

El retorno de Fourier¹

por

Jean-Pierre Kahane

Puede sorprender este título: «El retorno de Fourier». ¿No es el nombre de Fourier, desde hace mucho tiempo, uno de los más familiares para el público científico? Series de Fourier, integrales de Fourier, transformadas de Fourier, son en matemáticas los temas más clásicos que puedan existir. La ecuación del calor, que gobierna en general los fenómenos de difusión (y que se aplica, en particular, a la difusión de las probabilidades ligadas al curso de la Bolsa como estableció Bachelier en 1900) es llamada por los físicos ecuación de Fourier. Para los ingenieros el análisis de Fourier es inseparable de la teoría de la señal, de la transmisión de los sonidos y de las imágenes. El mayor problema en astronomía y en astrofísica, donde lo que se observa resulta de la transformación de una señal por un aparato, es la deconvolución que permite remontar de la observación a la señal; el instrumento de esta deconvolución es la transformada de Fourier, y la transformada de Fourier rápida (*fast Fourier transform, FFT*) ha sido un factor decisivo en el desarrollo explosivo de la astrofísica desde 1962. *FFT*, palabra clave de la deconvolución, es hoy un útil indispensable en un gran número de ciencias y técnicas.

Fourier es una especie de nombre común, en todos los sentidos del término, para científicos e ingenieros, desde la genómica estructural a la telefonía.

Hace tiempo que los matemáticos de Grenoble crearon el Instituto Fourier. Desde 1978 la universidad científica y médica se llama *Université Joseph Fourier*. Las ediciones Belin publicaron en 1998 un grueso libro sobre «Fourier, creador de la física matemática» en el que el matemático Jean Dhombres y el físico Jean-Bernard Robert describen de forma magistral, en su contexto, la vida y obra de Joseph Fourier. Se encuentran hoy artículos y estudios sobre Fourier en todos los diccionarios y todas las enciclopedias.

Sí, Fourier está muy presente y comienza a ser bien conocido. Pero no siempre ha sido así. La actitud con respecto a Fourier en Francia es un buen test de las mentalidades en materia científica y, en particular, de las relaciones entre física y matemática.

Hace cincuenta años en Francia Joseph Fourier era ignorado. Hasta su sexta edición en 1974 la *Encyclopaedia Universalis* no contenía ningún artículo sobre él. Era la época de un cierto divorcio entre física y matemática; Fourier era, sin duda, demasiado matemático para ser un verdadero físico, demasiado

¹Traducción de Javier Duoandikoetxea. El artículo original, titulado «Le retour de Fourier», fue publicado electrónicamente por la Académie des Sciences en 2005 (http://www.academie-sciences.fr/membres/in_memoriam/Generalites/Fourier_Kahane.pdf) y aparecerá también en *Liber maiorum, Jean Dhombres*, Patricia Radelet-de Grave ed., Collection Réminiscences n° 8, Turnhout, Brepols, 2007.

físico para ser un verdadero matemático. Hoy, por el contrario, Fourier es emblemático del acercamiento entre física y matemática. En un periodo de dos siglos Fourier ha sido, de manera asombrosamente contrastada, desestimado y celebrado.

