4.2. RELACIONES ENTRE LOS OBJETOS

Abandono la primera sala del museo y me doy un paseo. Necesito estirar las piernas y la cabeza. Deambulo por el pasillo, antaño parte del corredor de un patio de tres caras, hoy eje fundamental, horizontal y vertical, del edificio.

Hay mucha gente joven recorriendo la exposición, algunos enfundados en cazadoras de cuero, con el pelo corto y el flequillo levantado en pinchos, otros, de pelo largo, cubiertos por enormes jerseys de lana y amplios pantalones. Todos parecen igualmente intrigados por los cuadros, y con esfuerzo resisto el impulso de acercarme a los grupos y escuchar sus conversaciones.

Mientras, llego a una de las salas del primer piso, estructurada como un enorme pasillo que a modo de balconada, va recorriendo las paredes de la sala del piso bajo que acabo de abandonar, a media altura entre el suelo y el techo. Una hermosa ventana abocinada del siglo XV y una cornisa que sirve ahora de cómodo banco a una pareja de turistas que toman notas en un cuaderno son los únicos vestigios del pasado a la vista.

La luz que atraviesa una segunda ventana, al fondo, llama mi atención y me dirijo a ella. Veo, del otro lado, un arco de medio punto. Arco de medio punto. Cómo me gustó esa expresión cuando me la enseñaron de niña, y cómo se me llenaba la boca diciéndolo. Arco de medio punto. ¿Cómo de grande es medio punto? Me recuesto contra la ventana y miro por ella. A mis pies, la sala de conferencias del museo, una capilla construida en el siglo XVI y restaurada recientemente. Es la única parte del edificio que ha resistido las múltiples transformaciones. Disfruto unos minutos contemplando a través del cristal el hermoso artesonado mudéjar, la bóveda de crucería gótica y los dos sepulcros con sus estatuas yacientes de ojos, sorprendentemente, abiertos.

Cómoda y en la tranquilidad del rincón, recapacito. Hay un problema que resolver: recorrer un algo inabarcable. El pintor, describirnos un volumen desde un lienzo plano; el matemático, llevar a cabo una cantidad infinita de cuentas en un tiempo finito. En la búsqueda de solución al problema, ambos, pintor y matemático, investigan siguiendo similares procesos de abstracción. Van probando distintos métodos, distintas aproximaciones. La primera: descomponer ese algo inabarcable en zonas abarcables. Una figura con volumen no se puede proyectar sobre un plano, pero una zona pequeña sí.

La voz de Laura Tedeschini-Lalli me viene desde Roma. “Piensa en los atlas de la Tierra”, me dice.Y yo pienso en ellos. Una de esas grandes cadenas de tiendas madrileñas que lo mismo venden un libro que una lechuga y abren de noche, tuvo hace unos años a precio de oferta libros de mapas. La voz se corrió por la Facultad de Matemáticas entre los profesores, y creo que en unos días nos los llevamos todos. Yo conseguí un ejemplar con espléndidas ilustraciones en las que se aprecian con claridad dos períodos en la elaboración de mapas: el período anterior a Euler y el período posterior a Euler.

Este matemático, que vivió en el siglo XVIII, demostró que no se puede proyectar sin distorsión la superficie esférica de la Tierra sobre un plano. Las representaciones de la Tierra previas a Euler que aparecen en mi libro son mapas de la Tierra, intentos por reproducir la corteza terrestre y los mares sobre la superficie plana del papel. A partir de la época de Euler, ya no hay mapas, hay atlas. La geosfera nunca aparece representada directamente sobre un único mapa, sino que se hacen varios mapas de áreas más pequeñas que sí pueden ser representadas fácilmente sobre la superficie plana del papel, y se nos dan unas reglas para pegar unos con otros. Pienso también en las cartas de navegación que lleva a bordo cualquier navegante. Cada una es un mapa local. Todas juntas nos dan información sobre un objeto que es tridimensional, la superficie de la Tierra.

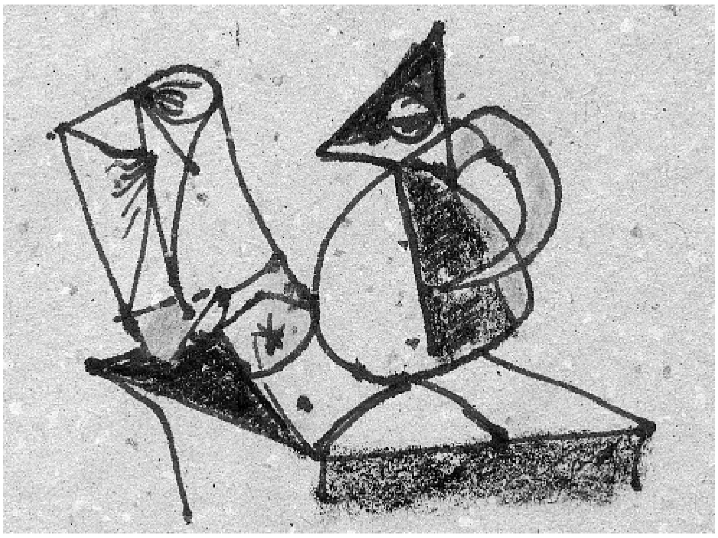
Descomposición de un volumen en planos. Si es posible descomponer un volumen en planos, ¿será también posible componer un volumen a base de planos? Para ello necesitaríamos primero estudiar los distintos volúmenes, sus formas y comparar unas con otras. De esta manera nos será posible hacer la necesaria selección de trazos con los que caracterizar un volumen y distinguirlo de otros.

Dejo mi esquina y bajo de nuevo a la primera planta.

PICASSO: Relaciones entre las figuras

Entro en la sala segunda de la exposición. A la izquierda un cuadro pequeño me hace sonreir. Desde él me contemplan, muy pomposos y solemnes, un pájaro y una pájara que parecen salidos de las páginas de *Apuntes para un tratado de cocotología*, libro en que don Miguel de Unamuno utiliza matemáticas, embriología, etimología y diversas artes más para enseñarnos a distinguir pájaros, pájaras y sus primas, las pajaritas, de otras aves.

Verre et Pichet, 1914



Yo he visto muchos cuadros en los que Picasso pinta palomas, pero es la primera vez que en un cuadro suyo veo un pájaro y una pájara. Abro el cuaderno, saco los lapiceros y los dibujo pensando en don Miguel. Al acabar me acerco al cuadro para leer su nombre: *Verre et Pichet*, 1914. Vaso y jarra. Así pues, no se trata de un pájaro y una pájara sino de un vaso y una jarra. Me alejo de nuevo, y vuelvo a mirar el cuadro. Sí, también es el dibujo de un vaso y una jarra. Pero no por ello dejan de ser un pájaro y una pájara. Ahora bien, ¿se trata de un pájaro que tiene forma de vaso, o de una jarra con forma de pájara? Recuerdo aquellos chistes de la adolescencia. ¿En qué se parecen las cataratas del Niágara y el Polo Norte?, nos preguntábamos nosotros. ¿En qué se parecen un vaso y un pájaro?, me pregunta Picasso.

> *Juan Gris llamaba a esta manera de pintar "poética", y en sus exposiciones, Gris se colocaba junto a los cuadros y los decoraba con "rimas y metáforas", como él las llamaba, señalando al atónito observador similitudes que éste no había percibido antes. "¿No cree que la boca de esta jarra se parece a la pera, la que está a su lado? ¿La copa al As de corazones? Las cosas están encadenadas por relaciones* ([Kah -2], pág. 86).

Esta cita de Juan Gris me trae a la memoria la conferencia “De las posibilidades de la pintura” que este pintor pronunció ante el Grupo de estudios Filosóficos y Científicos en la Sorbona, el 15 de mayo de 1925. Reproduzco algunos párrafos (el texto completo puede leerse en [Kah-1], págs. 420-434).

