Historia

Sección a cargo de

Antonio J. Durán[1]

La matemática y sus elementos: de Euclides a Bourbaki[2]

por

Jesús Hernández

1. Introdución

Así escribe un matemático a otro: «Vous auriez vu peut-être qu'on a eu la mauvaise pensée de publier dans le *Giornale di Napoli* les banalités de M. Wilson contre Euclide, aven une *ignoble note* du traducteur. M. Brioschi et moi nous ne tarderons pas beaucoup à repondre, car nous sommes convaincus que, dan l'ètat actuel de nos écoles secondaires classiques, *l'Euclide* est le meilleur teste (sic) qu'on puisse choisir. Sans doute qu'il serait mieux de substituer un *Euclide revised* à l'édition trop precipité (sic) fait à Florence sous le nom de MM. Betti et Brioschi[3]».

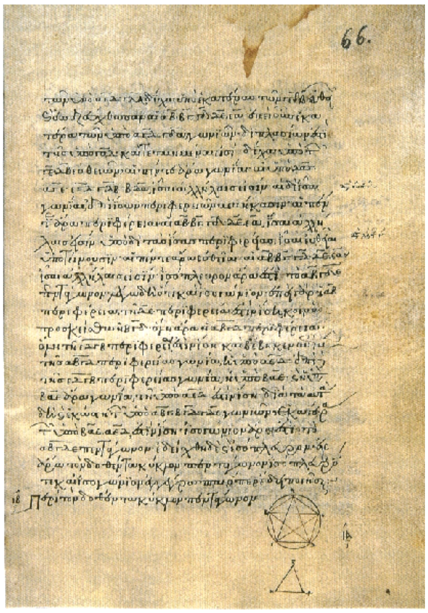
La carta lleva fecha de 29 de enero de 1869 y su destinatario es un conocido matemático francés, Christian Hoüel. Su autor es aun más conocido, se trata

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Antonio J. Durán; Sección Historia Gaceta RSME; Departamento de Análisis Matemático; Facultad de Matemáticas; Universidad de Sevilla; Aptdo. 1160; 41080–Sevilla; `duran@us.es`

[2]Este artículo es una versión ampliada de la conferencia del mismo título dada en el Seminario "Histoires de Géometrie" –París, Maison de Sciences d l'Homme– el día 11 de junio de 2001 y publicada en las actas del Seminario del año 2001, pp. 29–41. El autor da las gracias al director del Seminario, Dominique Flament, por su invitación y su permiso para utilizar el texto. Y también a A. J. Durán y J. Ferreirós por sus comentarios a la primera versión. Hemos procurado conservar el tono *ensayístico* de la exposición oral. Salvo que se diga otra cosa, las traducciones son nuestras.

[3]En *La corrispondenza di Luigi Cremona (1830–1903)*, a cura di Ana Millán Gasca. Quaderni della Rivista di Storia della Scienza **1**, (1992), p. 88. Hemos conservado el francés, ortografía incluida, por su sabor.

de Luigi Cremona, uno de los padres de la geometría algebraica italiana y uno de los matemáticos más influyentes en la Italia de la época –y no sólo allí–, que llegó incluso a ocupar un puesto tan importante como el de ministro de educación. Pues bien, este texto muestra, sin lugar a dudas, que hace poco más de cien años alguien, tan especialmente bien situado para decirlo como él, sostenía que *el Euclides* seguía siendo todavía –quizá con algún retoque– el mejor *libro de texto* imaginable.



Manuscrito griego de los "Elementos" s. XI-XIII. Biblioteca *del Monasterio de El Escorial*

Hacia la misma época Lewis Carroll, que era *también* profesor de geometría, llevó a cabo un serio examen de una docena de textos llegando a la conclusión de que todos ellos eran inferiores a los *Elementos*; poco antes había utilizado implacablemente su lápiz de censor en alguno comprado por su hermana. Para Carroll el criterio más definitivo era el del rigor lógico[4]. Y es que todavía hacia 1850 se estudiaba en las escuelas inglesas la versión de Euclides establecida por Robert Simson en 1756[5]. Digamos de paso que el prefacio a la primera edición inglesa se debe a John Dee, que era *también* mago y astrólogo real, quien consideraba la geometría importantísima para la salvación eterna. No se sorprenda demasiado el lector: antes bien, piense en algunas de las actividades del Newton *oculto* o en los finos análisis de Paolo Rossi de la obra del canciller Bacon.

Quienes hacen las afirmaciones anteriores se inscriben en una gloriosa tradición con más de veinte siglos de antigüedad. Porque los *Elementos*, de cuyo autor, Euclides, sabemos muy poco, casi nada –fue «una rama del saber más que un hombre», dice E.M. Forster en su guía de Alejandría–, no sólo fundaron la ciencia matemática proporcionando sus ingredientes y estableciendo su manera de proceder para muchos siglos, sino que también fueron usados muy a menudo como libro de referencia en casi todos los niveles de la enseñanza; con los cortes, añadidos, comentarios, etc., que en cada caso se consideró oportuno

[4]Heilbron 1998, p. 4.

[5]Ibid., p. 11. Sobre la evolución del uso de los *Elementos* a lo largo de la historia, cf. Vega 1991, p. 46-47 y *passim*.

hacer. Los *Elementos* suelen figurar, junto con la *Biblia* y el *Quijote*, en esas listas de libros más editados y traducidos que se dan a la hora de hacer balance de la cultura occidental y de las que siempre se desconfía un poco.

Sabemos, sin lugar a dudas, que hubo otros libros del mismo género antes del de Euclides, aunque lamentablemente no se haya salvado ningún fragmento de ninguno de ellos. Menos sencillo es contestar a la pregunta de si ha habido otros después, e incluso cabe interrogarse sobre la pregunta misma. ¿En qué sentido podemos decir que un libro –o un conjunto de ellos– ha hecho o hace el mismo papel? En todo caso, se diría que para los matemáticos de la segunda mitad del siglo XX, la mejor respuesta posible, tal vez la única, es los *Eléments de Mathématique*, de Nicolas Bourbaki, entre otras razones por la aparente ausencia de competidores.

No ha habido, se diría, ninguna situación semejante en las demás ciencias. Las experimentales se han venido constituyendo como tales ciencias en períodos mucho más tardíos –piénsese en la química o la geología– y la vigencia de sus textos clásicos fue infinitamente más corta: basta poner frente a frente la suerte corrida por los *Elementos* y por los *Principia*, publicados casi dos mil años después.

Aunque, pensándolo bien, sí que hay una parecida, y es la de la Lógica, que podemos considerar convencionalmente como fundada por Aristóteles. Siempre a costa de simplificar un tanto las situaciones, podemos decir que también aquí hay unos textos clásicos –los *Analíticos*, etc.– que sirvieron de modelo y referencia obligados por lo menos hasta Kant y aun después –sobre todo en la lógica escolástica superviviente–. Hagamos de paso la observación, que no podemos desarrollar por falta de espacio, de que las fechas de los grandes cambios que empiezan a hacerse en la lógica en el siglo XIX coinciden, *grosso modo*, con las de la aparición y difusión de las geometrías no euclídeas.

El paralelo/contraposición Euclides-Aristóteles no es nuevo, sino más bien todo lo contrario. Mucho se ha discutido sobre el asunto, y cabe pensar que se siga haciendo, aunque no es fácil adivinar qué nuevos elementos de juicio podrían modificar los planteamientos hechos hasta nuestros días. El libro clásico de Bruncsvicg nos ofrece una excelente síntesis: «En el estudio histórico de las obras que han dejado su huella en la concepción filosófica de la ciencia, los *Elementos* de Euclides se presentan inmediatamente después de los *Analíticos* de Aristóteles. Una y otra obra han tenido el mismo destino: han atravesado los siglos alejadas de todo aquello que podía precederlas y seguirlas, ofreciendo el marco de un rigor que parecía irreprochable y señalando una cumbre de perfección cuya superación era empresa desesperada. Mediante ellas la razón antigua ha modelado, en cierto modo, el pensamiento moderno. Euclides ha sido, para las muchas generaciones que se han nutrido de su sustancia, menos un profesor de geometría que un profesor de lógica. La forma deductiva de los *Elementos* evidencia y consagra la universalidad de aplicación de que era capaz la lógica de Aristóteles[6]».