En 1805, con 37 años, tenía tras él una vida agitada y una excelente reputación científica. La reseña redactada por Arago relata de manera apasionante una existencia ligada a los grandes acontecimientos de la época: pobre huérfano, alumno brillante en la Escuela real militar de Auxerre, profesor de esta escuela a la edad de 16 años y medio, autor con 18 años de una memoria notable sobre la localización de las raíces de las ecuaciones algebraicas, candidato desgraciado a la entrada en la artillería, a pesar del apoyo del matemático Legendre (Arago cita la mordaz respuesta del Ministro de la guerra: «Fourier, no siendo noble, no podría entrar en la artillería ni aunque fuese un segundo Newton»), novicio en la abadía de Saint-Benoît sur Loire, renunciando a pronunciar sus votos por respeto a los decretos de la Asamblea Nacional, comprometido como actor eficaz en la revolución, alumno en la *École normale* del año III donde llamó la atención de Monge, «instructor» de la *École Polytechnique*, participante en la expedición a Egipto en el tiempo en que Bonaparte firmaba sus órdenes como «miembro del Instituto comandante en jefe del ejército de Oriente», secretario perpetuo del Instituto de El Cairo, cuyo presidente era Monge, redactor jefe del *Courrier d'Égypte*, hábil negociador en el momento de la retirada del ejército de Oriente, y escogido por Bonaparte como prefecto de Isère en febrero de 1802. En 1805 afrontó grandes trabajos de interés público como prefecto, la puesta a punto de su Prefacio a la *Description de l'Égypte*, y una investigación que había emprendido sobre la propagación del calor.

No era un tema nuevo. Ya Newton se había ocupado de él. Laplace y Lavoisier colaboraron en 1780 en la determinación de calores específicos y expusieron de manera muy clara su desacuerdo:

Los físicos están divididos sobre la naturaleza del calor. . . fluido extendido por toda la naturaleza. . . (o) resultado de los movimientos insensibles de las moléculas de la materia.

Lavoisier prefiere el fluido, Laplace la agitación molecular.

Fourier no se preocupa ni de la naturaleza del calor ni del mecanismo de su propagación. Tanto en la memoria que deposita en 1807 en el *Institut national des sciences et des arts* como en la versión desarrollada que da en 1811 y después en su *Théorie analytique de la chaleur* en 1822, indica su propósito limitándolo de este modo:

Cuando el calor está desigualmente distribuido entre los diferentes puntos de una masa sólida, tiende a ponerse en equilibrio y pasa lentamente de las partes más calientes a las que lo están menos; al mismo tiempo se disipa por la superficie y se pierde en el medio o en el vacío. Esta tendencia a una distribución uniforme y

esta emisión espontánea que se opera en la superficie de los cuerpos cambian continuamente la temperatura de los distintos puntos. La cuestión de la propagación del calor consiste en determinar cuál es la temperatura de cada punto de un cuerpo en un instante dado, suponiendo que las temperaturas iniciales son conocidas.

A partir de 1807 Fourier tenía completado su programa en lo esencial. Había estudiado la manera en la que se presenta el equilibrio del calor o su propagación en el transcurso del tiempo en cuerpos de formas diversas, y establecido las dos ecuaciones generales: en el interior del sólido,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

donde D es la densidad, K la conductividad interna y C el calor específico, y en el borde,

$$m \frac{\partial u}{\partial x} + n \frac{\partial u}{\partial y} + p \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h}{K} qu = 0,$$

donde m , n y p son las coordenadas de un vector normal a la superficie y q su longitud, y h representa la conductividad superficial.

El instrumento principal para la puesta en evidencia de estas ecuaciones es la noción de flujo, que es una importante aportación conceptual de Fourier a la física. Él mismo no se equivoca; al final de la *Théorie analytique de la chaleur* (§429) declara:

Esta noción de flujo es fundamental; mientras no se haya adquirido, no es posible hacerse una idea exacta del fenómeno y de la ecuación que expresa.

Se trataba a continuación para Fourier de resolver estas ecuaciones en derivadas parciales en una serie de casos particulares. Entonces desarrolló el método de descomposición en armónicos que hoy llamamos análisis de Fourier. Desde el primer ejemplo, el cálculo de la temperatura en el interior de un sólido ilimitado cuya base es una banda horizontal y los lados dos semiplanos verticales apoyados sobre la base, cuando la base se mantiene a la temperatura del agua hirviendo (denotada 1) y los lados a la del hielo que funde (denotada 0), introduce una serie trigonométrica para representar una función dada. Después dedica una serie de artículos a la determinación de series trigonométricas, sumas infinitas de términos de la forma $a_n \sin nx$ o $b_n \cos nx$, que llamamos hoy series de Fourier, supuestamente aptas para representar funciones de formas diversas sobre un intervalo, para ilustrar el hecho, paradójico en su época, de que una misma función (suma de una serie trigonométrica) puede tener expresiones diferentes en intervalos diferentes.