> *Cada época ha influido en sus elementos pictóricos con sus inquietudes peculiares. En ciertos momentos de la historia se ha dado importancia y alcance religioso a puros elementos de la pintura; en otras épocas han influido científicamente los elementos del pintor. Se sabe que Vinci pensaba en la composición química de la atmósfera cuando pintaba el azul de un cielo. La carne palpitante de vida de los pintores venecianos, donde se adivina la sangre circular bajo la dorada piel no era debida sino a las conquistas fisiológicas del Renacimiento.*
>
> *Estos elementos, influenciados así, han formado lo que se ha llamado la estética de cada época y no hay duda de que un descubrimiento científico aplicable sólo a la técnica pictórica como la perspectiva italiana influyó en todas las estéticas desde el Renacimiento.*
>
> *En todas las grandes épocas del arte, se siente la necesidad de representación de un mundo sustancial y espiritual. Cada época lo ha influenciado y diversificado según sus exigencias e inquietudes. La técnica no ha hecho, cada vez, más que adjetivar ese mundo sustancial. Hay medios técnicos que han existido en todos los tiempos, y hay otros que son menos constantes y están sometidos a la estética. Ejemplo: la perspectiva italiana no era sino un medio, sujeto a las exigencias científicas de la estética del Renacimiento.*

Sólo los medios arquitectónicos son constantes en la pintura. Incluso diría que la única técnica pictórica valedera es una suerte de arquitectura plana y coloreada.

Puede decirse ahora que, si la estética es el conjunto de las relaciones entre el pintor y el mundo exterior, la técnica es el conjunto de relaciones entre las formas y los colores que contienen, y entre las formas coloreadas entre sí. Esto es la composición y da lugar al cuadro.

¿En qué se diferencian dos figuras? En su forma, en su estructura. Si dos figuras son distintas, desde algún punto de vista habrá de ser apreciada una diferencia entre sus formas. Si se las mire desde donde se las mire vemos lo mismo en una y otra, concluiremos que se trata de la misma figura. Descomponer una figura en planos nos enseña a mirar los volúmenes como composiciones arquitectónicas construidas a base de planos, y volúmenes distintos dan lugar a composiciones con formas distintas. Desde esta ventana que nos ha abierto el cuadro de Picasso, observamos nuestra construcción matemática, en la que intentamos estudiar las soluciones a ecuaciones. ¿Tienen forma también las soluciones a una ecuación? Sí.

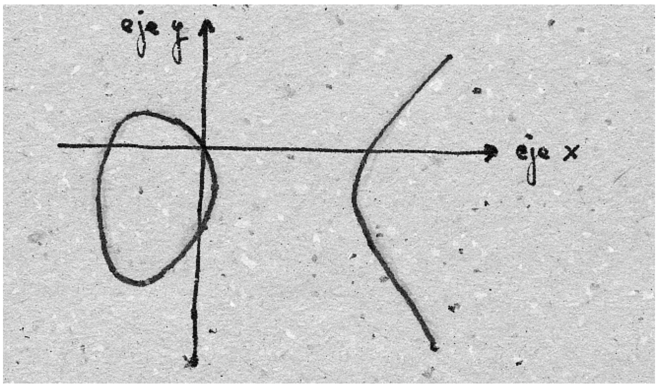
MATEMATICAS: Comparar ecuaciones construyendo una red con el conjunto de sus soluciones y comparando estas redes.

Descartes nos enseñó a representar gráficamente una ecuación con una curva. A cada punto sobre la curva le corresponde una solución de la ecuación y viceversa. Una vez que esta relación está establecida, se pueden estudiar soluciones determinadas de una ecuación a través del estudio de los puntos correspondientes sobre la curva. Si, por ejemplo, sólo interesan las soluciones que sean números racionales, nos limitaremos a estudiar los puntos sobre la curva cuyas coordenadas sean números racionales.

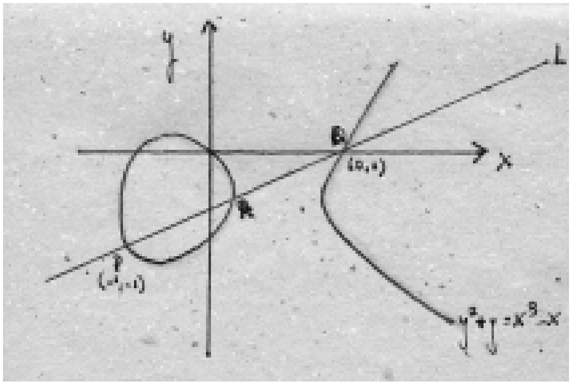
Supongamos, pues, que se tiene una ecuación, y que se quieren estudiar sus soluciones en números racionales. Se dibuja la curva correspondiente y se presta atención a los puntos de ella que tienen por coordenadas dos números racionales. ¿Se puede formar alguna estructura con ellos? Hay un juego para niños que consiste en unir con rectas una serie de puntos numerados y obtener así una estructura que identifica una figura. Lo mismo podemos hacer con los puntos de una curva que tengan coordenadas racionales. Por lo general, si unimos con rectas los puntos con coordenadas racionales de una curva cualquiera no obtenemos más que un caos de rectas sin orden ni concierto. Pero en el caso de algunas curvas específicas, como la curva $y^2 + y = x^3 - x$ que encontramos en 4.1 —y todas las de su tipo, en las que la *y* aparece al cuadrado y la *x* al cubo—, sí obtenemos una estructura ordenada, un esqueleto que caracteriza tanto a la curva como a la ecuación que representa. Esta estructura, cuando existe, nos permite comparar ecuaciones (y curvas), saber cuándo son distintas y cuándo de trata de la misma, vista desde puntos de observación distintos. Si dos ecuaciones (o curvas) son distintas, desde algún punto de vista la forma de la estructura que forman sus soluciones ha de ser distinta.

La red de soluciones de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$

Dibujo mi ecuación sobre un plano siguiendo el método de Descartes: elijo dos ejes de coordenadas perpendiculares y voy dando valores numéricos a las variables x e y en la ecuación.

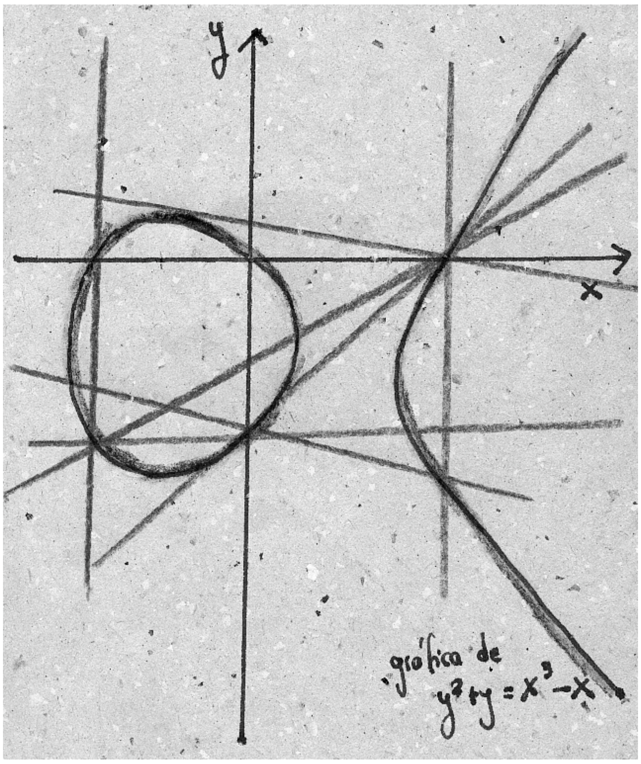


Obtengo una curva con dos partes, una de forma oval y la otra con forma de paraboloide. Ahora presto atención a los puntos de la curva cuyas dos coordenadas se corresponden con soluciones en números racionales a la ecuación. Y observo algo curioso: siempre aparecen alineados de tres en tres.



Esto no es frecuente. En general, toda recta que yo trace cortará a una curva con ecuación de tercer grado en tres puntos, pero las coordenadas de estos tres puntos serán números de naturaleza distinta.

