la política de modelos formales, simulaciones y estructuras matemáticas, conocidas como «formalismo», y que ha tenido en la Teoría de Juegos y en las aportaciones desde la Economía los exponentes más sobresalientes en el intento de aplicar el análisis matemático al análisis político.

Hoy es claro que, a pesar de o quizás debido a la existencia de una sociedad abierta y globalizada, no existe un «modelo» de democracia, un único tipo de organización institucional y política que encarne el ideal democrático. Lo que hay es que distintos pueblos, enfrentándose a problemáticas completamente heterogéneas, han llegado a soluciones políticas que tienen un innegable aire de familia. Hoy existen «democracias». Y sobre ellas el mundo del derecho, de la ciencia política, pero también el mundo de la lógica filosófica reflexiona, debate y proyecta sus elaboraciones teóricas con el objetivo de mejorar su calidad, la calidad de una democracia que en nuestro país, donde ha tenido un asentamiento reciente, necesita aún un impulso diario y mayoritario.

En el desarrollo de la calidad de la democracia, en un régimen parlamentario como el nuestro, juega un papel determinante el grado de autonomía y de centralidad que tenga el Parlamento. Ello nos llevaría a reflexionar sobre los medios con que cuentan nuestras Cortes Generales, y de forma especial sus miembros los Diputados y Senadores; sobre los mecanismos reglamentarios y las posibilidades políticas prácticas para que éstos puedan desarrollar sus tareas legislativas y, especialmente, el control al Gobierno, como expresión de una mayor o menor calidad de democracia.

Pero junto a las tareas que le son propias por definición, un Parlamento moderno debe abrir sus puertas y acoger en su seno las más variadas manifestaciones de conexión con la sociedad a la que representa. Desde conferencias y presentaciones de obras políticas y literarias, hasta jornadas, como la que clausuramos con este acto, dedicadas a contribuir a la celebración del *Año Mundial de las Matemáticas*.

No es necesario insistir en la importancia de las Matemáticas en la sociedad contemporánea, en su papel fundamental en el desarrollo científico y tecnológico, en su relación –como he señalado– con la Filosofía y la Historia de las Ideas, en el lugar preponderante que ocupan en los planes de estudio de la educación primaria y secundaria, y en muchas otras facetas. Su presencia en la vida cotidiana de la mayoría de los ciudadanos es constante.

Por ello creo que la iniciativa –surgida del impulso de unos parlamentarios matemáticos o, si se quiere, de unos matemáticos circunstancialmente parlamentarios– de celebrar esta jornada es especialmente relevante, no tanto por su modesta contribución a la celebración antes mencionada, sino como forma de hacer llegar, a través del Parlamento como institución representativa de todos los españoles, la importancia de las Matemáticas como elemento de creación cultural, como herramienta básica para que la mayoría de los ciudadanos y ciudadanas puedan comprender la sociedad compleja en la que vivimos, como uno de los ámbitos más adecuados para la cooperación entre todos los pueblos por su lenguaje y valor universal.

Hoy, a través de esta jornada parlamentaria, y al igual que lo han hecho a lo largo de la historia, política y matemáticas se han dado nuevamente la mano. Ambas tienen la voluntad de colaborar a mejorar la vida de los hombres y las mujeres de nuestra sociedad. La política como expresión de ciudadanía, las Matemáticas como expresión del progreso científico se encuentran en la perspectiva de consolidar también una sociedad más democrática. Una sociedad viva, plural, con dinámica propia, que junto a los instrumentos hasta hoy conocidos para hacerlo (Parlamento, Gobierno, partidos) pueda empeñarse en realizar todo lo que necesita para progresar.

1812-1939

Becerra y Bermúdez, Manuel (1823-1896)
Diputado por las circunscripciones de Lugo, Madrid y Cuenca entre 1869 y 1881.
Senador y Ministro.
Matemático. Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1886-1896).

Bosch y Fustegueras, Alberto (1848-1900)
Diputado por las circunscripciones de Tarragona y Albacete entre 1876 y 1892.
Senador y Ministro.
Doctor en Ciencias Exactas y en Derecho Civil y Canónico. Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1890-1900).

Castro Bonell, Honorato de (fallecido en 1962)
Diputado por Zaragoza entre 1931 y 1939.
Catedrático de Astronomía y Geodesia de la Universidad Central.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1934-1962).