Fourier no se limita a la teoría y a los cálculos. En su apartamento de prefecto lleva a cabo experimentos para verificarlos y redacta cuidadosamente

sus informes. El libro de Dhombres y Robert reproduce algunos de ellos, incluso en forma de fotocopias de manuscritos inéditos de Fourier (pág. 330 y siguientes).

Trabaja en el torbellino de la vida pública y en un aislamiento científico total. En 1807 termina la redacción de un imponente manuscrito titulado *Théorie de la propagation de la chaleur dans les solides*, lo lleva a París, se lo hace conocer a sus colegas Biot y Poisson, que ha encontrado en la *École polytechnique*, y lo presenta a la primera Clase del *Institut national des sciences et des arts* el 21 de diciembre. Lagrange, Laplace, Monge y Lacroix son designados informadores. Silencio. Una reseña resumida de su trabajo aparece en marzo de 1808, firmada por P. (Poisson). Desestimación, incompreensión, es un verdadero fracaso para Fourier.

Comienza para Fourier una larga marcha. Inicia una correspondencia con Lagrange, la autoridad más respetada del mundo matemático, y Laplace, el más capaz de juzgar su obra. El esperado informe sigue sin llegar. Pero el Instituto nacional propone la propagación del calor como tema para el *Grand Prix* que debe ser otorgado en 1812. Fourier remodela su texto, lo reorganiza, lo enriquece, y lo dirige a la primera Clase del Instituto nacional en forma anónima según la costumbre, bajo el hermoso epígrafe *Et ignem regunt numeri* (también el fuego está regido por los números). Los comisarios son Lagrange, Laplace, Malus, Haüy y Legendre. Su veredicto, favorable a la memoria de Fourier, se emite el 16 de diciembre de 1811 y la coronación de la obra tiene lugar en sesión pública el 6 de enero de 1812. Es por fin la consagración. Pero ya se dibujan las sombras. El informe no es unánimemente elogioso, como lo muestra este extracto:

Esta obra encierra las verdaderas ecuaciones diferenciales de la transmisión del calor, tanto en el interior de los cuerpos como en su superficie; y la novedad del tema, junto con su importancia, han decidido a la Clase a coronar esta obra, observando, sin embargo, que la manera en la que el autor llega a sus ecuaciones no está exenta de dificultades, y que su análisis para integrarlas deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor.

En resumen, el trabajo es innovador, pero no es perfecto. Hay algo más grave aún: el Instituto nacional no decide su publicación. Nuevo fracaso para Fourier.

Sin embargo, Fourier está atrapado en la tormenta napoleónica. Ha sido hecho barón por Napoleón. Ha terminado finalmente la *Description de l'Égypte* y puesto al joven Champollion frente a los jeroglíficos que hay que descifrar. En 1813, la *Grande Armée* es derrotada, en 1814 Francia es invadida, Napoleón abdica, los dignatarios del Imperio se alían con los Borbones. Es la primera Restauración, en el transcurso de la cual Fourier se mantiene como prefecto de Isère. En 1815 es el retorno de la isla de Elba. Fourier se opone a Napoleón, que le destituye como prefecto de Isère y le nombra casi inmediatamente prefecto de Rhône. Napoleón exige que Fourier proceda a efectuar depuraciones

y como Fourier se niega, le destituye de nuevo, esta vez de manera definitiva, en vísperas de la derrota de Waterloo y de la segunda Restauración.