Sin embargo, en la curva $y^2 + y = x^3 - x$, y en todas las de su tipo —una variable aparece al cuadrado y la otra al cubo—, ocurre que si dos de los puntos en los que recta y curva se cortan tienen coordenadas que se corresponden con soluciones racionales a la ecuación de la curva, las coordenadas del tercer punto de corte también serán números racionales, y se corresponderán también, por lo tanto, con una de las soluciones que busco. Esta inusual propiedad nos garantiza que las soluciones en números racionales a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ forman una estructura muy simple, constituida por rectas que, como si de un esqueleto se tratase, subyacen a la curva y se cortan con la curva en sus puntos con coordenadas racionales.



Ya contamos, pues, con una estructura cuya forma caracteriza a la ecuación: el esqueleto construido uniendo por medio de rectas todos los puntos de la curva con coordenadas racionales. Si dos curvas o ecuaciones son distintas, sus estructuras serán distintas. Si dos curvas o ecuaciones, en apariencia diferentes, son de hecho la misma, descrita desde lugares distintos, sus estructuras serán iguales. Hemos encontrado, pues, una manera de comparar ecuaciones a base de comparar la forma de la estructura de sus soluciones.

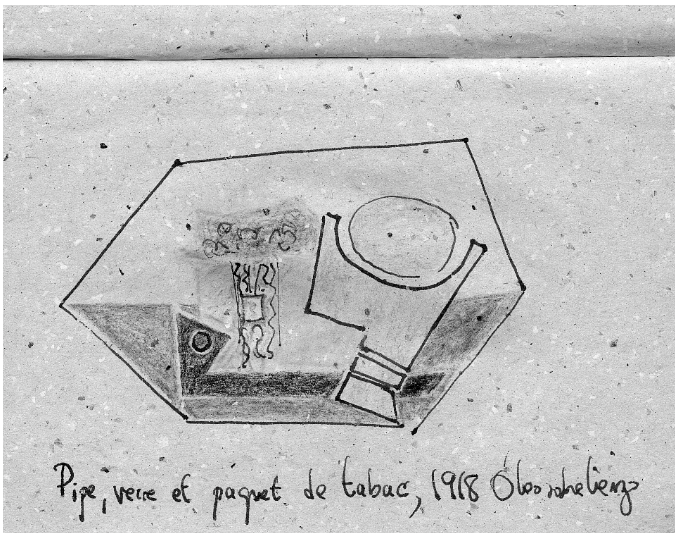
4.3. RECONSTRUCCION DE UN OBJETO USANDO ALGUNOS PLANOS

PICASSO: Construcción de figuras a partir de algunos planos

Salgo de la segunda sala y regreso a la primera. Vuelvo a mirar el cuadro del clarinetista de Picasso, la ventana desde la que observamos el primero de los procesos de abstracción comunes a matemáticos y pintores del siglo XX que llevamos analizados: enfrentarse a un objeto inabarcable (un volumen, para describirlo sobre un lienzo plano. o un conjunto infinito de números. para recorrerlo entero) descomponiéndolo en pequeñas zonas a las que sí podemos llegar. Describir un algo global mediante una serie de descripciones locales.

Sigo caminando por la primera sala del museo, con estas ideas dando vueltas en la cabeza. Descomponer una figura, un volumen, en planos. Y planos, precisamente, es lo único que advierto en *Pipe, verre et paquet de tabac* .

Pipe, verre et paquet de tabac, 1918



En apariencia este nuevo cuadro no tiene nada que ver con el del clarinetista, y es muy posible que, de no tener la cabeza llena de planos, lo hubiese pasado por alto. Pero la tengo llena de planos, y eso me hace parar frente a él: un bodegón construido a base de combinar unos cuantos planos sólidos de color. Venimos de contemplar una descomposición en planos y nos encontramos con el proceso inverso: construir a base de planos.

Tiene todo el sentido. Ya sabemos que un volumen puede ser descompuesto en planos, tantos cuantos queramos. Ahora intentamos avanzar un poco más en el proceso de la reproducción de una realidad tridimensional sobre un lienzo plano. En *Verre et Pichet* aprendimos, además, cómo reducir las formas de la naturaleza a unos cuántos contornos básicos, cómo basta con seleccionar y señalar unas cuantas estructuras esenciales para que el observador pueda identificar los objetos que tiene ante sus ojos. Aquí tenemos la combinación perfecta de todo lo que hemos aprendido hasta ahora. Por un lado descomponemos una composición con volumen, tridimensional, en planos, y por otro elegimos unas cuantas formas básicas que describen la forma de los objetos. A continuación reconstruimos de nuevo la figura seleccionando aquellos planos y formas que a nuestro ojo (culturalmente educado) le parecen esenciales. Los planos en este cuadro son tan obviamente planos que parecen hechos con trozos de papeles de colores recortados y pegados. Uno para la pipa, otro para su interior, otro para el paquete de tabaco, otro para el propio tabaco, otro para el vaso, etc. Picasso selecciona los trazos mínimos necesarios en los contornos para que puedan ser reconocidos, y se limita a rellenar la estructura que obtiene con colores sólidos. Salvo el sello y las hebras en el paquete de tabaco (y, ¡cómo resistirse a dibujarlas! son formas tan atractivas...) nada hay que no sea bloque sólido de color. Planos.

Para la pipa le bastan dos. Uno para la figura global, otro para indicar que el interior es hueco y redondo. El vaso es una copa que tiene cuello, pie, y hueco de sección redonda. Cuatro planos, pues, cada uno describiendo una de estas características. En el paquete de tabaco el pintor se dejó llevar; quizás el placer mezclado producido por el olor, el color y la forma fue excesivo. Sobre los dos planos de color sólido con los que se nos describen, respectivamente, paquete y hierba, unas filigranas negras, pocas y sin gran detalle, pero suficientes para hacernos evocar aquellas descripciones de los galanes solteros en las novelas de la adolescencia : “fulanito olía a esa mezcla tan masculina de tabaco inglés y colonia...”. El plano de la mesa, de nuevo, sólido y sobrio.

Intentamos reproducir el proceso de abstracción seguido por Picasso para construir este bodegón. Ignora la luz, ignora las texturas, ignora la naturaleza de los objetos que tiene delante. Incluso pasa por alto el volumen individual de cada objeto, reduciéndolo a planos. Sólo presta atención a cuántos objetos hay y a las formas que generan sus contornos. Probablemente, los círculos por los que el cuello de la copa se une al pie y al cuenco estuviesen decorados por collares hechos del mismo cristal. De ahí que aparezcan sus trazos. Así pues, selección de una cantidad finita de planos con los que construir la composición, sin ningún detalle salvo la forma de los contornos; y aun ésta aparece descrita de una forma bien abstracta, no hay más que fijarse en la pipa, por ejemplo.

La pipa ... ¿Por qué sé que es una pipa? Por el redondelito. Si lo quito (coloco un dedo ante mis ojos y lo tapo), podría tratarse de un palo de golf, de un bastón, de un hierro para atizar el fuego. Pero el redondelito habla de un interior vacío, es una pipa. Me cohibe un poco la astucia del ojo de Picasso. Poder expresar con un mero redondelito la diferencia entre una pipa y un bastón.

El cuadro *Verre et Pichet* es una ventana desde la que pudimos contemplar la búsqueda de las formas esenciales que diferencian las diversas cosas. La ventana *Pipe, verre et paquet de tabac* nos muestra ahora la búsqueda de una cantidad finita de formas planas esenciales con las que construir las diversas cosas. ¿Qué nos permite ver este cuadro de la construcción matemática que llevó a resolver el teorema de Fermat?