Desde un punto de vista bien alejado del filósofo de la matemática que era Brunschvich, los Bourbaki muestran sus preferencias con la claridad habitual: «Conviene notar aquí que no parece que los trabajos de Aristóteles o de sus sucesores hayan tenido una influencia notable sobre las matemáticas. Los matemáticos griegos continuaron su trabajo en la dirección iniciada por los pitagóricos y sus sucesores del siglo IV –Teodoro, Teeteto, Eudoxo– sin preocuparse aparentemente de la lógica formal en la presentación de sus resultados, cosa que no debe extrañarnos si comparamos la precisión y flexibilidad adquiridas ya en esta época por el razonamiento matemático y el estado rudimentario de la lógica aristotélica. Y, al superar la lógica este estadio, serán precisamente los nuevos progresos de las matemáticas los que orienten su evolución[7]».

Pero sí hay una filosofía que ha influido sobre los *Elementos*, al menos si hemos de hacer caso a Arpád Szabó, un filólogo recientemente fallecido a quien se debe alguna de las obras más importantes –y más discutidas– sobre el nacimiento de la matemática en Grecia. Szabó entiende –simplificamos– la obra de Euclides como una forma de refutación de la filosofía eleática, y en particular de las paradojas de Zenón contra el movimiento. Sin espacio para más, algunas de sus ideas principales quedan resumidas en el párrafo que sigue: «Pienso pues que son los problemas planteados en geometría los que han dado lugar a la edificación del sistema teórico de las matemáticas. Es cierto que la doctrina eleática se aplica más fácilmente en aritmética que en geometría; esa es la razón por la que la aritmética era para los griegos la ciencia primera, viniendo la geometría sólo en segundo lugar, pero se trataba sólo de una jerarquización teórica de estas dos disciplinas. La matemática de Euclides es esencialmente geometría, e incluso la aritmética se presenta en su obra en forma geométrica. Es la consecuencia natural del hecho de que son esencialmente problemas geométricos los que han suscitado la confrontación con la filosofía eleática, debate que terminó con la fundación teórica de la geometría[8]».

Pero es que las matemáticas y la lógica, relacionadas entre sí de tantas y tan complicadas maneras a lo largo de la historia, tienen muchas cosas en común. Una de ellas, en particular, resulta aquí relevante: ambas cambian, y mucho, durante la segunda mitad del siglo XIX, algo de lo que ofrecimos un ejemplo más arriba, y tales cambios han conformado decisivamente lo que han sido y lo que son hoy. ¿Hay algo en común en los respectivos cambios y, de ser así, qué es? ¿Hay alguna razón para su coincidencia, más o menos aproximada, en el tiempo? Y si así fuese, ¿se iluminan recíprocamente tales cambios?

---

[6]Brunschvicg, 1972, p. 84.
[7]Bourbaki 1976, p. 17.
[8]Szabó 1977, p. 350. Puede verse también Vega 1990, p. 55-69 y 378-385.

2. La segunda mitad del siglo XIX: Los *Fundamentos de la Geometría* de Hilbert

Dejando sin contestar, entre otras razones por falta de espacio, las preguntas anteriores, nos limitaremos a partir de ahora a las matemáticas. Y, continuando con las simplificaciones, no se dirá nada de algunos intentos de re-exponer o re-formular la geometría de Euclides que pueden tener interés desde nuestro punto de vista: nos referimos a los de Clavio, las gentes de Port-Royal y en especial Arnauld, y Clairaut. Pasamos pues sin más al siglo XIX y a todo lo hecho en cuanto a la presentación axiomática de la geometría, una tarea que suele aceptarse culmina con los *Fundamentos de la Geometría*, de Hilbert, cuya primera edición se publicó en 1899[9].

Comencemos por dar una lista, en absoluto exhaustiva, de los muy heterogéneos ingredientes que intervienen en los cambios arriba aludidos:

(i) La aparición de las *geometrías no euclídeas*: en torno a 1830 Gauss, Lobatschevsky y Bolyai llegan más o menos independientemente a la conclusión de que es posible desarrollar geometrías distintas de la euclídea en las que el axioma de las paralelas es sustituido por otros y que resultan ser consistentes desde el punto de vista lógico. Señalemos que estos resultados no se difunden con cierta amplitud hasta bastante después, como hacia 1860;

(ii) El llamado *Programa de Erlangen* (1872), de Félix Klein, donde las distintas geometrías son presentadas en términos de los correspondientes grupos de transformaciones, resultando ser propiedades geométricas aquellas que son invariantes por los grupos de cada una; además, las relaciones de subordinación o generalidad entre las distintas geometrías se expresan en términos de subgrupos. Sucede algo parecido al caso anterior: hubo que esperar hasta 1890, más o menos, para una difusión importante;

(iii) La *axiomatización de la geometría*: tanto Pasch en 1882 como los matemáticos de escuela italiana –Pieri, Padoa, Peano, etc.– y, sobre todos, Hilbert, con sus *Fundamentos de Geometría* (1899), ofrecen versiones axiomáticas de la geometría, sin limitarse a la euclídea y que tendrán, en buena parte gracias al prestigio de Hilbert, un impacto considerable e inmediato;

[9]Hubo varias ediciones, en las que se modificó la presentación, añadiéndose varios apéndices, algunos relativos a los fundamentos de la matemática. Hay traducción castellana de la séptima edición (1930), de F. Cebrián, de la que el C.S.I.C. ha publicado una reedición en facsímil en 1991, con una introducción de J. M. Sánchez Ron. Es una lástima que no se aprovechara para una nueva traducción, o al menos para corregir algunos errores e impropiedades.

(iv) El *Zahlbericht* –Informe sobre los números algebraicos–, de 1897, también de Hilbert, que tuvo mucha menos influencia sobre el gran público que los *Fundamentos*, pero que cambió por completo la teoría de los números algebraicos y supuso un impulso importante para el desarrollo del álgebra abstracta;

(v) La *teoría intuitiva de conjuntos* de Cantor –y Dedekind– que, partiendo de problemas con las series de Fourier, no sólo da lugar al estudio de los diversos subconjuntos de $\mathbb{R}$ –y de $\mathbb{R}^n$– y después de los conjuntos *abstractos*, con la distinción de los distintos tipos de infinitos –cardinales y ordinales–, sino también a progresos importantes en la topología y la teoría de la medida. Las paradojas surgidas en la teoría, la más conocida de las cuales es seguramente la de Russell, darán lugar –al menos en la versión más convencional y extendida[10]– a lo que se ha solido llamar "Crisis de fundamentos" –hacia 1890-1930– que se cierra con los resultados de Gödel (1931);

(vi) Los distintos ejemplos de *existencia de funciones "patológicas"*, que iban contra intuiciones geométricas muy arraigadas, y que irritaron profundamente a matemáticos de la talla de Poincaré y Hermite: funciones continuas en un intervalo sin derivada en ningún punto –Weierstrass–, curvas de von Koch, curvas de Peano y otros que "llenan" un cuadrado, etc.;

(vii) La publicación en torno a 1872 de varias *presentaciones de los números reales*, racionales e irracionales, siguiendo vías distintas, debidas a Dedekind –cortaduras–, Weierstrass –series–, Cantor –sucesiones fundamentales–, du Bois-Reymond, y otros. Con ellas culmina el proceso que se ha dado en llamar *aritmetización del análisis*, y que suele considerarse comienza con Gauss y Cauchy;

(viii) Las aportaciones hechas, sobre todo por Dedekind, en la dirección del *álgebra abstracta*: axiomatización de la geometría proyectiva, exposición de la teoría de Galois en términos de automorfismos de grupos y, sobre todo, desarrollo de la teoría de ideales, que ha sido una de las grandes inspiraciones del álgebra del siglo XX[11].