Fourier, persona no grata para los Borbones, acepta la tarea de dirigir una oficina de estadísticas en la prefectura del Sena. Arago hablará favorablemente de las memorias que redactó en ese puesto. El medio académico está turbulento: Monge y Carnot son excluidos de la Academia de ciencias a la vez que Bonaparte. Biot y Poisson debaten sobre la propagación del calor aunque la memoria de 1811, que utilizan, nunca ha sido publicada. Fourier acude a Laplace, se presenta como candidato a la Academia, es elegido pero recusado por Luis XVIII. Es candidato de nuevo a una plaza vacante en la sección de física general, es reelegido triunfalmente y por fin nombrado en mayo de 1817.

Ahora se trata de una consagración que no hace sino afirmarse hasta su muerte en 1830. Publica en el *Bulletin de la Société philomatique* textos sobre las aplicaciones de sus trabajos a la calefacción de las casas y al origen del calor terrestre, exige la publicación sin cambios de su memoria de 1811, que va a escalonarse de 1819 a 1826, y durante este tiempo pone a punto una nueva presentación de sus trabajos, la *Théorie analytique de la chaleur*, publicada como libro en 1822.

También trabaja sobre otro tema que llama análisis indeterminado, a saber, el estudio de las soluciones de un sistema de desigualdades algebraicas. Una pequeña parte se publica, una gran parte permanece inédita.

En 1822 es elegido secretario perpetuo de la Academia de ciencias para las ciencias matemáticas. En 1826 se convierte en miembro de la *Académie française*. Su obra se impone. Ha triunfado sobre sus competidores y las cuestiones que deja en suspenso inspiran a jóvenes y brillantes matemáticos como el alemán Lejeune-Dirichlet, el suizo Sturm y el francés Navier. El joven Auguste Comte le celebra como un precursor del positivismo y en 1830, después de su muerte, como igual a Newton:

... no temo proclamar, como si estuviera a diez siglos de ahora, que desde la teoría de la gravitación, ninguna creación matemática ha tenido más valor que ésta, en lo que respecta a los progresos generales de la filosofía natural; quizá incluso, escrutando más de cerca la historia de estos dos grandes pensamientos, se encontraría que la fundación de la terminología matemática estaba menos preparada para Fourier que la de la mecánica celeste para Newton.

Y, sin embargo, después de la muerte de Fourier una sombra espesa comienza a envolver su memoria.

Antes de encontrar una explicación leamos lo que escribe Victor Hugo. En 1862 publica *Les Misérables*. Esta novela, escrita en el exilio, es un monumento de erudición histórica a la vez que una gran obra popular. El libro tercero comienza con una evocación del año 1817. Es una avalancha al estilo Hugo de hechos y anécdotas, de donde extraigo una pequeña frase, una frase que dice todo sobre mi tema:

Había en la Academia de Ciencias un Fourier célebre a quien la posteridad ha olvidado y en no se qué desván un Fourier oscuro de quien el futuro se acordará.

El «Fourier oscuro» es Charles Fourier (1772-1837), el falansteriano. El «Fourier célebre» es el barón Joseph Fourier, el que nos ocupa.

¿Por qué cree Victor Hugo que la posteridad ha olvidado a este célebre Fourier y en qué tenía razón? Victor Hugo era amigo de Arago, que siendo muy joven, en 1809, había sido elegido en la primera Clase del *Institut national des sciences et des arts* y que sucedió a Fourier como secretario perpetuo en 1830. Arago conocía las agitaciones que había provocado el uso por Fourier de las series trigonométricas. Lagrange, el matemático más respetado de la época, hacía tiempo que había condenado todas las tentativas de este tipo y el informe para el Gran Premio ganado por Fourier declaraba, como ya hemos visto, que

su análisis... deja aún algo que desear, tanto en lo que respecta a la generalidad como incluso del lado del rigor.