MATEMATICAS: Construcción de las soluciones a una ecuación a partir de algunas de ellas

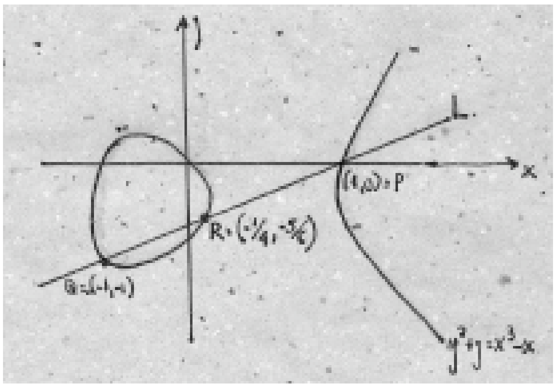
En 4.1 hemos aprendido a descomponer el proceso de búsqueda de las soluciones con números racionales de una ecuación, un proceso que requiere una infinidad de comprobaciones numéricas en pasos sucesivos, cada uno de los cuales requiere sólo una cantidad finita de cuentas. También hemos aprendido, en 4.2, que, en algunos casos, las soluciones con números racionales de una ecuación forman una estructura sencilla que consiste en rectas. El proceso seguido por Picasso de seleccionar tan sólo una cantidad finita de entre los planos y formas en que se puede descomponer un volumen nos inspira una pregunta: ¿podríamos hacer algo parecido con el problema matemático? Podríamos ser capaces de seleccionar algunas partes de la estructura formada por las soluciones de tal manera que estas partes nos permitieran reconstruirla toda ella? La respuesta, como veremos enseguida, es sí.

Los matemáticos que a finales del siglo XIX y principios del XX estudiaron la estructura de rectas que forman las soluciones de algunas ecuaciones que vimos en 4.2, se dieron cuenta de que tal estructura, además de permitirnos comparar ecuaciones (o sus curvas) y distinguir unas de otras, también nos permiten construir soluciones nuevas de una ecuación a partir de unas cuantas conocidas. Incluso encontrarlas todas, es decir, reconstruir la estructura completa que forman las soluciones a partir de unas cuantas de ellas.

Veamos como llevar a cabo esta reconstrucción en una ecuación que ya conocemos bien.

Construcción de la red de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ (1923)

Sabemos que las soluciones con números racionales de la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$.están alineadas de tres en tres. Reflexionando sobre este hecho se llega a una conclusión astuta: si cada vez que conozco dos de estas soluciones trazo la recta *L*, que une los puntos de la curva correspondientes a dichas soluciones, digamos *P* y *Q*, y busco el tercer punto *R* de corte entre la recta *L* y la curva, habré encontrado, en los números que dan sus coordenadas, una tercera solución a la ecuación. No tengo, pues, más que calcular dos soluciones por la cuenta de la vieja y utilizarlas para hallar una tercera.



Si tomamos los puntos $P = (1,0)$ y $Q = (-1,-1)$ sobre la curva, la ecuación de la recta *L* que los une es $y = (x-1)/2$. Para hallar el tercer punto *R* en que *L* corta a la curva, sustituimos la ecuación de la recta en la de la curva, y obtenemos $(x-1)^2/4 + (x-1)/2 = x^3 - x$, esto es, $4x^3 - x^2 - 4x + 1 = 0$, ecuación cúbica con tres soluciones, que son $x = 1, 1/4, -1/4$, de coordenadas *y* respectivas, $y = 0, -1, -5/8$. Nuestro nuevo punto *R* es, pues, $R = (1/4, -5/8)$.

Sigo reflexionando. He logrado hallar una tercera solución a partir de las dos primeras. ¿Ahora qué hago? No cuento con más puntos que estos tres, y todos están sobre la misma recta. ¿Qué puedo hacer para hallar más soluciones?

Lo primero que se me ocurre es calcular, otra vez por la cuenta de la vieja, una cuarta solución, dibujar su punto correspondiente S sobre la curva, y trazar las diversas rectas que unen el punto S con los puntos que ya tenía, P, Q y R. Seguro que funciona, pero si cada dos por tres he de volver a la cuenta de la vieja, no resulta muy sistemático el método que he encontrado. Sigo, pues, reflexionando. Recordando las clases de cálculo del bachillerato, encuentro la solución a mi problema: usar las rectas tangentes a la curva en los tres puntos P, Q y R. Cada una de ellas cortará la curva en un nuevo punto, que también tendrá coordenadas racionales. Conseguiré así tres soluciones más a mi ecuación.

Con mucha paciencia, y repitiendo este proceso cuantas veces quiera, podré encontrar un montón de soluciones nuevas a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$. ¿Cuántas? Ésta es precisamente la pregunta que se hicieron los matemáticos que a principios de siglo desarrollaron este método para buscar las soluciones a una ecuación del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$.¿Es posible encontrarlas todas partiendo de algunas iniciales? ¿De cuántas?

En 1923, Louis Mordell demostró, utilizando precisamente el método del descenso inventado por Fermat, que cualquier ecuación del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$. (una variable aparece al cuadrado, la otra al cubo) tiene una infinidad de soluciones racionales, todas ellas ligadas por la estructura de rectas que ya conocemos. Y también demostró que en este tipo de curvas siempre podemos encontrar una cantidad finita de soluciones que dibujadas como puntos sobre la curva correspondiente, y aplicando sobre dichos puntos este método de unirlas de dos en dos por una recta y buscar las coordenadas del tercer punto de corte entre recta y curva, llegamos a obtener todas las demás soluciones racionales. Dicho con otras palabras, siempre hay una cantidad finita de soluciones que generan geométricamente todas las demás. A partir, pues, de una cantidad finita de puntos en la estructura que forman las soluciones en números racionales, podemos reconstruir la estructura completa.

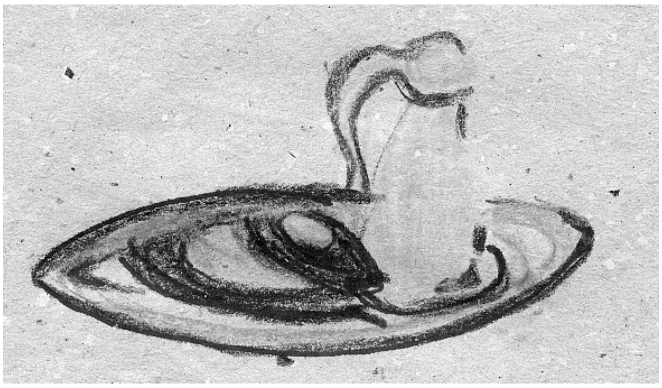
En nuestra curva concreta, $y^2 + y = x^3 - x$, el punto *P* con coordenadas *(1,0)*, por ejemplo, genera todas las demás soluciones. Primero trazo la tangente a la curva en *P*, que cortará la curva en un segundo punto *Q*. Ya tengo dos soluciones a mi ecuación. Ahora dibujo la tangente a la curva en *Q*, y el punto *R* de corte de esta recta con la curva produce una tercera solución. Uno a continuación *P* y *R* con una recta, que cortará la curva en un punto *S*, distinto a todos los que ya tengo: una cuarta solución a mi ecuación. Y así sucesivamente.

4.4 DESCRIPCION GLOBAL DE UN OBJETO ENCOLANDO DESCRIPCIONES LOCALES PICASSO: Representación de algo visto simultáneamente desde distintos ojos

Las meninas, 1957

Subo a la última planta del museo. En el pasillo, junto a una habitación llena de mosqueteros a los que parece atender, M.ªAgustina Sarmiento, la doncella de las meninas. La niña del búcaro. Para mira este cuadro conviene tener a mano una reproducción del cuadro de Velázquez (1656).

Desde que escuché a Natacha Seseña hablando en un programa de la televisión catalana sobre Velázquez, los búcaros y la bucarofagia, el pequeño jarro de barro es lo primero que buscan mis ojos en cualquier representación de Sarmiento (el trabajo de Seseña sobre este búcaro puede encontrarse en [Se] véase bibliografía). Me fijo en el dibujado por Picasso.



Una vez más me emociona el enorme talento de Picasso. Un par de líneas oscuras es todo lo que necesita para describirnos el búcaro que reposa sobre la bandeja. Tan sólo unas líneas oscuras. Un momento, hablando de líneas oscuras... ¿no resultan un poco extrañas las de la bandeja?