Cabe preguntarse ahora, ante esta lista que haría pensar a un lector malicioso en un inventario *a lo Prévert* o en la clasificación de los animales de Borges, en la incidencia que haya tenido cada uno de los apartados anteriores en los cambios sufridos por la matemática en el periodo posterior. En particular, y para lo que aquí interesa más, en su influencia sobre los textos que, de una manera u otra, pudieran desempeñar un papel análogo a los *Elementos*.

[10]Para una versión distinta y más elaborada, cf. Moore y Garciadiego 1981, así como Garciadiego 1992.

[11]Cf. Corry 1996.

En este sentido, el candidato mejor situado es, con diferencia, los *Fundamentos de la Geometría*, de Hilbert, en la medida en que vuelven a presentar –además de mucho material nuevo– el mismo de Euclides, que quien lo hace es uno de los mejores matemáticos de la época, y que además ya había comenzado a mostrar interés por las cuestiones de fundamentos. ¿Qué hay, entonces, de fundamentalmente nuevo con respecto a Euclides? ¿Por qué se plantea Hilbert tales cuestiones precisamente en ese momento? Según Luis Vega: «De ahí no se sigue que los *Elementos* sean el acta inaugural del método axiomático clásico de los siglos XVII-XIX, aunque sí constituyen una especie de preludio y ofician como un tópico casi obligado de referencia. Más adelante volveré sobre este punto, donde conviene hacer otra distinción de importancia: entre la "axiomatización" euclídea, i.e., la trama deductiva de los *Elementos*, y la axiomatización "euclidiana", i.e., el método axiomático desarrollado en los tiempos modernos por diversas contribuciones a la geometría clásica.

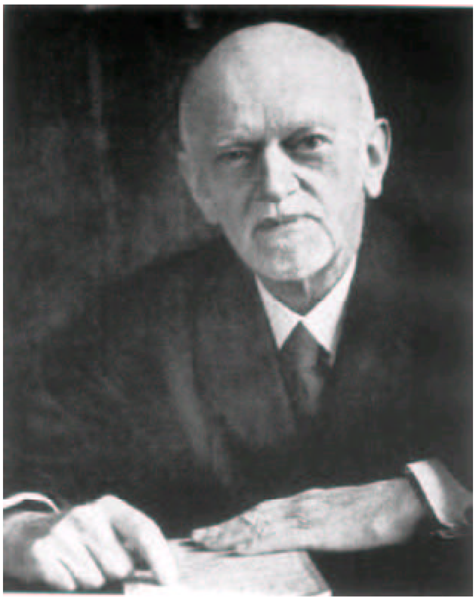
«La fortuna institucional de los *Elementos* puede incluir también a otro malentendido que conviene despejar: consiste en creer que forman un tratado homogéneo y compacto, tan autosuficiente y clausurado en sí mismo que ha borrado todo rastro de las tradiciones matemáticas anteriores[12]».

En cuanto a los *Fundamentos* de Hilbert, tal vez lo mejor sea reproducir su muy escueta introducción:

«La Geometría, lo mismo que la Aritmética, necesita solamente para su consecuente construcción pocas y sencillas proposiciones fundamentales.

»Estas proposiciones fundamentales se llaman *axiomas* de la Geometría. El poner de manifiesto los axiomas de la Geometría y el averiguar sus conexiones, es problema que se encuentra discutido desde tiempos de *Euclides* en numerosos y excelentes tratados de literatura matemática. El problema citado queda reducido al análisis lógico de nuestras intuiciones espaciales.

»La presente investigación es un nuevo ensayo para construir la Geometría sobre un sistema *completo de axiomas, lo más sencillo posible*, deduciendo de él los más



D. Hilbert

[12]Vega 1991, p. 47.

importantes teoremas, de manera tal, que en ese proceso aparezcan con la máxima claridad la interpretación de los distintos grupos de axiomas y el alcance de las consecuencias que aisladamente se deriven de cada uno de ellos[13]».

La caracterización de la axiomática de Hilbert que sigue, y que nos parece muy acertada, tiene además la virtud de venir de alguien que colaboró durante largos años con él, y precisamente en las cuestiones de fundamentos de la matemática: «una característica fundamental de la axiomatización de la geometría de Hilbert es que el método axiomático es presentado y practicado en el espíritu de la concepción abstracta de la axiomática que surgió al final del siglo XIX y que ha sido generalmente adoptada en la matemática moderna. Consiste en abstraer a partir del significado intuitivo de los términos para las clases de objetos primitivos –individuos– y de las relaciones fundamentales y en entender las aserciones –teoremas– de la teoría axiomatizada en un sentido hipotético, es decir, como siendo verdaderos para cualquier interpretación o determinación de las clases de individuos y de las relaciones fundamentales que satisfacen los axiomas.

«Esta concepción de la axiomática, de la que Hilbert fue uno de los primeros defensores –y desde luego el más influyente–, hunde sus raíces en los *Elementos* de Euclides, en los que el razonamiento lógico a partir de los axiomas no se usa únicamente como un modo de ayudar a la intuición en el estudio de las figuras en el espacio, sino que, más bien, se consideran las dependencias lógicas en sí mismas[14]».

El papel de Hilbert es especialmente relevante, puesto que influyó, y mucho, sobre la marcha de la matemática desde su posición privilegiada en Gotinga, y no sólo directamente sino asimismo a través de discípulos y seguidores. Según Dieudonné: «Más que por sus geniales descubrimientos, es quizá por el sesgo de su espíritu que Hilbert ha ejercido la más profunda influencia en el medio matemático: él enseñó a los matemáticos a *pensar axiomáticamente*, es decir, a tratar de reducir cada teoría a su esquema lógico más estricto, desembarazado de la técnica contingente del cálculo[15]».

Esta influencia se encarnó en particular en las aportaciones decisivas que al progreso del álgebra abstracta hicieron E. Artin, E. Noether –y otros, Hasse, etc.–, primero en Alemania y luego en el exilio americano, aportaciones que cristalizaron en uno de los libros más representativos de una nueva manera de ver las cosas dentro de la matemática y –quizá precisamente por ello– más exitosos e influyentes durante un periodo que puede cifrarse en unos cuarenta años, el *Moderne Algebra* (1931), del joven B.L. van der Waerden, discípulo de los anteriores, que supo presentar en una forma novedosa realmente conseguida las nuevas ideas y sus formas de engarze. Por cierto que la autoría del libro tiene

[13]Hilbert 1991, p. 1.

[14]P. Bernays, Hilbert. En P. E. Edwards (ed.), Encicl. of Philosophy III (1967), 496-504, Cita en la p. 497.

[15]Dieudonné 1962, p. 318.

un carácter un tanto colectivo, reconocido por el propio autor, en la medida en que recoge el magisterio de los primeros y buena parte del contenido de sus cursos. Con este libro y su entorno cambia, según Leo Corry la *imagen* –en el sentido de este autor[16]– del álgebra *abstracta* –con la geometría algebraica asociada– que se convirtió en uno de los centros de la matemática del siglo XX. Hilbert y el libro de van der Waerden serán dos referencias fundamentales, explícitamente reconocidas, de Bourbaki.

3. La segunda mitad del siglo XIX: Dedekind y sus antecesores

Pero hay también otra influencia, reconocida por ellos, la de Dedekind, alguien cuyo papel vemos de manera distinta estos últimos años, en parte al menos como consecuencia de los trabajos de José Ferreiros[17], y no sólo en cuanto a su relación con Cantor y su papel en el desarrollo de la teoría intuitiva de conjuntos. Lo que ya se ha dicho antes muestra una tendencia, en la que parece pesar bastante la componente del carácter personal, hacia la presentación rigurosa, *sistemática y ordenada* de las teorías, tendencia que – y en ésto se separa de Hilbert y su escuela– no siempre adopta el método axiomático en la exposición. El papel de Dedekind en la evolución de la teoría de conjuntos era ya bien conocido a partir de la publicación en los años treinta de su correspondencia con Cantor. Dedekind no sólo ofrece una exposición rigurosa y satisfactoria de los números reales sino que parece asimismo inclinarse hacia una fundamentación de la matemática y la teoría de conjuntos en términos de conjuntos y aplicaciones[18]. En cuanto a lo primero, es interesante insistir en la comparación de su tratamiento de los irracionales con la teoría griega de la proporción, y en el énfasis puesto en la noción de completitud.