Echegaray y Eizaguirre, José (1833-1916)
Diputado por las circunscripciones de Madrid, Cuenca, Toledo, Murcia y Oviedo entre 1869 y 1881.
Senador y Ministro.
Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, matemático y economista.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1865-1916).

Fontán Rodríguez, Domingo (1788-1866)
Diputado por Lugo y Pontevedra entre 1836 y 1843.
Catedrático de Matemáticas. Director del Observatorio Astronómico de Madrid.

García de Castilla, Bernabé (fallecido en 1821)
Diputado por Canarias en 1820.
Matemático y físico. Profesor de los Estudios de San Isidro de Madrid.

García, Juan Justo
Diputado por Extremadura en 1820.
Catedrático de Matemáticas de la Universidad de Salamanca.

Márquez y Navarro, Francisco de Paula (fallecido en 1886)
Diputado por Málaga entre 1851 y 1862.
Marino. Director del Observatorio Astronómico de Marina de San Fernando. Ministro de Instrucción Pública.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1875-1886).

Martínez de Campos y Antón, Miguel (fallecido en 1906)
Diputado por Cuba, Puerto Rico y Alicante entre 1879 y 1898.
Senador y Consejero de Estado.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1879-1906).

Miranda, Pedro (fallecido en 1858)
Diputado por Madrid, León y Pontevedra entre 1839 y 1844.
Director General de Obras Públicas
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1848-1858).

Monteverde y Bethencourt, Manuel (1798-1868)
Diputado por Canarias en las Legislaturas de 1836-37 y 1853-54.
Militar y matemático.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1851-1868).

Nava y Caveda, Hilario (fallecido en 1889)
Diputado por las circunscripciones de Oviedo y Badajoz entre 1879 y 1885.
General de Ingenieros de la Armada.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1874-1889).

Navarro Reverter, Juan (1844-1924)
Diputado por la circunscripción de Castellón entre 1886 y 1923.
Senador. Ministro de Hacienda y del Estado.
Ingeniero de Montes.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1894-1924).

Reinoso, Mariano Miguel (fallecido en 1863)
Diputado por Valladolid entre 1837 y 1840.
Senador y Ministro de Fomento.
Profesor de Matemáticas.

Rodríguez González, José (1770-1824)
Diputado por Galicia en 1820.
Matemático y Astrónomo. Primer Director del Observatorio Astronómico de Madrid.

Saavedra Meneses, Frutos (fallecido en 1868)
Diputado por La Coruña entre 1864 y 1866.
Coronel de Artillería. Director General de Obras Públicas.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1862-1868)

Terrero, Antonio (fallecido en 1878)
Diputado por la circunscripción de Salamanca entre 1863 y 1872.
Senador.
General. Profesor de Astronomía y Geodesia.
Miembro de la Real Academia de Ciencias (Sección de Exactas, 1847-1878).

1977-1999

Arahuetes Portero, M.ª Soledad
Nacida el 19 de febrero de 1945 en Segovia.
Licenciada en Ciencias, Sección de Matemáticas. Profesora de Matemáticas.
Fue diputada por Cuenca en la Legislatura I: Grupo parlamentario de UCD.

Borrell Fontelles, Josep
Nacido el 24 de abril de 1947 en Pobla de Segur (Lleida).
Ingeniero Aeronáutico. Doctor en Ciencias Económicas. Ingeniero Economista por la Universidad de París. Catedrático de Matemáticas Empresariales en la Universidad Complutense de Madrid. Secretario de Estado de Hacienda (1984-91). Ministro de Obras Públicas, Transporte y Medio Ambiente (1991-96).
Diputado por Barcelona en las Legislaturas III, IV, V y VI: Grupo parlamentario socialista.

Bueno Vicente, José Miguel
Nacido el 8 de junio de 1940 en Villar de Argañón (Salamanca).
Licenciado en Ciencias Físicas. Profesor de Matemáticas en la Universidad Laboral de Cáceres y Profesor Adjunto en la Universidad de Salamanca.
Diputado por Salamanca en la I y II Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Busto Salgado, Jesús
Nacido el 12 de octubre de 1943 en Cambados (Pontevedra).
Licenciado en Ciencias Exactas. Profesor del Colegio San Pablo CEU y Director del CMU de San Pablo. Catedrático de Instituto y Director Provincial de Educación de Orense.
Diputado por Orense en la III y IV Legislatura: Grupo parlamentario popular.