Entre los jóvenes Fourier tenía competidores influyentes: Poisson y Cauchy. En su elogio fúnebre de Fourier, Arago está bien informado y es elocuente en lo que corresponde a la vida de Fourier, pero casi mudo sobre su obra como matemático. A este respecto, la necrología tiene aspecto de entierro.

Victor Hugo traduce un sentimiento extendido en Francia desde 1830: Joseph Fourier está superado. La continuación ha confirmado su juicio. Hay en París una calle Charles Fourier, pero no hay calle Joseph Fourier. Nunca ha habido un proyecto de publicación de las obras completas de Fourier, y Darboux, que en 1880-1890 publicó y comentó cuidadosamente una selección, que naturalmente incluía la *Théorie analytique de la chaleur*, dejó de lado todo el «análisis indeterminado», es decir, el estudio de sistemas de desigualdades, al que creía que Fourier había atribuido una importancia excesiva. Si los métodos introducidos con este fin por Fourier hubieran sido publicados, aparecerían hoy como una de las fuentes de la programación lineal y, más generalmente, de las matemáticas de la economía.

Mucho más tarde, en los años 1950, cuando ya el nombre de Fourier aparecía en los manuales de matemáticas y de física, sus *Oeuvres* publicadas por Darboux tenían pocos lectores. Darboux mismo había multiplicado las advertencias sobre las formulaciones atrevidas, y había unas cuantas, sólo sobre el tema de las series trigonométricas. Según Fourier, toda función dada sobre un intervalo es desarrollable en una serie de ese tipo, los coeficientes vienen dados por una fórmula integral y la serie converge en todo punto a la función. Pues bien, en este enunciado todo es falso. Para aplicar el método de Fourier es necesario que la función sea integrable, y Fourier no se preocupa de ello. Incluso cuando la función es continua la serie puede diverger en algunos puntos. Fourier no da la demostración más que sobre un ejemplo y se atreve imprudentemente a decir que tiene valor general. Además, resume su propósito

escribiendo fórmulas que no tienen ningún sentido como la convolución de una función con la serie $1/2 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x \dots$, que diverge en todo punto como señala Darboux. Su caso se agrava cuando pasa a las integrales en lugar de las series, derivando bajo el signo integral expresiones que no son integrables. Según los estándares de rigor matemático en vigor desde los años 1830, sobrepasa sin cesar lo que tendría derecho a escribir legítimamente.

No es un matemático fiable según la norma vigente. Es quizá una gloria pasada. En 1970 no es una gloria nacional. Su ausencia de la *Encyclopaedia Universalis* traduce lo que Victor Hugo expresaba un siglo antes: Joseph Fourier es un Fourier célebre en otro tiempo que la posteridad ha olvidado.

Esta desestimación de Fourier tiene raíces más profundas: es la concepción misma de las matemáticas la que está en tela de juicio. 1830 es un año bisagra. Ya he citado el comentario de Auguste Comte, entusiasta sobre Fourier y su enfoque de la ciencia, datado en ese año. En 1830 aparece igualmente un artículo de Lejeune-Dirichlet que contiene el primer teorema general sobre la convergencia de las series de Fourier, y que a menudo es considerado como el primer texto de análisis matemático rigurosamente impecable. El cuestionamiento de las concepciones de Fourier aparece de manera formal con otro joven alemán, Jacobi, amigo de Dirichlet.

En 1830 Jacobi tenía 26 años. Intercambiaba una importante correspondencia científica en francés con el muy respetado Legendre. Como muchos jóvenes matemáticos alemanes de la época, estaba atento a lo que sucedía en Francia. He aquí lo que escribió en una carta a Legendre, unas semanas después de la muerte de Fourier, el 4 de julio de 1830:

Mr. Poisson no debería haber reproducido en su informe una frase poco acertada de Mr. Fourier en la que este último nos reprocha a Abel y a mí el no habernos ocupado preferentemente del movimiento del calor. Es cierto que Mr. Fourier opinaba que el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber comprendido que el fin único de la ciencia es el honor del espíritu humano y que por esa razón una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo.

