



SERVICIO DE PUBLICACIONES DE LA
Federación Española de Sociedades
de Profesores de Matemáticas (FESPM)

Apdo. de Correos 590
06080 BADAJOZ

<http://www.fespm.es.org/>

e-mail: PublicaFESPM@navegalia.com

FRUTAS Y MATEMÁTICAS

Autora: Rosario Nomdedeu Moreno

Editor: Ricardo Luengo

Impresión: TECNIGRAF, S.A. Badajoz

Dep. Legal: BA-670/2003

© Rosario Nomdedeu Moreno y Servicio de Publicaciones de la FESPM

FRUTAS Y MATEMÁTICAS

CON MOTIVO DEL
DÍA ESCOLAR DE
LAS MATEMÁTICAS

ROSARIO NOMDEDEU MORENO



12 de mayo de 2004
DÍA ESCOLAR DE LAS MATEMÁTICAS

LA NARANJA

Citrus aurantium



*Una vez las besamos y otras las olemos
y así son, alternativamente,
mejillas de doncellas o pomos de perfume*

Ben Sara de Santarem (+1123)

INTRODUCCIÓN

Si aceptamos que cocinar comienza cuando ponemos en marcha nuestra imaginación para decidir el menú, sigue en el mercado mientras elegimos y compramos los ingredientes más adecuados para cada plato y concluye con la buena presentación y la oferta de conversación interesante (a menudo sobre la propia comida), veremos que la naranja es un componente culinario de extraordinario valor.

Por ello vamos a dedicarle este cuaderno que quiere relacionar las matemáticas con la cocina, en el sentido amplio antes aludido, tomando como nexo de unión a la naranja.

Las matemáticas vienen propuestas en tres formatos: siglas formadas por letras mayúsculas (las iniciales de cada epígrafe) y números que indican el orden de la cuestión dentro del epígrafe; en segundo lugar encontraremos una relación de enigmas en el epígrafe nº 4 y, por último, seis fichas que proponen cuestiones a resolver.

Las siglas son propuestas de geometría, abiertas a que el profesorado pueda trabajar a los niveles que decida, desde el manejo concreto de un concepto a la simulación que genera la forma.

Los enigmas permiten el trabajo del razonamiento general, las estrategias de resolución de problemas y motivan al alumnado del segundo ciclo de la ESO.

Las fichas contienen propuestas más cerradas y trabajo aritmético apropiado para el último ciclo de primaria y los dos ciclos de la ESO.

1. LEYENDAS

SOBRE LA FRUTA PROHIBIDA

En tiempos remotos, muy remotos, la humanidad utilizaba nombres genéricos para nombrar a distintas clases de frutas. Esto lo podemos comprobar rastreando los restos que quedan de ello en algunas lenguas. *Malus* es manzano en griego clásico. En latín, *pomum* es fruto. En castellano, la palabra *pomología* significa estudio de los árboles frutales, es decir fruticultura. Las fiestas de Pomona eran las fiestas de la cosecha o del equinoccio de otoño. En italiano, *pomi* son frutas y *pomodoro* es el tomate. La palabra *manzana* no se acuñó, en castellano, hasta el siglo XIV (1335). Se comenzó a llamar *mattiana*, en latín, en honor a Caius Matius (s.-1). De *mattiana* derivó a *mazana* (1112) y de ahí a *manzana*, *poma* en catalán, como la conocemos hoy.



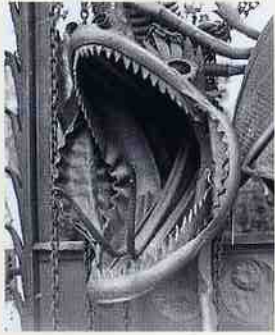
Así las cosas, es fácil entender que en cada lugar se cuente la leyenda del Jardín de las Hespérides de una forma distinta.

La mayor parte de las veces el fruto de oro, de la discordia o de la sabiduría es la manzana (fruto del *Malus domésticus*), pero en Canarias (restos del Jardín de las Hespérides según la leyenda) es el plátano

(*Mussa paradisiaca*). Sin embargo, si atendemos al color del fruto, a su forma esférica L1 y a su estructura HESPERIDIO L2 y a los nombres científicos de algunas de las especies del género *Citrus* (*aurantium*, *paradisi*, etc.), parece que estas frutas son las mejores candidatas a pomo de oro del Jardín de las Hespérides.