Abro de nuevo el cuaderno, y me pongo a dibujar la bandeja como yo la dibujaría si fuese Picasso espectador, mirando la escena de Velázquez. Comparo bandejas. En la mía, las líneas negras que delimitan el contorno interior aparecen detrás del búcaro, no delante. ¿Será que están dibujadas según las veía el pintor Velázquez, no el pintor Picasso mirando el cuadro de Velázquez? Saco una postal de las Meninas que, desde hace tiempo, y convenientemente, en este momento, utilizo como marcador de las páginas del cuaderno. Compruebo que, de estar pintadas desde donde está colocado Velázquez, las líneas negras interiores de la bandeja aparecerían del lado de la panza del búcaro, no del lado del asa. ¿Quién las ve así? Recorro con la imaginación los lugares en los que están colocados los personajes en la escena y sobre el cuaderno voy dibujando la bandeja, vista desde cada uno de ellos. Cuando acabo comparo mis dibujos con el de Picasso y la conclusión es inmediata: es la propia M.ª Agustina la que ve así la bandeja. Así pues, este cuadro podría tratar de M.ª Agustina vista por M.ª Agustina. Un par de segundos me bastan para darme cuenta de lo absurdo de esta sugerencia.

La bandeja está descrita tal y cómo la ve M.ª Agustina, pero la doncella no ve sus propios ojos, que además está claro que no casan el uno con el otro, luego ni están vistos por M.ªAgustina, ni están vistos ambos desde el mismo lugar.

Nueva hipótesis de trabajo: Picasso abandona el punto fijo, se mueve físicamente alrededor de la figura de M.ª Agustina, elige unos cuantos lugares desde donde nos da descripciones locales de la doncella y luego las casa todas en una única descripción global. No parece, en principio, una hipótesis disparatada. Al fin y al cabo, de ser correcta, se trataría de una versión siglo XX del mismo juego que practica Velázquez: moverse de sus ojos a los de los reyes y los espectadores, y de éstos, a través del espejo, a los del visitante que aparece por la puerta del fondo de la escena. En el cuadro de Velázquez algunos objetos y figuras están vistos desde un lugar, otros desde otros. En el cuadro de Picasso parece que una misma figura está vista desde varios lugares simultáneamente. Comprobémoslo, intentando averiguar cuáles son estos lugares en los que se detiene Picasso para dibujar a M.ª Agustina. Miro de nuevo el cuadro. Las claves que busco están en la bandeja sobre la que aparece el búcaro, la mano que sostiene la bandeja, el pelo y el rostro y, finalmente, en los ojos y la nariz.

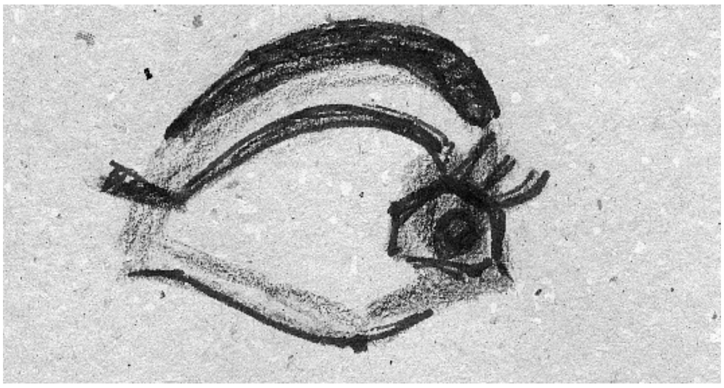
Al dibujar esta mano que sustenta la bandeja, me doy cuenta de un detalle que hasta entonces he pasado por alto: en la mano aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Esa es la clave que busco. ¿Quién está situado en la posición adecuada para poder ver esas almohadillas? Miro mi postal de Las meninas, aparecen dibujadas las almohadillas del pulgar y de la palma. Sólo el propio Velázquez, a la izquierda de M.ª Agustina, podría percibirlas. Paso a dibujar la cabeza de Sarmiento.

El pelo enmarca perfectamente el rostro, y el contorno de ambos aparece completo, como sólo puede verlos la infanta, a la que M.ª Agustina mira de frente.

La propia M.ª Agustina, Velázquez, la infanta. Picasso se va poniendo en el lugar dónde está situado cada uno de ellos y, entrenado en el proceso de la abstracción, selecciona alguna característica de la figura elegida que describir desde ese lugar.

M.ª Agustina Sarmiento nos describe la bandeja sobre la que reposa el búcaro; Velázquez, la mano que sostiene la bandeja; la infanta, el marco del rostro de M.ª Agustina.

Un hormigueo nervioso se va apoderando de mí. Tengo la sensación de que me estoy acercando a algo. Respiro hondo, intento no pensar en nada que no sea lo que estoy viendo y me pongo a dibujar el ojo izquierdo.



Al dibujarlo compruebo que hay tres claves esenciales en este ojo: el trazo horizontal de la izquierda, la acumulación de grises a la derecha y el lugar donde está dibujada la pupila.

Estas claves indican que el ojo está descrito desde el perfil derecho, esto es, desde el lugar que ocupan los reyes y los espectadores en el cuadro de Velázquez. El mismo lugar, observo, desde donde está visto el búcaro. Tiene sentido, los padres se preocupan. ¿Se dará su niña a esas veleidades de la bucarofagia?

Picasso ya nos ha descrito la figura que componen doncella y búcaro desde arriba, desde la derecha, desde la izquierda y desde delante. No puedo contenerme más. Estoy francamente nerviosa. Necesito dar un paseo, relajarme, visitar los aseos y lavarme la cara.

Intento despejarme, no paro de dar vueltas a la misma idea en la cabeza. Si fuese cierto lo que sospecho, ¡si Picasso llegase a dar *toda* la vuelta a M.ª Agustina...!

Me cruzo con una amiga en el pasillo y le cuento lo que busco. ¿Describir una figura desde los cuatro costados? Imposible, concluye incrédula. La figura se disolvería.

Yo no estoy tan segura como ella de que la figura se disolvería. Dos razones me llevan a confiar en que Picasso lo haya conseguido: que en matemáticas se puede hacer y el enorme talento de Picasso. Le he visto ya hacer demasiadas cosas difíciles como para dudar de su capacidad.

Vuelvo, pues, ante M.ª Agustina, abro el cuaderno y repaso notas y dibujos. Me falta por analizar un ojo, el de la derecha.

Lo dibujo, y al hacerlo comprendo que está mirado desde el mismo lugar desde el que está mirada la nariz.

Vuelvo a estudiar la escena de Velázquez. ¿Desde dónde está visto este perfil? Desde la izquierda de Sarmiento. Es, pues, un ojo descrito como lo ven el visitante que aparece por la puerta del fondo y los reyes a través del espejo. M.ª Agustina vista desde detrás. ¡El cuarto costado que me faltaba!

Como la veían Velázquez, la infanta, los reyes, el visitante; como se veía ella misma. Una persona vista desde delante, desde detrás, desde su izquierda, desde su derecha, e incluso desde sus propios ojos. Encolando todas esas visiones parciales y locales, Picasso nos ofrece una visión global completa, interroga a todos los testigos que estaban allí. "Me gusta su peinado", comenta la infanta, en plena edad del pavo. Velázquez, pintor, se fija en las manos. "Buen pulso sosteniendo la bandeja", concluye. "Tenía tanto miedo de que se me cayese el búcaro", confiesa M.ª Agustina. "El búcaro, el búcaro... eso es lo que me preocupa a mí", interviene la reina. "Pendiente de la niña sí parece que esté", opina el rey. Y el visitante suspira, mientras comenta, "¡Un magnífico perfil!".

PICASSO: Descripción desde dos ojos que se miran simultáneamente.

Emocionada aún por el trabajo de Picasso en el cuadro de Sarmiento, entro en la última sala de la exposición. Si se trata de describir un volumen sobre un plano a base de encolar vistas parciales y planas, no se puede hacer de forma más completa. Picasso recorre los tres ejes. En el que nos indica la profundidad nos coloca por delante y por detrás de M.ª Agustina. En el que indica la anchura, nos lleva a la izquierda y a la derecha. En el tercero, en la dimensión de la altura, nos coloca sobre M.ª Agustina. Si la madera tuviese ojos, seguro que también nos hubiese hecho mirar desde el suelo.