Calero Baena, Andrés Pedro
Nacido el 10 de diciembre de 1949 en Andújar (Jaén)
Profesor Agregado de Matemáticas de Instituto.
Alcalde de Andújar (Jaén).
Diputado por Jaén en la III Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Díaz-Pinés Muñoz, Manuel
Nacido el 17 de enero de 1941 en Ciudad Real.
Licenciado en Ciencias Matemáticas. Profesor Ayudante en las Facultades de Matemáticas y Físicas de la Universidad Complutense de Madrid.
Diputado por Ciudad Real en las Legislaturas I y II: Grupos parlamentarios centrista y popular, respectivamente.

García Tomás, Sebastián
Nacido el 11 de noviembre de 1953 en Almansa (Albacete).
Licenciado en Ciencias, Sección de Matemáticas.
Ayudante en el Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Zaragoza.
Funcionario del Cuerpo de Profesores de Maestría Industrial.
Diputado por Zaragoza en la II Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

García Vico, Francisco
Nacido el 8 de mayo de 1950 en Cambil (Jaén).
Licenciado en Ciencias Exactas. Profesor de Matemáticas.
Concejal del Ayuntamiento de Jaén (1979-83) y Vicepresidente de la Diputación de Jaén (1979-83).
Diputado por Jaén en la IV Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Heras Pablo, María del Carmen
Nacida el 7 de noviembre de 1948 en Zamora.
Licenciada en Ciencias Físicas. Profesora Titular de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Extremadura.
Diputada por Cáceres en la VI Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Martinón Cejas, Antonio
Nacido el 21 de julio de 1950 en La Laguna (Tenerife).
Doctor en Ciencias Matemáticas. Catedrático de Bachillerato y Profesor Titular en la Universidad de La Laguna.
Diputado por Santa Cruz de Tenerife en las Legislaturas V y VI: Grupo parlamentario socialista.

Montesinos García, Juan Antonio
Nacido el 17 de octubre de 1932 en Alicante.
Ingeniero Técnico Industrial. Profesor de Matemáticas.
Diputado por Alicante en las Legislaturas II, III y IV: Grupo parlamentario popular.

Orpez Asensi, Antonio
Nacido el 7 de febrero de 1929 en Martos (Jaén).
Licenciado en Ciencias Matemáticas. Catedrático de Instituto.
Diputado por Huelva en la I Legislatura: Grupo parlamentario centrista.

Pardo Yáñez, Pablo
Nacido el 2 de febrero de 1945 en Lugo.
Licenciado en Ciencias Matemáticas. Profesor de Instituto.
Diputado por Lugo en las Legislaturas I y II: Grupo parlamentario socialista.

Payo Subiza, Gonzalo
Nacido el 10 de enero de 1931 en Pulgar (Toledo).
Doctor Ingeniero Geógrafo-Topógrafo y Licenciado en Matemáticas. Profesor de Matemáticas.
Diputado por Toledo en las Legislaturas Constituyente y I: Grupo parlamentario centrista.

Pleguezuelos Aguilar, Francisca
Nacida el 28 de junio de 1950 en Granada.
Licenciada en Ciencias Matemáticas. Diplomada en Informática de Gestión y Profesora Agregada de Instituto.
Diputada por Granada en la IV Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Riera Madurell, María Teresa
Nacida el 13 de octubre de 1950 en Barcelona.
Licenciada en Ciencias (Sección de Matemáticas). Doctora en Informática y Catedrática de la Universitat de les Illes Balears.
Diputada por les Illes Balears en la VI Legislatura: Grupo parlamentario socialista.

Rubíes Garrofe, María
Nacida el 21 de noviembre de 1932 en Camarasa (Lleida).
Licenciada en Matemáticas. Catedrática de Matemáticas en la Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de Lleida.
Concejal del Ayuntamiento de Lleida.
Diputada por Lleida en la I Legislatura: Grupo parlamentario Minoría Catalana.

Sáenz Lorenzo, José Félix
Nacido el 26 de Agosto de 1946 en Zaragoza.
Doctor en Ciencias Matemáticas. Profesor de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.
Diputado por Zaragoza en las Legislaturas I, II, III, IV y V: Grupo parlamentario socialista.

Este libro se imprimió con motivo de la celebración de la *Jornada matemática* celebrada en el Congreso de los Diputados el día 21 de enero de 2000, para conmemorar el Año Mundial de las Matemáticas 2000.