Jacint Verdaguer así lo considera en su poema "L'Atlàntida":

*I, fent-li la corona, ja hi veu abans de gaire
Les d'or obiradores taronges grogüejar,
Com si brillant quiscuna fos altre sol que en l'aire
Sortís de les onades lo món a enlluernar.*



Y Gaudí lo dejó plasmado en la entrada de la finca Güell, en cuya puerta de hierro aparece el dragón Ladón que vigila un jardín en el que hay un olmo, un sauce y un álamo. En el pilar que soporta la puerta están las naranjas, el tesoro que el dragón y las tres Hespérides no supieron guardar.

Puesto que en otros escritos ya he hecho el estudio de las dos candidatas anteriores, en esta ocasión me centraré en la fruta reina de mi tierra, que ya habían echado a faltar algunas personas conocedoras de mis trabajos.

LAS NARANJAS DE ORO DEL JARDÍN DE LAS HESPÉRIDES

El huerto llamado Jardín de las Hespérides era el símbolo de la fecundidad, la eterna primavera y la felicidad perpetua.

Según la mitología griega, cuando Zeus y Hera se casaron, Gea (la diosa Tierra) les dio, como regalo de bodas, tres naranjas, eran como tres esferas de oro. Tan hermosas las vio Hera que decidió plantar sus simientes en un huerto, allá en Hesperia (país de poniente, en los confines de la Tierra, donde reposaban cada día los caballos del dios Helio), y, para que nadie pudiera robarle los frutos dorados que iban a crecer allí, puso como vigilante al dragón Ladón, hijo de Tifón y de Equidna y a las tres Hespérides, ninfas de la tarde. Las tres Hespérides eran hijas de Atlas y de su sobrina Hesperis, señora de la noche, hija de Héspero (rey de poniente), hermano de Atlas. Por tanto son también las tres Atlántidas. Sus nombres son, según ciertas versiones: Eglá (la brillante), Eritia (la rojiza) y Hesperaretousa (la Aretusa de poniente).

Hércules (Heracles amor-odio de Hera), fue hijo de Alcmena, una mortal, y del dios Zeus. Por esa causa, Hera, celosa, lo intentó todo contra Hércules. Adelantó el nacimiento de Euristeo para que Hércules no fuese rey, envió dos serpientes a la cuna de éste, recién nacido, aunque el "hercúleo niño" las mató sin problema, en su juventud lo enloqueció y consiguió que matase a sus propios hijos, etc. Hércules consultó al oráculo de Delfos para saber qué debía hacer para expiar su culpa, éste le indicó que debía ponerse a las órdenes de Euristeo, quien ordenó a Heracles 10 trabajos imposibles. Tenía que matar al León de Nemea (hoy en el cielo como constelación Leo) y a la Hidra de Lerna (constelación Hydra),

capturar al jabalí de Erimanto y a la cierva de Cerinia, matar o espantar a las aves del lago Estinfalo, limpiar los establos de Augías, apresar al toro de Creta, amansar las yeguas de Diomedes, arrebatar el cinturón de la reina de las Amazonas y apoderarse de los bueyes de Gerión. Como Hércules fracasó en la segunda y la quinta de sus aventuras, Euristeo le encomendó otras dos: devolver el perro Cerbero a su dueño y robar las naranjas de oro del Jardín de las Hespérides.

La última aventura es la que cierra nuestra leyenda. Hércules debía, en primer lugar, descubrir dónde estaba el huerto de las naranjas de oro, luminosas y rojizas como una hermosa puesta de sol. Arrancó la información a Nereo, el viejo del mar, y se embarcó en la copa del Sol. En su viaje liberó a Prometeo que le indicó que no podría coger él las naranjas, pues debía cogerlas Atlas, quien a su vez estaba atado a una penosa tarea: soportar el mundo sobre sus espaldas. Hércules se ofreció a sustituirle a cambio de que Atlas robara las naranjas. Atlas aceptó, robó las naranjas y, en un descuido, Hércules le volvió a cargar el mundo sobre los hombros y llevó las encendidas frutas a Euristeo que las consagró a Atenea, quien le ordenó que las devolviera al Jardín de las Hespérides, pues el Destino, *yuan* en chino, que significa naranja amarga, prohibía que estuvieran en otro lugar. Desde entonces el dragón está encarcelado en el cielo, al pie de Hércules, y las tres ninfas de la tarde fueron convertidas en un olmo, un sauce y un álamo.