Pensando en miradas, recorro con la vista la habitación. Sobre la pared de la derecha, sólo, un cuadro llamativo. De lejos únicamente veo unos enormes ojos azules y verdes, de pájaro, superpuestos a un sexo femenino rosa y pálido. Ana Martínez de Aguilar, historiadora del arte y amiga, me dice: “Mira que juego de espejos tan impresionante. Picasso comiéndose con los ojos a la modelo desnuda. No puedo entrar en esta sala sin verle, a Picasso, devorando a la mujer con la vista”. Desde que Ana me regalase ese comentario, tampoco yo.

Femme assise, 1971.

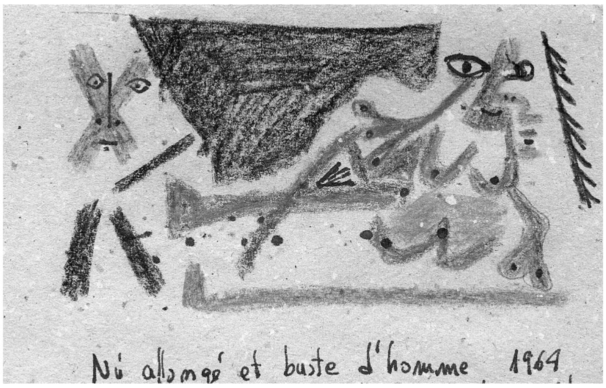
Mientras, en cuclillas frente al cuadro, lo dibujo, un grupo de niños y niñas de siete u ocho años se acercan. Les acompañan dos profesoras, y una de ellas pide a un niño que lea el título del cuadro. El niño, con dificultad, lee "fe-me-a-si-se". Grandes carcajadas. "Es que está en francés", comenta, risueña, la vigilante de la sala. "En francés", repite la profesora, "¿y por qué? ¿Cuál creéis que es la razón de que el título de este cuadro aparezca escrito en francés?" "Porque vivía en París", responde una niña desde una silla de ruedas. Para entonces un grupo ha descubierto mi dibujo, y presta más atención a mi pequeña caja de lapiceros que a las explicaciones de la maestra. Ella ni se inmuta al darse cuenta, sino que, con astucia y hacer de buena maestra, decide adaptarse a la situación. Hace cuatro comentarios generales sobre los colores del cuadro y se dirige a mi con una mirada de esas en las que se mezclan por igual complicidad y autoridad. "Disculpe, ¿podría explicarnos algo sobre este cuadro?". "¡Tierra, trágame!", pienso yo. Pero la tierra no me traga, y la mirada amable pero firme de la profesora y el revuelo de expectación entre la chavalería me empujan a superar el pudor. Como mejor puedo traduzco a palabras adecuadas a la situación el comentario de Ana. Incluso represento la escena eligiendo a una niña como modelo y actuando yo como pintor, yendo y viniendo de la niña a un ficticio caballete.

"Lo primero que observo en este cuadro es que hay lo que parece una enorme figura que está claramente dividida en dos partes. De la mitad para arriba está pintada en azul y verde. De la mitad para abajo, en rosa y blanco. ¿Qué hay, exactamente, pintado de verde y azul, y qué de rosa y blanco? De verde y azul veo dos ojos, una nariz, una boca, un pulgar (éste, ¿lo veis?, a la izquierda de los otros dedos), un brazo. En blanco y rosa se ve un pie desnudo, una mano, un sexo femenino, parte de un pecho, la parte derecha del cabello. Todo, ya sea verde y azul, o rosa y blanco, visto de frente. Leo el título del cuadro. *Femme assise*, mujer sentada. Una mujer desnuda y sentada, dibujada de la cabeza a los pies: toda la parte rosa y blanca, pero, ¿y esos ojos, y ese pulgar? ¡Claro, el pintor! El pintor que la mira, que con el pulgar la va midiendo. ¿Habéis intentado dibujar una figura alguna vez? ¿Sí? ¿Y cómo habéis medido las proporciones? Levantando el pulgar, efectivamente. Miremos el cuadro de nuevo. Aquí están, el pintor y la modelo, superpuestos en una única figura."

El grupo se disuelve, varios niños se acercan a mi y pasan unos segundos mirando mi dibujo, luego el cuadro, otra vez mi dibujo.... "¡Qué bien dibujas!", me dicen por fín. Yo respiro aliviada y río de alegría al saberme aprobada por tan honesto tribunal.

La sala vuelve a quedarse en silencio, y yo sigo dibujando y dando vueltas en la cabeza a lo que acabo de decirles a los niños. ¿Por qué elige el pintor superponer sus ojos al cuerpo de la modelo? ¿Cuál es el *objeto* representado en el cuadro? En *Hombre con clarinete* Picasso representa la descomposición de un volumen en planos, en *Verre et Pichet,* las formas esenciales que relacionan los diversos volúmenes, en *Pipe, verre et paquet de tabac*, la composición de un volumen con unos cuantos planos sólidos de color, en *Las meninas*: *M.ª Agustina Sarmiento*, la descripción de un volumen sobre un plano mediante el encolado de descripciones planas y locales dadas desde todos los costados posibles. ¿Cuál es el objeto que Picasso representa en este nuevo cuadro?

Si hubiera querido representarnos a un pintor pintando a una modelo lo habría hecho. A mi izquierda observo un cuadro en el que lo hace. ¡Y de qué manera! El pintor es una equis, un aspa, dos rectas que se cortan. Nada más que un sistema de referencia desde el que se describe la modelo. Según este sistema de referencia se va moviendo alrededor del cuerpo reclinado, se obtienen las distintas visiones de éste.



Deduzco que el objeto representado en *Femme assise* no es un pintor que pinta una modelo. ¿Qué es, entonces? Él mira hacia ella. Ella mira hacia él. La inversión en la orientación, de la parte superior de la figura a la parte inferior, nos habla de un juego de imágenes especulares hecho explícito.

¿Un intercambio de miradas? No. Ella le mira a él, pero él no la mira a ella, mira su sexo. Un cuadro que describe el juego de espejos entre dos miradas —él soñando con ella, ella halagada en su vanidad— ya no es tan sólo una representación pictórica. Es un relato de cómo ven misma la escena dos los personajes que la representan.

Dios ha creado las noches que se arman
De sueños y las formas el espejo
Para que el hombre sienta que es reflejo
Y vanidad. Por eso nos alarman
(del poema *Los espejos* de J. L. Borges)

MATEMATICAS: Información global que sobre una ecuación dan sus soluciones locales

A través de los dos últimos cuadros de Picasso hemos podido contemplar una misma figura del modo en que la ven simultáneamente diversos observadores colocados en corro a su alrededor, y una misma escena tal como la viven simultáneamente sus dos actores. El logro es enorme. Como lo es el que nos muestran las matemáticas que vemos desde las ventanas que nos ofrecen estos cuadros: la demostración de Andrew Wiles del último Teorema de Fermat.

La Conjetura Modular (1955)

Años cincuenta, Japón. Dos jóvenes estudiantes de matemáticas de la Universidad de Tokio, Taniyama y Shimura. La Segunda Guerra Mundial ha causado estragos en su país, y los profesores no les prestan demasiada atención. Taniyama y Shimura pasan muchas horas estudiando ecuaciones del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$ (una variable aparece al cuadrado, la otra al cubo) y analizando la estructura de rectas que forman sus soluciones. Es demasiado grande, demasiado extensa. No logran ver qué forma tiene en su globalidad. ¿Y si la descompusiesen en pequeños módulos finitos utilizando las técnicas de Hensel? Al principio no encuentran gran cosa, pero al cabo les parece reconocer algo. Si se la mira localmente, descompuesta en pequeños módulos, esta estructura ofrece una gran cantidad de simetrías, y sólo se sabe de un cierto tipo de estructuras, en matemáticas, que ofrezcan tal cantidad de ellas. Se trata de estructuras muy complicadas y globales, cuya forma se conoce bien, que surgen en matemáticas en el siglo XIX de la mano del estudio de las geometrías no euclídeas. Con la falta de miedo que caracteriza a los jóvenes, Taniyama y Shimura acometen la tremenda tarea de comparar ambas. Pasan horas y horas en la biblioteca, mirando en libros, revisando notas y, finalmente, llegan a forjarse una opinión: ambas estructuras coinciden. Las pequeñas piezas que van formando las soluciones de la ecuación en los diversos módulos coinciden con partes de la estructura geométrica que han encontrado. La opinión de Taniyama y Shimura no era más que eso: una opinión. Basándose en la potente intuición de Taniyama y en horas y horas de cuentas, los estudiantes estaban convencidos de hallarse ante un hecho cierto. Pero no sabían cómo demostrarlo, ni tampoco tenían conocimientos de la materia lo bastante profundos para entender las consecuencias de su hallazgo, de ser éste cierto (una descripción detallada de esta experiencia puede verse en el vídeo y leerse en el texto que aparecen en [Si], véase bibliografía).