Siguiendo a Jacobi, el honor del espíritu humano se ha convertido en una especie de consigna de la ciencia pura. «En honor del espíritu humano» se ha convertido por medio de la pluma de Dieudonné en el emblema de la matemática pura, especialmente de Bourbaki. El inmenso esfuerzo hecho por los matemáticos en el siglo XIX, sobre todo en Alemania, de clarificación, rigor, puesta en forma y puesta en orden de las nociones matemáticas, que ha desembocado con Bourbaki en tomar las matemáticas desde el principio y en dar demostraciones completas, rompe en efecto con la filosofía de Fourier, incluso aunque las series de Fourier con Dirichlet, Riemann y Cantor lo hayan alimentado poderosamente.

Jacobi tenía razón. Para Fourier el fin principal de las matemáticas es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales. Se explica con elocuencia en el *Discours préliminaire à la théorie analytique de la chaleur* del que copiamos dos pasajes significativos:

Las ecuaciones del movimiento del calor, como las que expresan las vibraciones de los cuerpos sonoros o las oscilaciones últimas de los líquidos, pertenecen a una de las ramas de la ciencia del cálculo más recientemente descubiertas... Después de haber establecido estas ecuaciones diferenciales, había que obtener las integrales; lo que consiste en pasar de una expresión común a una solución propia sujeta a todas las condiciones dadas. Esta difícil búsqueda exigía un análisis especial, fundado sobre nuevos teoremas... El método que de él se deriva no tiene nada de vago, ni de indeterminado en las soluciones. Las conduce hasta las últimas aplicaciones numéricas, condición necesaria de toda investigación, sin las que no se llegaría más que a transformaciones inútiles...

El estudio profundo de la naturaleza es la fuente más fecunda de los descubrimientos matemáticos... Las ecuaciones analíticas... se extienden a todos los fenómenos generales. No puede haber lenguaje más universal y más simple, más exento de errores y oscuridades, es decir, más digno de expresar las relaciones invariables de los seres naturales. Considerado desde este punto de vista, el análisis matemático es tan extenso como la propia naturaleza... Su principal atributo es la claridad. No tiene signos para explicar las nociones confusas. Relaciona los fenómenos más diversos y descubre secretas analogías que los unen... Nos los hace presentes y medibles, y parece ser una facultad de la razón humana, destinada a suplir la brevedad de la vida y la imperfección de los sentidos.

El primer pasaje marca el proceso: poner en ecuación (aquí una ecuación en derivadas parciales) un fenómeno natural (aquí los movimientos del calor); encontrar la solución particular correspondiente a unas condiciones dadas (condiciones en los límites, condiciones iniciales) que lleva a definir las soluciones «hasta las últimas aplicaciones numéricas». El segundo pasaje expresa la filosofía de Fourier y es un himno al análisis matemático. Al lado del «estudio profundo de la naturaleza» Fourier tiene también en cuenta, y lo explica en otra parte, lo que Jacobi llama «la utilidad pública» (calefacción de las casas, uso de la energía solar y de la geotermia).

Partir de fenómenos naturales o de cuestiones sociales, extraer métodos generales y concluir dando métodos de cálculo numérico, todo esto suena más moderno hoy que hace 50 años, porque los ordenadores y la modelización han pasado por ahí. Es una razón de fondo del retorno de Fourier.