2. MAGIA Y MISTERIO

No sólo las naranjas, también el azahar está envuelto en el misterio de lo áureo y en la magia de las plantas.

La flor del naranjo es pentámera, como la de las rosáceas, entre las que se encuentra el manzano. Todas ellas recuerdan al pentagrama pitagórico, cuya simetría es cíclica de orden 2×5 MM1, y en el que la razón áurea MM2 está presente en cada una de sus partes.

Dibujar el pentagrama es fácil, basta dibujar el triángulo formado por un vértice y los dos opuestos a él. Los restantes vértices se hallan sencillamente por bisección MM3.

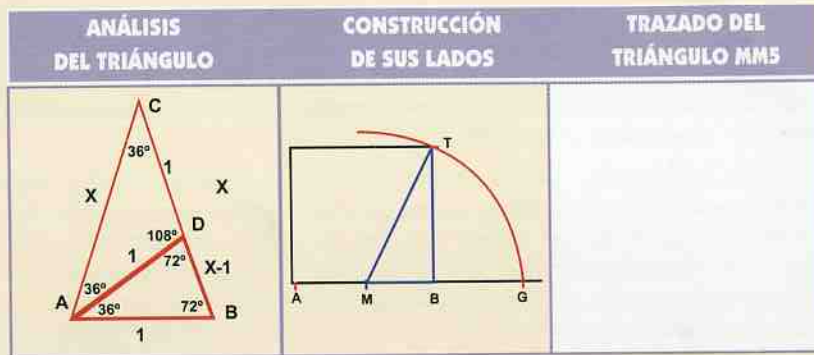
El estudio del mencionado triángulo nos permitirá su construcción y luego completaremos el diseño del pentagrama con las siguientes operaciones MM4:



1. Dibujar las mediatrices de los lados iguales del triángulo de oro.
2. Trazar la circunferencia circunscrita.
3. Marcar los cinco vértices
4. Unir los vértices alternos mediante segmentos de recta.



Estas instrucciones son sencillas, pero nos falta, como decíamos, construir el triángulo que sirve de base a todo este proceso. Delimitaremos el trabajo en tres partes:

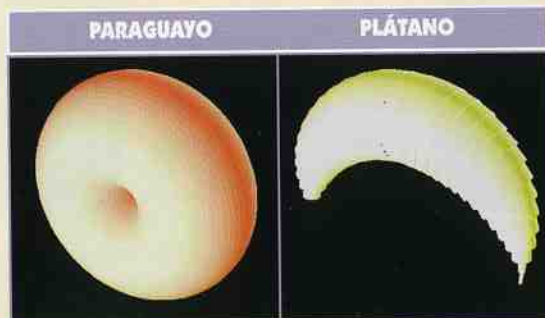


La semejanza de los triángulos ABC y BDA nos lleva MM6 a la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$, de cuyas soluciones MM7 sólo es aceptable $(1 + \sqrt{5}) / 2 = \text{Phi}$.

La construcción de los lados del triángulo se limita a elegir un segmento unidad MB y a construir el segmento $1 + \sqrt{5} = AM + MG$. La mitad de este segmento es Phi.

El trazado del triángulo sigue el método habitual.

Por otra parte, las frutas que han sido tomadas como frutas del Jardín de las Hespérides tienen algo más en común:



De todas ellas la naranja es la más perfecta, pues podemos generarla haciendo girar una semicircunferencia. El limón se obtiene de igual modo, pero el arco que gira es menor que media circunferencia, en el caso de la manzana es mayor y, quién sabe si el tomate habrá sido la fruta de oro en alguna leyenda italiana, ya que su nombre es pomodoro y alguna de sus variedades puede obtenerse con el giro de una circunferencia completa, como el paraguayo. De ahí a la obtención del plátano no hay más que un paso, pues basta que la circunferencia que gira mengue su radio progresivamente.