Las distintas vías seguidas por estas influencias quedan bien reflejadas, en parte al menos, en la cita de Cellucci que sigue: «Si bien el propósito de Weierstrass, Cantor y Dedekind tiene puntos de contacto evidentes con el de Frege y Hilbert, hay entre ellos una diferencia sustancial. En tanto que para los primeros la matemática es un cuerpo de conocimientos vivo y en continua evolución, cuyos problemas no son de forma sino de contenido, para los segundos es un cuerpo de conocimientos completamente dado en cuanto al contenido aunque todavía imperfecto en la forma. Se ve claramente la diferencia, por ejemplo, con respecto al problema del rigor matemático. Mientras que para Hilbert y Frege, éste sólo puede alcanzarse mediante la lógica científica, para Weierstrass, Cantor y Dedekind puede por el contrario llegarse a él por medio de la lógica natural[19]».

[16]Corry 1996.

[17]Ferreirós 1996, 1999.

[18]Sobre la distinta postura de Dedekind y Cantor con respecto a las relaciones de equivalencia y las clases asociadas, cf. Ferreirós 1999, p. 264.

[19]Cellucci 1998, p. 62, y *passim*.

Aun sin estar de acuerdo con todas las afirmaciones del párrafo anterior –creemos que lo que se dice de Hilbert vale quizá para el *filósofo de la matemática*, pero no para el *matemático en ejercicio*– las dos direcciones señaladas nos serán útiles en lo sucesivo: la tarea de seleccionar y ordenar los elementos de la matemática puede llevarse a cabo de varias maneras. Volvamos un poco a buscar sus antecedentes.

Sin salir de Gotinga es posible remontarse a Riemann, hasta Dirichlet y aun más, hasta el gran Gauss. De Dirichlet es la frase "sustituir el cálculo por las ideas", citada en el artículo programático de Bourbaki del que nos ocuparemos más adelante con detalle. Por cierto que Galois, en sus muy interesantes y no demasiado conocidos comentarios sobre cuestiones generales, dice algo bastante parecido: sería interesante saber si hay alguna relación entre ambas afirmaciones.

Se ha mencionado a veces a Gauss, por Bourbaki, a propósito de su manejo de las operaciones con clases de equivalencia –con clases de restos– como a alguien ya en posesión de la noción de la ley de composición y de sus propiedades abstractas, y con este motivo se le atribuye también la idea del teorema de estructura de los grupos abelianos de tipo finito. Otra cita, ésta de Gauss, que enlaza bien con las anteriores es: «el matemático abstrae directamente a partir de la cualidad de los objetos y del contenido de sus relaciones; se ocupa tan sólo de calcular y de comparar sus relaciones mutuas[20]».

También es posible interpretar en el mismo sentido sus afirmaciones acerca de la necesidad de desarrollar la topología, pero está mucho menos claro que sea realmente así.

También Dirichlet es importante en este contexto. En primer lugar, por su sentido del rigor: sólo Dirichlet, de acuerdo con la conocida cita de Jacobi, "sabe lo que es una prueba matemática rigurosa", y no Gauss, Cauchy o Jacobi. También por la manera, igualmente concentrada en una cita –pero esta vez de Eisenstein– de "resumir todo un área de la matemática en una sola idea", coincidiendo así de nuevo con Gauss y Jacobi; así, «es posible ver la verdadera naturaleza de la entera teoría, su maquinaria interna fundamental y el funcionamiento de sus piezas[21]». A esta *visión conceptual* de la matemática contribuye asimismo Galois, pero su influencia sólo se advertirá más tarde: «La presencia de Dirichlet, Dedekind y Riemann en Gotinga y los cursos que explicaron a partir de 1855, convirtieron Gotinga en uno de los centros matemáticos más importantes, sólo comparable con Berlín o París. Los tres matemáticos tenían en común el seguir las líneas iniciadas por Gauss y promover una visión conceptual abstracta de la matemática[22]».

---

[20] Ferreirós 1999, p. 44.
[21] Ibid., p. 10.
[22] Ibid., p. 26.

R. Dedekind

Dirichlet hace la afirmación arriba citada en el obituario de Jacobi, pero también defiende el papel de los cálculos. Para Ferreirós, «se tiene la impresión de que fue sobre todo Riemann quién llevó el método conceptual a un nivel superior, y su amigo Dedekind siguió sus pasos[23]». Obsérvese que Dedekind toma igualmente como modelo el tratamiento por Riemann de las funciones de variable compleja: «Mis esfuerzos en teoría de números van dirigidos a basar la investigación no sobre formas accidentales de representación –o expresiones– sino sobre nociones básicas simples y entonces –aunque esta comparación pueda parecer pretenciosa– alcanzar en este campo algo semejante a lo hecho por Riemann en el campo de la teoría de funciones[24]».

Según Dedekind, las funciones analíticas definidas abstractamente en la teoría de funciones de Riemann, o las variedades de la teoría de magnitudes –topología incluida– o de la geometría, hacen el mismo papel que los cuerpos en álgebra.

Esta tendencia conceptual, en la línea de Gauss, Cauchy y Dirichlet, intenta la formulación de las teorías matemáticas en el marco más general posible, procurando evitar "formas externas de representación" y eligiendo nuevos elementos primitivos que tenían unas propiedades "internas" y eran incluidas al principio del desarrollo de la teoría. Ferreirós califica de "conceptual abstracto" este punto de vista, llegando a la conclusión de que el punto de vista abstracto propio de la matemática moderna se remonta a Dirichlet y Riemann.

Esta posición no debe confundirse con la de los matemáticos de la escuela de Berlín –Kummer, Kronecker, Weierstrass– y se explica por qué: «La postura de Berlín puede llamarse también "conceptual", sobre todo en el caso de Weierstrass, que seguía la tradición de Cauchy y Dirichlet. Pero no compartían lo que podríamos llamar giro "abstracto" propio de Riemann[25]».

Esta visión de Dedekind puede encontrarse igualmente en otros autores como Scharlau, que la expresa admirablemente: «Como casi ningún otro en la historia de las matemáticas, Dedekind hizo un esfuerzo para desarrollar sistemáticamente la disciplina, y en particular dispuso los cimientos para la matemática abstracta del presente, que es sobre todo "álgebra moderna" en el

[23]Ibid., p. 28.
[24]Ibid., p. 29.
[25]Ibid., p. 36.

sentido del libro de van der Waerden. Contribuyó de manera esencial a la clarificación de las nociones primitivas más importantes del álgebra –cuerpos, anillos, módulos, ideales, grupos– y se ocupó de los fundamentos de la matemática –números reales, teoría de conjuntos de Cantor, topología conjuntista–. En este sentido podemos considerar a Dedekind como antecesor y precursor importante de Bourbaki[26]».

Desde luego que Dedekind puede ser considerado como precedente de Bourbaki. Hace matemática, y de la mejor calidad, pero la hace *organizando al mismo tiempo* el terreno en el que se mueve; aunque, según Ferreirós, «sin llegar nunca a ver la matemática desde un punto de vista estructural[27]». Así es, pero puede sostenerse que llegó a *entreverlo* lejanamente y aun a algo más: creemos que es todo lo que se puede pedir, la "máxima conciencia posible" para la época. En cambio, los Bourbaki sí que separan las dos actividades que Dedekind simultanea sin preocuparse siempre de advertirlo y hacer la distinción. Esto lo explica, naturalmente, la diferencia de situaciones: ha pasado mucho tiempo y ha corrido mucha agua matemática bajo los puentes. Los Bourbaki actúan, por así decir, en *segundo grado*, con la perspectiva privilegiada que les da la distancia temporal: por ello ha podido hablarse de *manierismo* con respecto a su obra.

Añadamos, en lo que puede entenderse como una ampliación del apartado (viii) de la lista precedente, que Dedekind también presenta, siendo todavía bastante joven, una axiomatización del espacio proyectivo basada en definiciones y axiomas: «Concibe este espacio como un conjunto de puntos, que puede ser finito». Usa axiomas para la geometría, pero no para la aritmética, lo que supone una falta de unidad que pide alguna explicación.