En 1955 Taniyama y Shimura presentan sus trabajos en un congreso internacional de matemáticas que tiene lugar en la ciudad de Tokio. El matemático francés André Weil, hermano de la filósofa Simone Weil, asiste al congreso y reflexiona sobre lo que exponen Taniyama y Shimura. Él sí tiene conocimientos profundos sobre las estructuras de rectas que forman las soluciones de las ecuaciones que estudian los jóvenes, tanto vistas globalmente como vistas localmente, y también conoce bien las estructuras llenas de simetrías que éstos creen reconocer en las primeras cuando se las mira localmente desde los módulos.

Weil estudia la sugerencia de Taniyama y Shimura, y sus posibles consecuencias, de ser cierta. Entre otras cosas, significaría que la descripción local de las soluciones de la ecuación nos permite reconocer las propiedades globales geométricas de la curva que representa dicha ecuación. En otras palabras: la sugerencia de los jóvenes japoneses permitiría traducir el número de soluciones de la ecuación en los sucesivos módulos en una descripción global de la curva.

Si Taniyama y Shimura están en lo cierto, la serie de números *4, 6, 7, 8,* ... que construimos en 4.1 listando el número de soluciones a la ecuación $y^2 + y = x^3 - x$ describe con toda precisión la geometría global de la curva de la ecuación. Y lo hace de la misma manera que los cuadros *M.ª Agustina Sarmiento* y *Femme assise* de Picasso. Por un lado, y como ocurre en el primero de los cuadros, la conexión hallada por Taniyama y Shimura nos ofrece una manera de encolar información proveniente de la curva vista desde todos sus costados en una descripción global única. Por otro lado, y como hace el segundo cuadro, describe con una sola pieza matemática la situación, tal y cómo se ve simultáneamente desde la mirada aritmética y desde la mirada geométrica.

Weil logró entender el significado profundo de la sugerencia de Taniyama y Shimura, y también llegó a convencerse de su plausibilidad. Pero no logró demostrar que fuese cierta.

Desde entonces, la sugerencia de que la geometría de las curvas del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$ es de un tipo específico y completamente clasificado en matemáticas y que para identificarla basta con describir localmente el conjunto de soluciones a la ecuación en los distintos módulos se conoce con el nombre de Conjetura Modular.

Esta Conjetura Modular, finalmente demostrada en 1999 ([BCDT], véase bibliografía) se consideró durante la segunda mitad del siglo XX uno de los resultados matemáticos más difíciles de verificar, y su demostración, una de las más buscadas, ya que establece un puente muy útil entre las soluciones locales de ecuaciones (en los sucesivos módulos) y las propiedades geométricas globales de curvas. Un puente analítico (esto es, que se construye con herramientas de la rama matemática conocida como análisis) entre la aritmética y la geometría.

La demostración de Wiles del último teorema de Fermat (1994)

A lo largo del siglo XIX era frecuente entre los miembros de la comunidad matemática intentar demostrar el último teorema de Fermat. Pero a principios del siglo XX los intentos eran cada vez más escasos. El teorema se consideraba excesivamente difícil, y tan alejado de la línea central de la investigación matemática del momento que no merecía la pena perder el tiempo con él.

Esta situación cambió, sin embargo, en los años ochenta. En 1987 un resultado de Ken Ribet colocó el último Teorema de Fermat, una vez más, en el corazón de las investigaciones matemáticas del momento (la historia que pasamos a relatar a continuación puede leerse y verse en [Si], véase bibliografía).

La estrategia para demostrar el último Teorema de Fermat que vamos a explicar se le ocurrió al matemático G. Frey ([Fr] , véase bibliografía). Comencemos por ilustrarla con un ejemplo. Los números 3, 4 y 5 están ligados por la ecuación $3^2 + 4^2 = 5^2$, ya que 9 + 16 = 25. En consecuencia, y utilizando el teorema de Pitágoras, si construimos un triángulo cuyos lados midan, respectivamente, 3, 4 y 5 unidades, este triángulo tendrá uno de sus ángulos rectos. Por otro lado, si construimos un triángulo cuyos lados midan 3, 4 y 7 unidades respectivamente, encontraremos que ninguno de sus ángulos es recto, No existe ningún triángulo rectángulo cuyos lados midan 3, 4 y 7 unidades, de lo que deducimos que $3^2 + 4^2 \neq 7^2$.

La idea de Frey es la siguiente: supongamos que Fermat estuviese equivocado. Eso significaría que podríamos encontrar cuatro números distintos de cero, llamémosles *a, b, c* y *n*, ligados por la ecuación $a^n + b^n = c^n$. Cuatro números no son más que cuatro datos numéricos. Con tres números podemos construir, por ejemplo, un triángulo que tenga esos números como lados en unidades de longitud, y las propiedades del triángulo —que sea rectángulo o no, por ejemplo— nos dan información sobre la relación aritmética entre los tres números (que la suma de los cuadrados de dos de ellos coincida con el cuadrado del tercero, por ejemplo). Si tenemos cuatro números, podemos utilizarlos como medidas para construir muchos objetos. Un cuadrilátero cuyos lados midan, respectivamente, *a*, *b*, *c* y *n* unidades. Una mesa, con un tablero que mida *a* unidades de largo, *b* unidades de ancho y tenga *c* unidades de grosor, y unas patas de *n* unidades de altura.

Muchos son los objetos que pueden construirse a partir de cuatro números, y como Frey es especialista en curvas del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$, se le ocurrió que, de estar Fermat equivocado, y existir tales números *a, b, c* y *n*, podrían ser utilizados como medidas para construir una curva parecida a $y^2 + y = x^3 - x$, concretamente la curva $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$. A esta curva se la conoce con el nombre de curva de Frey,

Puesto que la curva de Frey se construye tomando como medidas cuatro números *a, b, c* y *n*, con $a^n + b^n = c^n$, cuya existencia es hipotética, la existencia de esta curva también es hipotética. Si los números de hecho existen, la curva también existirá y, recíprocamente, si la curva no existe, los números tampoco. La misma situación que teníamos unos párrafos más arriba con los tres números y el triángulo rectángulo. Si los tres números a, b, y c verifican $a^2 + b^2 = c^2$, existirá un triángulo rectángulo cuyos lados midan esos números y, recíprocamente, si un triángulo construido con lados de medidas *a, b,* y *c* no es rectángulo, entonces es que $a^2 + b^2 = c^2$.

Frey sugirió la posibilidad de demostrar la afirmación de Fermat probando que no existe ninguna curva con ecuación $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$, donde *a* y *b* son números ligados por la relación

$a^n + b^n = c^n$. Pero demostrar que una curva no existe es una tarea muy difícil, por lo que la sugerencia de Frey de resolver el último Teorema de Fermat demostrando que una cierta curva no existe no parecía simplificar mucho la cuestión. Y entonces llegó la sorpresa.

En 1987, Ken Ribet demostró que, de existir la curva de Frey, la estructura de su conjunto de soluciones locales no tendría la forma descrita por Taniyama, Shimura y Weil ([Ri], véase bibliografía).

El trabajo de Ribet abrió una nueva puerta. Si se lograse demostrar que Taniyama, Shimura y Weil tenían razón, y que el conjunto de soluciones de toda curva existente del tipo de $y^2 + y = x^3 - x$, y de $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$ (en las que una variable aparece al cuadrado y otra al cubo) tiene una cierta forma, el resultado de Ribet nos daría una demostración del Teorema de Fermat: si existen cuatro números *a, b, c* y *n*, con $a^n + b^n = c^n$, existe la curva $y^2 = x(x - a^n)(x + b^n)$, pero esta curva no puede existir porque sus soluciones locales no tienen la estructura que las soluciones locales a curvas de este tipo deben tener.