Sin embargo, el retorno de Fourier se anunciaba también de otra manera, en el seno mismo de las matemáticas puras. Los problemas relacionados con las series de Fourier, en el transcurso de los siglos XIX y XX, no han cesado de

servir de motivación, de estimulante o de test para un gran número de teorías matemáticas, de la teoría de números al análisis funcional y a las probabilidades pasando por las definiciones de la integral y la teoría de conjuntos. Los primeros actores de este movimiento han sido Lejeune-Dirichlet y Riemann. Es gracias a la tesis de Riemann sobre las series trigonométricas que se habla hoy de series de Fourier. En efecto, las series trigonométricas habían sido introducidas bastante antes de Fourier por Daniel Bernoulli en el estudio de las cuerdas vibrantes. Fórmulas análogas a las de Fourier, pero referidas sólo a un número finito de datos y de coeficientes, se encuentran ya en Lagrange, quien ponía en duda la posibilidad de su extensión. Riemann estudia cuidadosamente la historia del tema y concluye con un juicio inapelable:

Fourier es el primero que ha comprendido de manera exacta y completa la naturaleza de las series trigonométricas.

Riemann explica las reticencias de Lagrange ante la audacia de Fourier y pone de relieve el inmenso alcance del acoplamiento de las dos fórmulas

$$f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \dots + \frac{1}{2}b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \dots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Este acoplamiento, extendido a situaciones más generales, se llama transformación de Fourier y traduce sus dos aspectos: el análisis armónico, que determina en una función $f(x)$ el peso de los diferentes armónicos por medio del cálculo de los coeficientes a_n y b_n , y la síntesis armónica, que consiste en recuperar la función $f(x)$ con ayuda de la primera fórmula.

De hecho, en el transcurso del siglo XIX y posteriormente las nociones más fundamentales del análisis han sido elaboradas a partir de estas fórmulas o en relación con ellas: la de función con Dirichlet; la de integral con Riemann (integral de Riemann), después con Lebesgue (integral de Lebesgue), Denjoy (totalización de Denjoy), Laurent Schwartz (distribuciones de Schwartz); la de conjunto de puntos con George Cantor. En particular, las distribuciones de Schwartz legitiman completamente lo que yo llamaba más arriba, siguiendo a Darboux, «las fórmulas que no tienen ningún sentido». La convergencia de las series de Fourier ha dado mucho trabajo a los matemáticos y les ha llevado a modificar el problema: ¿qué hacer ante una serie? Si se trata de una serie numérica, hay que encontrar los procedimientos de sumación que se le adaptan. Si se trata de una serie de funciones, se puede soñar en un tratamiento por medio de una geometría nueva en un espacio en el que los puntos representan funciones: es el nacimiento del análisis funcional. En particular, las series trigonométricas son series «ortogonales». El último avatar de las series de Fourier es la teoría de ondículas, debida a Yves Meyer en su parte matemática, y que comienza como la creación y el estudio de una nueva clase de series ortogonales.

El alcance real de las fórmulas de Fourier se percibe hoy mejor que antes: constituyen un programa. Se puede variar el sentido que se da a las funciones, a las series y a las integrales. Se trata en todos los casos de análisis y síntesis armónica. Es trabajo de los matemáticos introducir los conceptos y los instrumentos que hacen válidas las fórmulas.

Los físicos no descansan. El título completo del libro de Dhombres y Robert es *Fourier, creador de la física matemática*. La noción de flujo, esclarecida por la notación vectorial, es de uso tan constante que se puede olvidar su origen, el flujo de calor. La ecuación del calor figura con la ecuación de las cuerdas vibrantes y la ecuación del potencial en la trinidad de las ecuaciones en derivadas parciales fundamentales de la física. La teoría del movimiento browniano y todos los fenómenos de difusión han renovado el interés por ella. Las series de Fourier y las integrales de Fourier se imponen en la teoría de la señal y en todas sus variantes. La transformada de Fourier es el paradigma de la búsqueda de valores propios de los operadores en física.

Los físicos han sido sensibles al carácter efectivo de los procedimientos de cálculo puestos en marcha por Fourier antes que los matemáticos. Para Fourier, el interés de las series trigonométricas era permitir un cálculo rápido cuando eran «muy convergentes» o «extremadamente convergentes». Estos términos no tienen definición matemática y, sin embargo, tienen un sentido claro. Se trata de permitir cálculos efectivos, allí donde se necesitan (en el caso de Fourier, el cálculo de la temperatura en un punto de un sólido cuando se fija la distribución de temperaturas en el borde). En este sentido, la rapidez de la convergencia es más importante que el propio hecho de la convergencia. Una serie «extremadamente convergente» tiene un valor práctico: bastan algunos términos para una buena aproximación de la suma.