Intentado ver las cosas desde más lejos, se puede señalar que el carácter lógico de las clases viene de la tradición filosófica. Dedekind se inscribe en la línea tradicional de la lógica considerada como la ciencia de las "leyes más generales del pensamiento". Su concepción de conjunto puede tomarse como un ejemplo típico de *visión intuitiva*, "aunque evite asociar demasiado pensamientos y conceptos".

Con respecto a lo que se ha llamado su *logicismo*, se diría que resulta bien para las aplicaciones –las funciones–, pero menos bien para las clases. Es llamativo que su *deductivismo* no le llevase a emplear la axiomática a la hora de construir y fundamentar los distintos conjuntos de números, lo que según Ferreirós es importante a la hora de calibrar su influencia sobre Hilbert y su escuela de Gotinga. Dedekind deduce rigurosamente, paso a paso, todas las proposiciones que necesita y usa, lo que es una de las características de la modernidad que seguirá, y en particular de Bourbaki. Por cierto que lo hace en términos de la famosa *boutade* de Hilbert –y parece que también de Pasch– para ilustrar su modo de proceder en geometría: «... reemplazando todos los

[26]Ibid., p. 81.
[27]Ibid., p. 81. Citado en Corry 1996.

términos técnicos por palabras inventadas –sin ningún significado hasta ahora– el edificio, si está bien construido, no debe venirse abajo, y yo afirmo que mi teoría de los números reales resistirá esa prueba[28]».

Pero en otros dominios el deductivismo de Dedekind se despliega de un modo que no es el axiomático. Su presentación de los números se basa en las nociones de conjunto y función, y para Ferreirós esto es algo que tiene que ver con su concepción de la lógica: «su exposición, que es completamente *abstracta*, no es *formal*; las nociones de inferencia formal y de demostración formal, que Frege está empezando a usar, están ausentes de su obra». La lógica elemental subyacente, aunque se usa de modo transparente, no se hace explícita.

Y sin embargo, pese a todas estas indudables diferencias, sigue viendo una unidad en su enfoque: «Todas sus afirmaciones reflejan una visión epistemológica unitaria, basada en una extensión considerable en ideas que se presentaban como el "sentido común" de la época, pero también en una seria reflexión sobre la actividad intelectual[29]».

Sus bases epistemológicas son kantianas, no sólo –o no tanto– por influencia directa como por impregnación cultural, pero sobre ellas ha llovido toda la matemática del siglo XIX, y aquí habría que incluir un análisis pormenorizado de los apartados (i)–(viii) de más arriba. Hay también una influencia de Leibniz –como la había, por cierto, en Cantor–. Según Ferreirós, que ha buceado a fondo en archivos y correspondencia, Dedekind no concede ningún espacio a la reflexión filosófica. Para nosotros, esta actitud –que está muy bien vista–, junto con la mención al "sentido común" antes hecha, resulta de lo más bourbakista, como lo es también la "negligencia" señalada en otro lugar[30].

Hay un hecho digno de ser analizado en relación con lo anterior. Sin duda Dedekind influyó sobre Hilbert –aunque según Freudenthal fue Kronecker el matemático que más le influyó–, que conocía y apreciaba su obra, quien toma las nociones de ideal y de cuerpo y saca amplio partido de ellas en su libro de 1897[31]. Sin embargo, después de un periodo durante el cual asociaba por igual a Cantor y Dedekind con la teoría de conjuntos, Hilbert pareció inclinarse hacia Cantor por ser más original y creativo, por plantear cuestiones radicalmente nuevas capaces de abrir horizontes inéditos[32]. Esta es, creemos, una actitud *de matemático*, que es justamente la que adoptarán después los Bourbaki. Solo que no parece demasiado aventurado decir que el resultado de la aplicación por ellos de los mismos criterios daría –a falta de examen detenido de los textos– el resultado opuesto. Bourbaki –o, si se prefiere, Dieudonné–, aun respetándole, no tiene en gran estima algunas de las aportaciones de Cantor, en especial su teoría de los cardinales y ordinales infinitos, y no lo incluye entre sus ancestros,

---

[28] Ibid., p. 247.

[29] Ibid., p. 241.

[30] Ibid., p. 228.

[31] También influyó en Zermelo, quien evidentemente ha leído a Dedekind antes de elaborar su teoría axiomática de conjuntos de 1908. Cf. Ferreirós 1999, p. 318–324.

[32] Ibid., p. 254–255.

mientras que se muestra mucho más entusiasta con los logros matemáticos de Dedekind.

Hay otros aspectos dignos de mención en cuanto al interés de Dedekind por los aspectos *organizativos* de la matemática. Para empezar, su énfasis en lo arbitrario de la terminología matemática y de su empleo –por cierto que Ferreirós nos recuerda el hecho poco divulgado de que Cantor usó la terminología de Dedekind para las operaciones algebraicas en algunos de sus trabajos más importantes–. También dió mucha importancia a las notaciones, y alguna de las que adoptó tuvo éxito, como sucedería después con no pocas de Bourbaki. Pero es sobre todo significativo desde nuestro punto de vista que a la hora de intentar justificar las razones para la elección de la palabra "cuerpo" diga «... que un cuerpo de números constituye un sistema que posee una cierta completitud y un cierto cierre, una "totalidad orgánica" o una "unidad natural" análogas a las de aquellas entidades llamadas cuerpos en la ciencia natural, la geometría y la vida de la sociedad humana[33]», cita que hubiera hecho feliz al poeta Gabriel Ferrater autor de *Teoria dels cossos*, que llegó a a empezar la carrera de matemáticas.

Esto puede hacer inclinarse la balanza, en la contraposición más o menos soterrada en todo lo anterior, entre *axiomatización y organización*, hacia la segunda, y algo análogo se puede decir en cuanto a las dos vías que señalaba Cellucci. A esta luz hay que ver, nos parece, todo lo que se refiere a los *elementos* de la matemática, al modo de aislarlos, elegirlos, disponerlos y buscar los esquemas más adecuados para el montaje de los dispositivos correspondientes. En qué medida se trate de dibujos geométricos trazados a tiralíneas, de elaboraciones formales de símbolos, o de cuerpos en alguno de los varios sentidos de la cita, determinará la subsiguiente visión de la matemática.

4. Bourbaki y sus Elementos

Hacia la mitad de los años treinta del pasado siglo, unos cuantos matemáticos franceses, jóvenes, brillantes, procedentes muchos de ellos de la escuela Normal Superior, y que ya ocupaban puestos importantes en la universidad, comenzaron a trabajar en la elaboración de unos *Eléments de Mathématique*, título nada inocente, ni en la obvia alusión a Euclides ni en el singular de *matemática*. Entre los fundadores, algunos de los matemáticos más importantes del siglo: C. Chevalley, A. Weil, H. Cartan, J. Dieudonné: más tarde fueron miembros, entre otros, L. Schwartz, A. Grothendieck y P. Cartier. En efecto, una de las mayores preocupaciones de estos grandes matemáticos, explícita desde el principio, era oponerse a la aparente dispersión de las distintas disciplinas matemáticas a principios de siglo. Antes hemos indicado los principales antecedentes de este movimiento en Dedekind, Hilbert y el libro –o, si se prefiere, la concepción del álgebra– de van der Waerden. Pero no citan en este sentido

[33]Ibid., p. 91.

–aunque, desde luego, sienten un enorme respeto por él como matemático– a Poincaré. En un texto reciente de H. Sinaceur, sin embargo, se argumenta por qué, *en ciertos aspectos*, no estaba tan lejos: «... vemos que está de acuerdo con los formalistas en muchos aspectos. Estos incluyen el significado de la estructura –en particular la noción de grupo–, el significado asociado de los términos o conceptos relativos a la estructura, la dimensión reveladora de la innovación en el lenguaje. La última indica la presencia de "hechos altamente eficaces", es decir, de hechos que "introducen orden donde reinaba el desorden", poniendo en relación elementos bien conocidos pero malamente dispuestos; estos hechos permiten una notable economía de pensamiento en la medida en que arrojan luz sobre la esencia de numerosas nociones matemáticas...[34]».

