$$e^{i\pi}+1=0$$

LA BELLEZA EN MATEMÁTICAS

Alberto Bagazgoitia (*)

"Señores, esto es completamente cierto, es absolutamente paradójico; no podemos entenderlo y no sabemos qué significa. Pero lo hemos demostrado, y por lo tanto sabemos que debe ser verdadero".

Benjamin Peirce

Se ha repetido muchas veces que la famosa fórmula de Euler es una de las más bellas de la Matemática. Ciertamente reúne en una sencilla expresión los números más famosos –y las operaciones básicas– y logra unificar conceptos numéricos surgidos en diferentes contextos y que trataban de responder a problemas diferentes. El número π proviene de la geometría, el número *e* del análisis y el número *i* del álgebra.

Pero cuando hablamos de belleza en matemáticas no estamos hablando de una sensación primaria como la que puede provenir del arte, la pintura, la música o la contemplación de un paisaje natural. Aunque la matemática en su construcción y desarrollo tiene bastante de arte, para poder apreciar la belleza hay que pertenecer al grupo de los iniciados. No, no tiene nada que ver con una secta, pero sí que para poder acceder al disfrute de la belleza matemática es necesaria la comprensión de los conceptos que intervienen. Y cuando, a partir de unos elementos inicialmente dispersos y sin relación, la mente humana es capaz de crear una sinfonía que los armoniza y los muestra como parte de un todo, se nos ofrece ante nuestra vista un paisaje luminoso: la comprensión profunda de los elementos y sus relaciones entre ellos.

Así pues, en matemáticas, no es posible belleza sin comprensión. Y en esta fórmula de Euler se mezcla lo imaginario y lo real, lo racional y lo irracional, lo algebraico y lo trascendente. Hay que reconocer que la terminología utilizada no sugiere ningún tema científico. ¿De qué estamos hablando?, ¿de matemáticas o de esoterismo?, ¿de la certidumbre más rigurosa o de desvaríos oníricos?

Hablamos de números, de un concepto tan elemental, tan primitivo, como el de número. Concepto que surge en los albores de la historia pero que hasta finales del siglo XIX no es comprendido en su totalidad. Hagamos un breve repaso de la historia de estos números hasta que Euler, en 1748, en su *Introductio in analysin infinitorum* establece la famosa fórmula. Por cierto, que es también a Euler a quien debemos la terminología empleada: e, i ,π.

a) π: La razón del perímetro de la circunferencia al diámetro.
b) 0 y los números enteros.
c) i la unidad imaginaria.
d) e base del logaritmo neperiano.
e) funciones trigonométricas, logarítmicas y exponenciales.

(*) Asesor de Matemáticas del Berritzegune de Vitoria.

π: LA RAZÓN DEL PERÍMETRO DE LA CIRCUNFERENCIA AL DIÁMETRO

La historia de π está ligada a la geometría y concretamente al círculo, la figura perfecta para los griegos. La Grecia antigua fue la primera civilización que se ocupó de las "verdades inútiles" como las definiría Felix Klein, más allá del utilitarismo de otras civilizaciones como la mesopotámica o la egipcia. La aparición de los segmentos inconmensurables –la primera gran crisis en la historia de las matemáticas– hizo que los griegos se inclinaran por la geometría, dejando de lado el álgebra (ya que los números no permitían representar las longitudes de todos los segmentos) y utilizaran para los cálculos un álgebra geométrica(1).

Así el problema del cálculo del área de una figura consistía en construir un cuadrado de la misma área: era lo que se llamaba cuadrar la figura. Los griegos sabían cuadrar rectángulos, triángulos y, a partir de aquí, mediante triangulación y aplicación del teorema de Pitágoras, cualquier polígono. El paso siguiente era cuadrar el círculo.

También conocían que el área de un círculo era proporcional al cuadrado de su radio, por lo que para cuadrar el círculo bastaría con construir un segmento de longitud igual a lo que ahora conocemos por π(2).

Pronto quedó fijado el enunciado de uno de los problemas más famosos de la historia de las matemáticas, que perviviría durante más de 2.000 años, que marcaría la historia del conocimiento de π y cuya solución la alcanzaría Lindemann en 1882:

F. Lindemann (1852-1939)

"Construir, con regla y compás, un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado(3)".

Así se abrían dos vertientes para el conocimiento de π:

- Una, instrumental, que trataría de determinar el valor de este número mediante sucesivas aproximaciones, y
- Otra, teórica, que pretendía la construcción exacta de un segmento de longitud π, utilizando solamente regla y compás(4).