El siguiente programa Logo permite obtener todas estas frutas por simulación en el ordenador. Es el mismo para todas ellas, sólo hemos de elegir adecuadamente los valores de sus variables.

```

Logo
frutas y matemáticas

to frutatoro :rad1 :rad2 :step :x :y
  perspective
  cs
  setsc [0 0 0]
  ht
  pu
  ; Este es el color del objeto, no el que vamos a ver
  setpc [150 200 50]
  Torus :rad1 :rad2 :step :x :y
  polyview
  pd
end

to GetPoint :rad
  fd :rad
  localmake "pos posxyz
  bk :rad
  output :pos
end

to Slice :rad1 :rad2 :step
  ; dibuja gajos
  localmake "i 0
  repeat 360/:step -
  [
  fd :rad1
  down :i
  localmake "PointA GetPoint :rad2
  down :step
  localmake "PointB GetPoint :rad2
  up :step
  ]
  
```



```

Logo
frutas y matemáticas

up :i
bk :rad1
rt :step
fd :rad1
down :i
localmake "PointD GetPoint :rad2
down :step
localmake "PointC GetPoint :rad2
up :step
up :i
bk :rad1
lt :step
localmake "PointE posxyz
setposxyz :PointA
pd
polystart
setposxyz :PointB
setposxyz :PointC
setposxyz :PointD
setposxyz :PointA
polyend
pu
setposxyz :PointE
make "i :i + :step
]

end

to Torus :rad1 :rad2 :step :x :y
; recubre la superficie del toro con polígonos
make "t :rad2
make "p 0
repeat :y*90/:step [Slice :rad1 :rad2 :step rt :step
make "rad2 :rad2-:p make "p :p+:x]
make "p :p-x
repeat :y*90/:step [Slice :rad1 :rad2 :step lt :step
make "rad2 :rad2+:p make "p :p-x]
repeat :y*90/:step [make "rad2 :t Slice :rad1 :rad2
:step lt :step make "t :t-p make "p :p+:x]

end

```

3. HECHIZOS, RECETAS Y POCIMAS

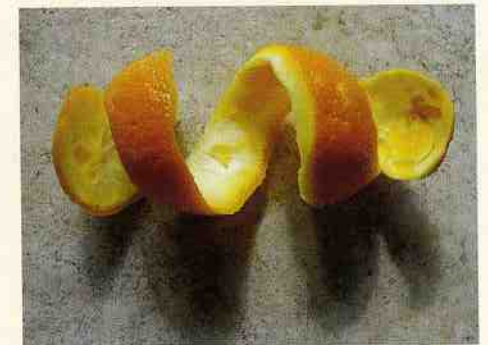


Con las naranjas podemos preparar multitud de platos, perfumes, tisanas, brebajes, etc.

La hoja del naranjo forma un pequeño corazón junto al pedúnculo, por lo que se consideró en tiempos antiguos que tenía propiedades mágicas para tonificar el corazón. La flor es símbolo de inocencia y la hoja, según el lenguaje de las flores, indica generosidad. La cantidad de semillas simboliza fertilidad y abundancia. El fruto se une al pedúnculo mediante un engarce mágico, un pentágono estrellado. La pulpa de la naranja está repartida en compartimentos, gajos, cuya forma es

el huso esférico HRP1, que parece indicar que el suyo es el tamaño justo para un delicioso bocado. A parte de tomarla recién recolectada y en su punto justo de maduración, puede seducirnos en muchas otras formas: naranjada, mermelada, ensalada, bacalao o pato a la naranja, sorbete, flan y helado de naranja. Las cortezas también se aprovechan, secas para preparar infusiones o confitadas como dulces exquisitos.

Tanto la flor como el fruto y su corteza son tan aromáticos que con ellos se destilan esencias de las que Gabriela Mistral dice que desprenden "el perfume de cien pomos de olores al vaciarse". También se puede preparar un dentífrico: tomar cierta cantidad de cáscaras de naranjas que estén completamente secas; colocarlas al fuego sobre una lata y tostarlas hasta que se encuentren casi quemadas; enseguida se muelen bien y con dicho polvo se limpian los dientes al levantarse y al acostarse. Otra de cáscaras, hechizo para encontrar pareja, dice la voz popular que la moza que quiera encontrar a su "media naranja" debe aprender a pelar la dorada fruta en espiral HRP2, dejando la cáscara en una sola pieza (que, por otra parte, resulta más fácil de colgar para secarla).