Caricatura figurada de los Bourbaki en acción.

[34]Sinaceur 2000, p. 286.

Bourbaki llevó a cabo su propósito mediante un empleo sistemático de la *axiomática* y de las *estructuras*, empleo que intentaremos exponer y analizar someramente en lo que sigue. Este examen se hace a partir de algunos –pocos– textos suyos que tienen el carácter de *declaración de principios*, por así decir: un artículo titulado "La arquitectura de las matemáticas"[35], seguramente el más citado y representativo; otro en el que se insiste en la relación con la lógica y los fundamentos[36], parajes en los que se diría que Bourbaki nunca se ha sentido muy cómodo; otro posterior que lleva la firma de Dieudonné[37]. Pero no sólo a partir de ellos, ya que también tienen interés textos de los propios *Eléments*, así como las notas históricas recogidas en el libro *Eléments d'histoire des mathématiques*[38].

De acuerdo con el primero de los artículos mencionados, la axiomática es una componente fundamental para conseguir la unificación de la matemática y para la exhibición de las relaciones y conexiones entre sus distintas ramas. Se insiste en la distinción con el *formalismo* –o método formalista–, que se queda en eso, en lo meramente formal.

«Lo que se propone como fin principal, la axiomática es precisamente lo que el formalismo lógico, por sí sólo, es incapaz de suministrar: la inteligibilidad profunda de las matemáticas ... el método axiomático enseña a buscar las razones profundas de este descubrimiento, a encontrar las ideas comunes sepultadas bajo el aparato exterior de los detalles propios de cada una de las teorías consideradas, a discernir estas ideas y llevarlas a la luz[39]».

Esta labor de encontrar las ideas comunes a las distintas ramas de la matemática lleva a –y se hace con– las *estructuras*, de las que en este artículo no se ofrece una definición técnica en toda regla[40] sino sólo una idea general, insistiéndose en que lo que cuenta no es la naturaleza concreta de los elementos involucrados sino los *axiomas* de cada estructura; incluso llega a afirmarse –nos parece que con exageración, incluso desde su propio punto de vista– que «las estructuras matemáticas se convierten, propiamente hablando en los *únicos objetos* de las matemáticas[41]».

Como el lector ya sabe, Bourbaki distingue tres tipos de *estructuras-madre* o fundamentales: las *algebraicas*, que hacen intervenir un conjunto con una o más leyes de composición –internas o externas– dotadas de ciertas propiedades –grupos, anillos, cuerpos, espacios vectoriales, etc.–; las de *orden*, construidas

---

[35]Bourbaki 1962.

[36]Bourbaki 1949.

[37]Dieudonné 1982.

[38]Bourbaki 1976. Para más información sobre Bourbaki puede verse Chouchan 1995, o Mashaal 2000. También entrevistas con antiguos miembros como A. Borel o P. Cartier, o lo que dice Schwartz en sus memorias. Y el artículo de R. Queneau en *Bords*, París, Hermann, 1963, p. 11–36.

[39]Bourbaki 1962, p. 39.

[40]Para un análisis detallado, cf. Corry 1996.

[41]Bourbaki 1962, p. 42.

a partir de relaciones de orden y de las que el ejemplo más notorio es la de retículo; y las *topológicas*, que recogen todo lo relativo a nociones como continuidad y convergencia –espacios topológicos, etc–. Estas estructuras no constituyen compartimentos estancos, sino que pueden combinarse entre sí dando lugar a estructuras mixtas –grupos ordenados, grupos topológicos, etc.–. El muy conocido psicólogo suizo Jean Piaget, también autor de contribuciones importantes a la epistemología, proporcionó un apoyo interesante a Bourbaki al encontrar en sus experiencias hechos y situaciones que parecían confirmar lo adecuado de las distinciones anteriores.

El método axiomático tiene la virtud de aportar una economía de pensamiento muy considerable, de traer a la matemática el *taylorismo*, la división del trabajo de las fábricas: «Pero la comparación es defectuosa. El matemático no trabaja maquinalmente, como el obrero en la cadena. Nunca se insistirá demasiado en el papel fundamental que presenta, en sus investigaciones, una *intuición* particular –intuición que, por otra parte, como toda intuición, a menudo se equivoca–, que no es la intuición sensible vulgar, sino más bien una especie de adivinación directa –anterior a todo razonamiento– del comportamiento normal que parece tener derecho a esperar por parte de entes matemáticos con los que ha tenido una frecuentación tan prolongada que se han convertido en entes casi tan familiares como los del mundo real. Pues cada estructura lleva en sí su lenguaje propio, cargado de resonancias intuitivas particulares ...

»Es decir, menos que nunca la matemática se reduce actualmente a un juego puramente mecánico de fórmulas aisladas, más que nunca la intuición reina soberanamente en la génesis de los descubrimientos. Pero dispone hoy en día de las potentes palancas que le suministra la teoría de los grandes tipos de estructuras y domina simultáneamente inmensos campos unificados por la axiomática, terrenos en los que antaño parecía reinar el caos más informe[42]».

El mismo Bourbaki se cura en salud cuando pone los adjetivos "esquemático", "idealizado" y "estereotipado" a su modo de proceder. Y también al decir que las estructuras no están determinadas a priori y no excluir en principio el nacimiento de otras nuevas; en esto, la realidad –matemática– no parece haberles desmentido. Y en cuanto a críticas de otro orden, como las de Corry en cuanto al uso del término "estructura", prodrán ser pertinentes desde el punto de vista de la disposición lógica de la obra, pero no afecta a su utilidad innegable a la hora de proporcionar un marco y un lenguaje adecuados para organizar la ciencia del *matemático en ejercicio* –del *working mathematician*–.

Hace años Jesús Fortea habló de Bourbaki como un "fenómeno cultural manierista"[43], desarrollando en particular algunas comparaciones sugestivas con la obra –y los escritos– de Juan Gris. Sin espacio para más, puede decirse

[42]Ibid., p. 44–45.

[43]J. Fortea, *Bourbaki as a manneristic cultural phenomenom.* Congreso "Langage et pensée mathématique", Luxemburgo, 1976, p. 411–438.

que, en efecto, algunas de las características indicadas por A. Hauser como propias del manierismo, tales como el «intelectualismo extremado, consciente de la realidad y deformándola de intento», o bien «un estilo privado de *ingenuidad*, que orienta sus formas no tanto por el contenido expresivo cuanto por el arte de la época anterior[44]», a las que podrían añadirse otras, convienen perfectamente a la manera de proceder de Bourbaki. En alguna parte dijo H. Weyl que la axiomática estaba ya agotada en los años treinta y, de ser cierta esta afirmación del fino catador de tendencias matemáticas que era, tendríamos otra confirmación de lo dicho más arriba.

5. Elementos y Éléments: semejanzas y diferencias

Se diría llegado el momento de, para terminar, hacer algún tipo de balance conclusivo de todo lo dicho hasta ahora, y de decir algo de la evolución de estos *elementos* de la matemática a lo largo de los más de veinte siglos trascurridos, evolución que, naturalmente, debe incluir el significado mismo de estos elementos y sus variaciones a lo largo del tiempo. Dejando en parte de lado el aspecto puramente *lógico*, nos limitaremos al *organizativo*.

Distinguiremos, de una forma que esperamos no resulte demasiado escolar, entre *semejanzas* y *diferencias*, si bien ambas se entrecruzan de maneras no siempre sencillas de analizar. Comenzamos por las primeras.

(i) *Precisión en la terminología y los conceptos*: tal y como se ha dicho muchas veces y recuerda L. Vega, el libro de Euclides es el primer lugar donde se hace la distinción de los primeros principios, dividiéndolos en definiciones, postulados y nociones comunes[45]. Pero esto no es todo ni mucho menos: «La composición euclídea fue, para empezar, un repertorio básico de los resultados probados y las proposiciones demostradas: un archivo tan cumplido que hizo superfluo cualquier otro tratado matemático del mismo alcance y género, y devino en referencia común en las investigaciones subsiguientes: siempre que hacía falta un lema elemental bastaba, por lo regular, mencionar su presencia en los *Elementos* sin que fuera preciso detenerse a probarlo.