Volvamos para terminar a las matemáticas de hoy. Ahora mejor que nunca los matemáticos aprecian el alcance de los programas visionarios, que nunca son formalizados completamente. Aprecian igualmente los procedimientos de cálculo efectivos, a los que la informática y los ordenadores han dado una nueva dimensión. Fourier entra en resonancia con la forma actual de concebir el trabajo matemático.

Si juzgo por mí mismo, ya no leo a Fourier como en otro tiempo. Antes, con la impertinencia de la juventud y la precaución de mis antepasados, le miraba desde arriba. Hoy, busco lo que quiere decir y cómo ha podido llegar tan bien. Una de las claves viene dada por Fourier, es «el estudio profundo de la naturaleza». Tampoco sobre esto los matemáticos de hoy tienen el mismo punto de vista que antes. La unidad de las matemáticas se traduce menos por los fundamentos y las estructuras que por las interacciones en su seno, alimentadas por las interacciones con la física y otras ciencias. En 1960 se hablaba de la matemática, en 1980 de las matemáticas puras y aplicadas, y en 2000 se ve a las matemáticas abrazando ideas y métodos venidos de todas las ciencias, amasándolas, destilándolas, extrayendo una sustancia general y poderosa susceptible de ser invertida en otra parte, mucho más allá de lo que

la ha hecho nacer. En esto las matemáticas vuelven a encontrar una buena parte de su historia, y a Fourier en particular.

Un ejemplo emblemático del retorno de Fourier es la teoría de ondículas de la que ya he dicho algo. Pero es, sobre todo, desde el origen y hoy más que nunca un punto de encuentro de físicos, ingenieros y matemáticos. Es a un físico, Alex Grossman, y a un ingeniero, Jean Morlet, a quienes debe Yves Meyer su introducción al tema en 1985. Hoy las ondículas aportan a la vez que un medio potente para la modelización y el cálculo, un lenguaje y un punto de vista común a toda la ciencia de nuestro tiempo. Sin embargo, el retorno de Fourier que manifiestan se extiende mucho más allá del análisis de Fourier. Las partes más vivas de las matemáticas se encuentran hoy en interacción con la física, la economía, la industria, la biología. El retorno de Fourier, del que aquí tratamos, más allá de las indicaciones algo resumidas que he dado sobre el análisis de Fourier, es el retorno a su manera de ver, a la filosofía del *Discours préliminaire*.

Las matemáticas evolucionan y progresan, demasiado poca gente lo sabe. Se manifiestan grandes tendencias como en todas las ciencias, con cambios de puntos de vista a veces rápidos. Pero, a diferencia de otras disciplinas, las matemáticas no se desvían de su pasado. Al contrario, el auge contemporáneo revaloriza sectores enteros, se podrían dar muchos ejemplos. Es pues imprudente creer muerto el pasado. Para mí, la resurrección de Fourier no significa de ningún modo el entierro de Jacobi o Bourbaki, que me parecen haber tenido su lugar en la cultura y en el imaginario de los matemáticos, tanto por su filosofía como por su obra. El Panteón matemático está poblado por sombras muy vivas que cambian de lugar en el transcurso del tiempo, algunas muy visibles y otras en retirada. Mi propósito era subrayar el retorno al primer plano, entre ellas, de Joseph Fourier.

Jean-Pierre Kahane
Département de Mathématiques
Université Paris-Sud Orsay
Bât. 425, F-91405 Orsay Cedex, France
Correo electrónico: jean-pierre.kahane@math.u-psud.fr