4. ENIGMAS, ADIVINANZAS Y ROMPECABEZAS

- Ensartar dos parejas de tres y dos parejas de cuatro y formar un tetraedro.
- Con 10 mandarinas hacer 5 filas de 4 naranjas cada fila.
- Hinchar varios globos e intentar hacer pomos de dos, tres, cuatro globos. Observar la disposición de los pomos de naranjas en el árbol.
- Dibuja a mano alzada un pentagrama sin levantar el lápiz del papel.
- ¿Cuántas veces aparece Phi en el pentagrama?
- ¿Cuántas veces cabe el diámetro en el contorno de la circunferencia?
- ¿En qué se parecen Pi y Phi? ¿En qué se diferencian?

FICHAS

Ficha nº 1: "La piel"¹

Material: Tres naranjas de variedades distintas, un cuchillo y una regla milimetrada.

- Observa las características de la piel de la naranja en cada caso y anótalas en la tabla siguiente:

VARIEDAD	TACTO	BRILLO	COLOR	AROMA

- Corta las naranjas por la mitad y mide el grosor de la piel de cada una de ellas.
 - ¿Qué variedad tiene la piel más gruesa?
 - ¿Qué variedad tiene la piel más delgada?
- Escribe otras observaciones.

Ficha nº 2: "El zumo"²

Material: Tres naranjas de variedad distinta. Un cuchillo. Un recipiente graduado. Tres vasos de vidrio transparente.

- Toma una naranja, péjala, anota su peso en la tabla siguiente.

- Introduce la naranja en un recipiente graduado en cm^3 y llénalo de agua.
 - Anota en un lugar aparte el nivel alcanzado. Saca la naranja y anota el nuevo nivel. ¿Cuál es el volumen de la naranja?
 - Corta la naranja por la mitad y exprime su jugo, pásalo al recipiente graduado y anota la cantidad de jugo que has obtenido.
 - Calcula el tanto por ciento de jugo de cada variedad.
- Anota cada uno de los datos obtenidos en la tabla siguiente:

VARIEDAD	MASA	VOLUMEN EN CM^3	ZUMO EN CM^3	% DE ZUMO

Ficha nº 3: "Las formas"

- El árbol:

Escribe un algoritmo que sirva para dibujar un naranjo, en el que de cada rama salen otras dos hasta 5 niveles.

- La flor:

a. Busca formas matemáticas que recuerden la flor de azahar ¿sirven las siguientes $E\left(\frac{5}{2}\right)$, $\text{sen}(5\alpha)$, $z^5=1$?

b. Dibuja la flor de azahar con regla y compás, con un libro de espejos, con un programa de ordenador. Siempre realizando el trabajo con la mayor claridad, precisión y brevedad posibles.

c. En cierta emisora se dijo que el nº de pétalos de las flores siempre es un término de la sucesión de Fibonacci ¿es esto cierto? También se dijo que el cociente de dos términos consecutivos tiende a Phi ¿es cierto esto? Concluyan de ambas afirmaciones la relación de las flores con la *proporción divina* ¿era verdadera la conclusión? ¿era correcta?

- El fruto:

- La naranja:

Bellas y salutíferas esferas las llama el doctor Marañón, claro que ello no es exacto para todas las variedades de cítricos. Lo verás si rellenas las casillas de la siguiente tabla. Pon una cruz en las casillas en que la fila y la columna que se cruzan se correspondan:

1. Antón i Antón, Fina i altres (1989). La taronja. La natura a l'escola. 8-14 anys Generalitat Valenciana.

2. Ibidem.

Rotación	Clementina	Navelina	Cidra	Mandarina	Pomelo	Nável	Lima	Limón
Semicírculo		X						
Más de un semicírculo								
Menos de un semicírculo								
Un círculo								

b. Los gajos



I. Corta una naranja por la mitad ¿cuántos grados mide de amplitud cada sector circular formado por los gajos?

II. Extrapolando los resultados de la ficha 2, ¿cuánto zumo encierra cada gajo?



Ficha nº 4: "Localización"