»Los *Elementos* fijaron una especie de estándar metodológico o nivel básico de exigencia tanto en lo referente a la sistematización deductiva de un cuerpo de conocimiento como en lo referente al rigor informal de la prueba matemática. También representaron, por otro lado, una normalización de la exposición demostrativa de las proposiciones geométricas[46]».

Todo ello debe hacerse respetando los criterios de sobriedad y organización. En lo que al primero se refiere: «Un tratado así –asegura Proclo– ha de verse libre de todo cuanto sea superfluo, pues eso obstaculiza el aprendizaje;

[44] A. Hauser, *Historia social de la literatura y el arte*, Madrid, Guadarrama, 1969; vol. II, p. 14–15 y *passim*.

[45] Cf. también Vega 1991, p. 115–117 así como Szabó 1977, p. 244–247, 315 y 333–335.

[46] Vega 1991, p. 40 y Lloyd 1996.

debe cribar todo lo comprendido por el objeto de estudio de forma coherente y conducente al fin propuesto, en orden a ser de mayor utilidad para el conocimiento; ha de poner sumo cuidado tanto en la claridad como en la concisión, pues lo contrario entorpece la comprensión; debe proponerse la formulación de los teoremas en términos generales, pues parcelar la instrucción de la materia dificulta la consecución del conocimiento. De acuerdo con todos estos criterios –concluye nuestro comentador–, el sistema de los *Elementos* de Euclides supera a los demás[47]».

El párrafo es, se nos advierte, de Proclo, y se refiere, claro, a la obra de Euclides. De no ser así, y presentársenos aislado y sin referencias, podría pasar perfectamente, se diría, por un comentario ... sobre Bourbaki. Es difícil sintetizar mejor lo que ambos tienen en común, y la trascendencia de la deuda.

En cuanto a la manera de organizar el sistema y cómo llevarlo a cabo, citemos de nuevo a L. Vega: «En cambio, el propósito distintivo de la sistematización deductiva de los *Elementos* es, a mi juicio, la elucidación y la organización de ciertos campos sitemáticos básicos –merced a una oportuna selección y disposición de los *Elementos*–, hasta su conversión en cuerpos autónomos y concluyentes de conocimientos. Así pues, no cabe negar un talante axiomatiforme a los *Elementos* de Euclides ...[48]».

Viniendo a Bourbaki, leído por Ferreirós, las hipótesis se introducen para explicar y unificar material concreto, lo que va contra la concepción tautológica de la matemática: «el movimiento se demuestra andando». Para Bourbaki parece que, más de veinte siglos después, el planteamiento debe ser bien distinto, y así es, pero quizá no tanto como pudiera pensarse. La desaparición de todo vestigio de los "elementos" previos a los de Euclides impide cualquier posible comparación, aun lejana, pero sí puede decirse en todo caso que los Bourbaki hicieron un esfuerzo para precisar la terminología, evitar una vaguedad mayor de lo que pueda pensarse, y también unificarla, cosa muy recomendable a la hora de evitar interpretaciones equivocadas. Algo ha habido en común, dicho sea con todas las precauciones del caso.

(ii) *Selección de contenidos*: aquí puede aplicarse también, *mutatis mutandis*, lo dicho en las últimas citas. Los dos dejan fuera de sus tratados muchas matemáticas, ¿con qué criterios lo hacen? Euclides no trata de las cónicas ni del contenido, sea el que fuera, de los misteriosos *Porismas*. En cuanto a los Bourbaki, la situación es en este punto bien distinta, porque Dieudonné ha sido muy explícito en cuanto a los motivos para eliminar buena parte de la matemática, por importante que sea: se han eliminado, además de desarrollos *abstractos* puramente formales y carentes de interés, materias incluidas en los siguientes capítulos:

[47] Ibid., p. 24.
[48] Ibid., p. 121.

- Productos finales de teorías interesantes, pero que son ellos mismos callejones sin salida, como la teoría de Galois y la aplicación a las ecuaciones algebraicas;

- Partes de la matemática que poseen gran interés pero que no se dejan formular en términos de estructuras y sus interacciones, como puede ser el caso de la teoría de grupos finitos o la teoría analítica de números;

- Partes de la matemática en pleno desarrollo cuya velocidad hace que cualquier intento de exposición en la forma habitual de Bourbaki esté condenado inapelablemente a quedar anticuado en breve plazo: topología algebraica, topología diferencial, sistemas dinámicos[49].

(iii) *Rigor de las demostraciones*: Que Euclides ha sido tenido durante más de veinte siglos como modelo de rigor en su argumentación general y en la trabazón de sus demostraciones es algo que ya se ha dicho. Pero es que ya lo hacía Proclo: «... es Euclides, quien compiló los elementos poniendo en orden varios teoremas de Eudoxo, perfeccionando muchos resultados en Teeteto y dando asimismo pruebas incontestables de aquello que sus predecesores sólo habían probado con escaso rigor[50]».

Y sin embargo Euclides «... procede con la informalidad característica de la geometría clásica. Esta informalidad, el uso de supuestos no declarados, le ha valido objeciones y reparos. Las objeciones se remontan a críticos antiguos ... Los reparos son más modernos ...[51]».

Objeciones y reparos que no rigen para Bourbaki, en el sentido de que –aparte algún pequeño desliz fácil de corregir– su rigor en las demostraciones no se presta a crítica. Y no ha sido criticado, como sí lo han sido en cambio otros muchos aspectos de su proceder y su, digamos, *ideología*. Los Bourbaki quintaesencian su argumentación en las demostraciones, en el sentido de precisar por completo –algo, no se olvide, no tan frecuente en la literatura de fines del siglo XIX y los primeros decenios del XX– las definiciones y de razonar a partir de ellas de modo inequívoco. No omitamos su insistencia en lo completo de las demostraciones que dan.

(iv) *Indiferencia hacia la filosofía de la matemática*. Sobre Bourbaki, tomando a Dedekind como antepasado también en este dominio, ya nos hemos extendido antes. En lo que a Euclides se refiere, L. Vega nos recuerda que no se ocupa ni siquiera de los problemas de la infinitud y del continuo suscitados por la dialéctica eleática, de los que no hay la menor huella a lo largo de los *Elementos*. Algo semejante puede decirse, por cierto, y dando un largo salto, de la relación de la matemática con sus aplicaciones, otro terreno en el

[49] Dieudonné 1982.
[50] Vega 1991, p. 10.
[51] Vega 1991, p. 203. Ver además, ibid., p. 63–65 y 110, y Vega 1990, p. 289–295 y 344–367. También Lloyd 1996.

que Bourbaki entra lo menos posible, diríase que con desgana, y en el que ha recibido muchas críticas.

Pasemos a continuación, y para terminar, con las *diferencias*:

(A) Los dos *ponen orden* en el material matemático con el que tratan, pero lo hacen de manera bien distinta, incluida la forma de presentarlo al modo axiomático. Hay desde luego motivos de sobra para justificar estas diferencias en los más de veinte siglos trascurridos. Para L. Vega: «... lo que hemos visto ya deja traslucir la naturaleza sustancialmente intuitiva de la "axiomatización" euclídea. Volvamos, por ejemplo, a la elucidación de los supuestos ... Si tal impresión fuera correcta, los defectos de la "axiomatización" euclídea no se deberían tanto a unas imperfecciones más o menos eventuales, e.g., a la existencia de supuestos tácitos, como sobre todo, a la falta de una perspectiva axiomática propiamente dicha[52]».

Valdría la pena, en esta dirección, analizar con más detalle el uso –o, mejor dicho, *los usos*[53] de la noción de "elemento" en los dos tratados.

(B) Euclides enseña a *aprender* y a construir la matemática, y proporciona lo necesario para ello; no sólo las nociones de base, los teoremas y sus demostraciones, sino también un entrenamiento, sobre todo en cuanto a las construcciones geométricas y la manera de realizarlas. Euclides, como se recordaba al principio, se ha empleado en la enseñanza, elemental incluida, durante siglos y hasta hace poco tiempo.