Por fin se había encontrado un camino para demostrar el último Teorema de Fermat, y un camino que conectaba este teorema con el cuerpo central de la investigación matemática en el siglo XX.

Así pues, desde 1987 la situación estaba clara para la comunidad matemática: bastaría con demostrar la Conjetura Modular para, finalmente, tener una demostración del último Teorema de Fermat. En aquellos años, para la mayor parte de la gente de la matemática esta situación era comparable a abandonar la sartén para caer en las brasas, puesto que demostrar la Conjetura Modular se consideraba un problema matemático mucho más difícil aún de resolver que el último Teorema de Fermat. Pero esa “mayor parte de la gente” no incluía a Andrew Wiles. Después de siete años trabajando en soledad sobre ello, Wiles consiguió demostrar en 1994 la Conjetura Modular para una familia infinita de curvas entre las que estaría, de existir, la construida con la hipotética solución a la ecuación de Fermat. De esta manera, combinando el trabajo de muchos matemáticos, y siguiendo la estrategia iniciada por Hensel de describir globalmente una curva a base de juntar descripciones locales, el enunciado de Fermat quedó demostrado, y uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas quedó resuelto.

EPÍLOGO

Evoquemos de nuevo las palabras de Wiles.

> *"Quizás la mejor manera de describir mi experiencia haciendo matemáticas sea comparándola con entrar en una mansión oscura. Entras en la primera habitación, y está oscura, completamente a oscuras. Vas dando tumbos, tropezando con los muebles. Poco a poco aprendes donde está cada mueble, y finalmente, después de más o menos seis meses, encuentras el interruptor de la luz y lo conectas. De repente todo se ilumina, y puedes ver exactamente dónde estás. Entonces entras en la siguiente habitación oscura..."*

La experiencia de Wiles la hemos vivido casi todos a lo largo de nuestra vida profesional. Si los cuadros de Picasso me han ofrecido ventanas desde las que mirar las matemáticas, la mirada matemática me ha abierto la posibilidad de vivir, mirando cuadros, la misma experiencia que vivo al hacer matemáticas: la emoción del descubrimiento del interruptor.

No es sólo la emoción lo que tiene de valioso esta experiencia, con ser la emoción importante. Es el descubrimiento, individual e íntimo, de que los trazos abstractos esenciales a nuestra cultura no están fuera de nuestro alcance, sino que forman parte de nuestro bagaje por el simple hecho de vivir, desde que nacemos, inmersos en ella. Todos contamos con las herramientas adecuadas para reconocer estos trazos y entenderlos. Nos las va dando la formación matemática que, seamos conscientes o no de ello, vamos recibiendo a lo largo de nuestra vida (las clases de matemáticas en la escuela, las horas pasadas cada día ante tanto objeto diseñado desde la matemática y tanta información organizada desde la matemática).

Descubrir este hecho hace posible el desarrollo de una mirada propia. Las matemáticas con las que contamos todos y cada uno de los miembros de nuestra sociedad que hemos pasado por un bachillerato son suficientes para dar el salto que supone enfrentarse libremente, por ejemplo, a los cuadros de Picasso. Las matemáticas nos entrenan para crear preguntas propias, para desarrollar métodos propios, para experimentar la satisfacción del (re)conocimiento íntimo de algo.

La decisión de la Unesco de que el siglo XX se cerrase con un Año Internacional de la Matemáticas, supuso todo un reto para la comunidad matemática. Nos sacó de nuestras facultades y centros de investigación, haciéndonos debatir con otros científicos y profesionales. Nos hizo abandonar nuestras aulas universitarias y tomar parte en tareas de divulgación. Nos llevó a las calles, donde intentamos acercar las matemáticas al resto de los ciudadanos. Y nos llevó a la reflexión profunda, como individuos y como grupo, sobre la naturaleza de nuestro trabajo.

La conclusión que, como matemática profesional, yo extraje de ese año de trabajo y diálogo, y que he querido transmitir a lo largo de estas páginas, es clara: una de las contribuciones más importantes y más pasadas por alto que las matemáticas hacen al desarrollo de nuestra sociedad es su fundamental papel en la construcción de una mirada propia.

Vivimos en una época en la que estamos sometidos a un bombardeo constante de información, imágenes y sonidos. ¿Cómo llevar a cabo el necesario proceso de selección? ¿Cómo dosificar el exceso y eliminar los ruidos? Es esencial que desarrollemos cada uno de nosotros una manera propia de mirar. Porque esas miradas propias son los únicos hilos con los que es posible tejer una red sólida que deje pasar la luz, pero no las piedras, que sea elástica y permeable, pero no se rompa ni deforme.

Es responsabilidad de los matemáticos poner de manifiesto lo que las matemáticas pueden contribuir en este proceso. Y es responsabilidad del resto de la sociedad, cada uno desde su lugar, el escucharnos.

BIBLIOGRAFIA

[B] Jorge Luis Borges, *El hacedor* (1960), en *Obras completas,* volumen II, Círculo de Lectores, Barcelona, 1995.

[BCDT] Christopher Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, Richard Taylor, *On the modularity of elliptic curves over Q: Wild 3-adic exercises*, JournalA.M.S. **14** (2001), págs. 843-939.

[C-1] Capi Corrales Rodrigáñez, *Dallo spacio come contenitore allo spazio come rete*, en *Matematica e Cultura 2000*, Michele Emmer (ed.), Springer-Verlag. Milán, 2000, págs. 123-138.

[C-2] Capi Corrales Rodrigáñez, *Contando el espacio*, ediciones despacio. Madrid, 2000.

[D] René Descartes, *La géométrie*, apéndice a *El discurso del método* (1639).

[E] Harold M. Edwards, *Pierre de Fermat*, en *Grandes matemáticos*, *Investigación y Ciencia*, Temas 1, Prensa Científica S.A. Barcelona,1995.

[Fe] Pierre de Fermat, *Ad locos planos et solidos isagoge* (1636).

[F] Gerhard Frey, *Links between stable elliptic curves and certain Diophantine equations*" en *Ann. Univ. Saraviensis, Ser. Math.* 1 (1986), págs. 1-40

[G] Catherine Goldstein, *Fermat, Number Theory and History*, en *Cuatrocientos años de matemáticas en torno al Ultimo Teorema de Fermat*, Carlos Andradas y Capi Corrales Rodrigáñez (eds.), Editorial Complutense. Madrid, 1999, págs. 1-22.

[K 1] Daniel-Henry Kahnweiler, *Juan Gris* (1946), Quaderns Crema. Barcelona, 1995.

[K 2] Daniel-Henry Kahnweiler, *El camino del Cubismo* (1963), Quaderns Crema. Barcelona, 1997.

[P] *Picasso en las colecciones españolas*, catálogo de la exposición del Museo de Arte Contemporáneo Esteban Vicente de Segovia, Segovia, 2000.

[R] Roshdi Rashed, *Regiones árabes: intersección del álgebra y la geometría*, en *Viaje al país de las matemáticas*, *El Correo de la UNESCO*. París, noviembre de 1989.

[Ri] Ken Ribet, *On modular representations of Gal (bQ/Q) arising from modular forms*, en *Inv. Math.* **100** (1990), págs. 431-476.

[S] Natacha Seseña, *El búcaro de las meninas*, en *Velázquez y el arte de su tiempo*, Jornadas de arte, Centro de Estudios Históricos del CESIC. Madrid, 1991.

[Si] Simon Singh, *Fermat´s Last Theorem*, BBC-1997, Programa *Horizon.*

[U] Miguel de Unamuno, *Tratado de cocotología* (1902), Almacenes Generales El Papel S.A. Barcelona 1969.

[Y] Adolf P. Youschkevitch, *Les mathématiques arabes (VII-XV siècles)*, Vrin. Paris 1976.

[W] Andrew Wiles, "Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem", en *Annals of Mathematics,* vol. 141, n.° 3, 1995, págs. 443-551.