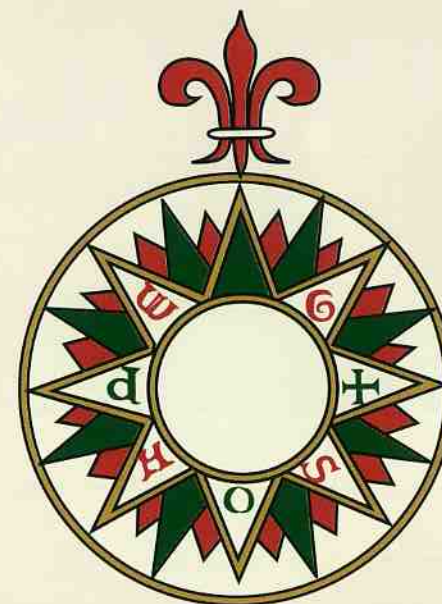
1. Consigue un mapamundi y colorea en naranja las zonas del mundo en que se cultiva este cítrico.
2. Mapa de la naranja en España. Realiza la misma actividad del punto anterior pero con el mapa que indicamos.
3. Mapa local.
 - a. Haz lo mismo con el mapa local.
 - b. Altitud, longitud y latitud del lugar.
 - c. Temperaturas y humedad.

La naranja necesita temperaturas por encima de 0°, de lo contrario su abundante zumo se congela y se produce la temida "helada" que echa a perder la cosecha. Además es necesario disponer de agua suficiente para el riego, aunque las variedades de secano son más sabrosas que las de huerta. Estas

condiciones suponen climas suaves que no suelen darse en zonas de gran altitud, ni en las comarcas continentales. Rellena las casillas de la siguiente tabla con los datos que corresponden a tu comarca, y deduce si es viable en ella el cultivo de la naranja.

	PRIMAVERA	VERANO	OTOÑO	INVIERNO
Temperatura media				
Pluviosidad				

d. Construye una rosa de los vientos y pon en ella los nombres locales de los vientos. Colorea en azul las direcciones de los vientos más frecuentes en tu entorno local.



e. Señala un punto en el suelo, desde el que puedas ver distintos puntos de referencia (montañas, rocas, árboles, edificios, construcciones de toda índole, etc.). Desde ese punto dibuja una rosa de los vientos y saca una foto del horizonte en dirección a cada uno de los brazos de la rosa. Imprime las fotos y pégalas consecutivamente. Recuerda los elementos del horizonte que te van a servir a partir de ahora para orientarte en tu localidad.

Ficha nº 5: "Los mercados"



Material: folletos publicitarios; visita al mercado del barrio, al mercado central, al mercadillo, al mercado de abastos, a la lonja.

a. Presentación de los puestos de frutas: apilamientos de naranjas.

I. Observa en el mercado los apilamientos de cerezas, tomates, naranjas y demás frutas esféricas. Haz un dibujo esquemático de estos apilamientos.

II. En la fotografía anterior vemos las naranjas apiladas de modo que cada naranja se apoya en el centro del cuadrado que forman las naranjas más próximas de la capa inferior. ¿Se puede mejorar la forma de apilarlas para aprovechar mejor el espacio? ¿por qué las han apilado así dentro de esta caja?

b. Ofertas: comparar precios, precio en euros y en pesetas. Elige una oferta que te parezca ventajosa y explica por qué.

I. Busca un minibrik de zumo de naranja y descubre su precio por litro.

II. Nombra las figuras geométricas que veas en el mercado o en el folleto publicitario.

III. Estima cuántas veces se ha reducido el tamaño real de un brik de leche en la imagen del folleto.

IV. Haz una tabla que reúna de forma clara y breve los productos que se suelen consumir en tu casa, su precio unitario, la cantidad que soléis comprar y el valor de cada una de esas cantidades.

c. Conversión de unidades: En las recetas populares todavía se indican las cantidades de cada ingrediente en onzas, libras, brazas, dedos, etc. Haz la conversión al SMD.

d. Código de barras: ¿Cuántos productos se pueden codificar con el sistema de código de barras?

Ficha nº 6: "Agua de azahar para toda la clase"

Tal vez la realización de estas fichas ha producido cierto nivel de angustia (matemática) en el aula. Conviendría aliviar a toda la clase con una taza de agua de azahar, pues tiene propiedades tranquilizantes.

Para preparar un litro se maceran en frío 20 gramos de flores en un litro de agua. El agua de azahar se toma a sorbitos y se pueden tomar hasta tres tazas pequeñas al día.

¿Cuántos gramos de pétalos serán necesarios para preparar las tomas de un día para cada una de las personas de tu clase?

Las hojas de la flor de azahar se recogen poniendo un paño limpio debajo del naranjo en flor.