Bourbaki está dirigido explícitamente al matemático investigador y no se ha presentado nunca como candidato a libro de referencia en la enseñanza; mucho menos todavía en los niveles medios. Otra cosa es que se haya atribuido a Bourbaki una influencia sobre la introducción en la enseñanza media, y aun en la primaria, de los "matemáticas modernas", a las que también se asoció el nombre de Piaget.

En la línea de lo anterior está la consideración del papel y función que desempeñan los *problemas* en cada caso. Se ha insistido mucho, empezando por los mismos interesados, en el curioso papel que tenían los problemas –situados al final– en los volúmenes de Bourbaki, donde era posible encontrar teoremas importantes y hasta fundamentales que se había desdeñado incluir en el texto. En cambio, los problemas, casi siempre en construcciones geométricas, están bien integrados en el propio discurso de los *Elementos*[54].

(C) Bourbaki es muy *homogéneo* y lo es de una manera muy cuidada y deliberada –¿manierista?–. Euclides, en cambio, es un tanto desigual, aunque ello pasó desapercibido durante mucho tiempo. He aquí una muestra, otra más, de la relatividad y la dependencia cultural de la noción de rigor matemático. Citando a Brunschvicg: «En realidad el desorden que nos llama la atención hoy en la obra de Euclides ha pasado desapercibido durante siglos. Los *Elementos*,

[52]Vega 1991, p. 63–64.
[53]Ibid., p. 21–22.
[54]Vega 1991, p. 35 y 40; Vega 1990, 275–280.

en los que podemos distinguir, como en las catedrales de la edad media, las contribuciones de las generaciones sucesivas y la diversidad de estilos, han dado la impresión de ser la obra homogénea por excelencia. Hay que llegar hasta el siglo XVII para encontrar un intento de reorganizar los *Elementos* de acuerdo con el verdadero sentido de la Lógica[55]».

(D) Que los *Elementos* de Euclides *fundan* en algún sentido la matemática parece ser algo generalmente aceptado. Pero es incluso posible darles una mayor trascendencia en la medida en que, tal como lo hace A. Szabó, se considere que contribuyeron a separar a la matemática de la filosofía: «Los trabajos que he presentado muestran que, en tanto que ciencia sistemático-deductiva, las matemáticas sólo eran originalmente una rama de la filosofía y, de manera más precisa, una rama de la dialéctica eleática. Es la fundación teórica y sistemática de la geometría lo que ha permitido a las matemáticas griegas alejarse de la filosofía y conquistar poco a poco su independencia[56]».

Es evidente que carece de sentido aplicar estas consideraciones, tanto las relativas a la fundación de la matemática como las implicaciones gnoseológicas de la –posible– separación de la filosofía, al tratado de Bourbaki. Y puede ser ilustrativo, en este sentido, comparar la metáfora anterior de Brunschvicg, o la que sigue de L. Vega: «Por lo demás, la composición de los *Elementos* tampoco es la de una obra marmórea, esculpida en un solo bloque y perfectamente acabada. Si la contemplamos en una visión global y panorámica, nos recuerda más bien una vieja catedral en cuya construcción, aunque esté presidida por un plan arquitectónico deliberadamente sistemático e integrador, se han entremezclado ya desde el principio materiales procedentes de diversas épocas y formaciones teóricas con distinto grado de desarrollo, a todo lo cual más tarde –a partir de los comentadores alejandrinos y de manos de sus sucesivos editores– se han ido añadiendo ciertos arreglos e, incluso, alguna que otra restauración moderna[57]», con una bien distinta de Bourbaki: «Es como una gran ciudad, cuyos suburbios no dejan de progresar, de manera un poco caótica, sobre el terreno circundante, mientras que el centro se reconstruye periódicamente, siguiendo un plan cada vez más claro y una disposición cada vez más majestuosa, echando abajo los viejos barrios y sus laberintos de ca-

[55]Brunschvicg 1972, p. 95.

[56]Brunschvicg 1972, p. 95. Otra manera de medir el largo camino recorrido es la concepción del espacio. Mientras que Euclides, y los griegos en general, no se plantean el problema filosófico del espacio, Bourbaki tiene ya tras de sí toda la axiomática de la geometría desarrollada durante el siglo XIX a que hemos aludido antes, el tratamiento de las distintas geometrías y los distintos espacios –euclídea, proyectivo, etc.– mediante la teoría de grupos del Programa de Erlangen, etc. Hacemos notar igualmente que el nacimiento de Bourbaki en los años treinta coincide con la presentación axiomática de los espacios de Hilbert por von Neumann y con la de los espacios de Banach en el libro clásico de éste.

[57]Vega 1991, p. 48.

llejuelas para lanzar, hacia la periferia, avenidas cada vez más directas, más amplias y más cómodas[58]».

Pero el examen detallado de estas metáforas nos llevaría demasiado lejos ahora.

Referencias

[1] N. Bourbaki, "La arquitectura de las matemáticas". En F. le Lionnais (ed.) p. 36–49.

[2] N. Bourbaki, "Foundation of mathematics for the working mathematician". *J. Symb. Logic* **14** (1949), 1–8.

[3] N. Bourbaki, *"Elementos de historia de las matemáticas"*. Madrid, Alianza, 1976.

[4] L. Brunschvicg, "Les étapes de la philosophie mathématique". Paris, A. Blanchard, 1972.

[5] C. Cellucci, "Le ragioni della logica". Roma-Bari, Laterza, 1998.

[6] M. Chouchan, "Nicolas Bourbaki. Faits et légends". Argenteuil, Editions du Choix, 1995.

[7] L. Corry, "Algebra and the rise of mathematical structures". Basilea, Birkhäuser, 1996.

[8] J. Dieudonné, "David Hilbert (1862-1943)". En F. le Lionnais (ed.) 312–319.

[9] J. Dieudonné, "The work of Bourbaki during the last thirty years". *Notices of the Amer. Math. Soc.*, noviembre 1982, 618–623.

[10] Euclides, *"Elementos"*. (tres volúmenes). Madrid, Gredos, 1991. Con una introducción de L. Vega.

[11] J. Ferreirós, "Traditional logic and the early history of sets". *Arch. History Exact Sciences* **50** (1996) 5–71.

[12] J. Ferreirós, *"Labyrinth of thought. A history of set theory and its role in modern mathematics"*. Basilea, Birkhäuser, 1999.

[13] A.R. Garciadiego, *"Bertrand Russell y los orígenes de las* paradojas *de la teoría de conjuntos"*. Madrid, Alianza, 1992.

[14] J.L. Heilbron, *"Geometry civilized. History, culture and technique"*. Oxford, Clarendon Press, 1998.

[15] D. Hilbert, *"Fundamentos de la Geometría"*. Madrid, C.S.I.C., 1991. Introducción de J.M. Sánchez Ron.

[16] F. Le Lionnais (ed.), *"Las grandes corrientes del pensamiento matemático"*. Buenos Aires, Eudeba, 1962. El original en francés es de 1948.

[58]Bourbaki 1962, p. 47.

[17] G.R. LLOYD, *"Las mentalidades y su desenmascaramiento"*. Madrid, Siglo XXI, 1996.

[18] G.H. MOORE Y A.R. GARCIADIEGO, "Burali-Forti's paradox: a reappraisal of its origins". *Historia Math.* **8** (1981), 319–350.

[19] M. Marshall, "Bourbaki. Une Societé secrète de mathématiciens". *Pour la science*, febrero-mayo 2000.

[20] H. BENIS–SINACEUR, "The nature of progress in mathematics: the significance of analogy". En E. Grosholz y H. Breger (eds.), *The growth of mathematical knowledge.* Dordrecht, Kluwer, 2000, 281–293.

[21] L. SZABÓ, "Les débuts de mathématiques grecques". Paris, Vrin, 1977.

[22] L. VEGA, *"La trama de la demostración"*. Madrid, Alianza, 1990.

Jesús Hernández
Dpto. de Matemáticas
Universidad de Autónoma de Madrid.
Correo electrónico: `jesus.hernandez@uam.es`