Arquímedes (287-212 a.d.C), el mayor matemático de la antigüedad y uno de los más grandes de la historia, demostró que la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro era la misma que entre el área del círculo y el cuadrado del radio y trabajó en estas dos direcciones:

- en la vertiente teórica, construyó su espiral que permitía rectificar la circunferencia y por tanto cuadrar el círculo (sin respetar la limitación de regla y compás).

Arquímedes (287 a.c.-212 a.c.)

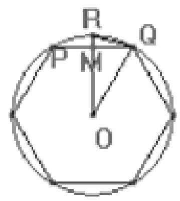
- en la vertiente utilitaria, obtuvo para π el valor 22/7.

Calculó la longitud de la circunferencia inscribiendo y circunscribiendo polígonos regulares, a partir del hexágono, y duplicando su número de lados hasta llegar a 96 lados ($96 = 2^4 \cdot 6$).

A partir del método de Arquímedes, el cálculo del valor de π es, como dice Boyer, más una cuestión de resistencia calculística que de inteligencia teórica. De hecho basta con el Teorema de Pitágoras para obtener una aproximación tan buena como se quiera. Si partimos del perímetro conocido de un polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia, entonces el perímetro del polígono regular de 2n lados se puede obtener aplicando 2 veces el teorema de Pitágoras.

Si OQ = r . Sea PQ = s el lado conocido del polígono regular inscrito de n lados.

Entonces $OM = u = \sqrt{r^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$ y $MR = r-u = v$, de donde el lado del



polígono de 2n es $RQ = w = \sqrt{v^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$

(o tomando r = 1, $l_n = s$,, $l_{2n} = w$ queda $l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$

Arquímedes así hubiera podido calcular:

Partiendo del hexágono $l_6 = 1$

$l_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$,, $\pi \approx 3{,}105828$

$l_{24} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,, $\pi \approx 3{,}132629$

$l_{48} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$,, $\approx 3{,}139350$

$l_{96} = \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$,, $\approx 3{,}141032$

Es Vieta en 1579 el primero que da una expresión exacta para π mediante un producto infinito. Inscribe un cuadrado en un círculo dado y aplica la fórmula trigonométrica recursiva $a_{2n} = a_n \sec \pi/n$ para obtener:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots$$

Y en 1593 calculó π con 10 decimales exactos utilizando un polígono de $393.216 = 3.2^{17}$ lados.

La introducción del análisis empieza a dar también sus frutos en cuanto al conocimiento de π. James Gregory (1638-1675) obtuvo el desarrollo en serie:

$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \ldots$, donde haciendo x=1 nos da una nueva aproximación para π: $\pi/4 = 1/1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$(Serie Gregory-Leibniz).

En 1706 John Machin descubrió su fórmula $\pi/4 = 4\ \mathrm{arctg}(1/5) - \mathrm{arctg}(1/239)$

Para obtener la fórmula Machin se parte de un ángulo α tal que $\mathrm{tg}\ \alpha = 1/5$

De aquí se obtiene $\mathrm{tg}\ 2\alpha = 5/12$ y $\mathrm{tg}\ 4\alpha = 1+1/119$.

Por tanto $tg\left(4\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tg4\alpha-1}{1+tg\,4\alpha}=\frac{1}{239}$ ➡ $\mathrm{arctg}\ (1/239) = 4\alpha - \pi/4$ ➡

$$\pi/4 \quad = 4\ \mathrm{arctg}(1/5) - \mathrm{arctg}(1/239)$$

Esta serie proporciona un método bastante eficiente de cálculo y Machin obtuvo 100 cifras decimales de π. Superó los dos problemas principales hasta entonces: lentitud de la convergencia de la serie y evitó el cálculo de raíces.

Llegamos a Euler (1707-1783) quien también aportó sus esfuerzos al cálculo de π. A él se debe la consolidación definitiva del uso de la letra griega π para representar la razón de la longitud de la circunferencia al diámetro[(5)].

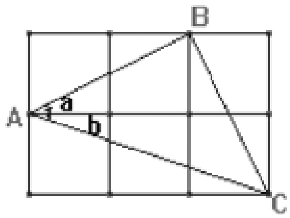
También calculó cifras de π y encontró varias fórmulas notables en las que aparece π:

$$\pi = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 - 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 - 1/10 + \ldots$$

donde el signo, a partir de los dos primeros, se determina así:

- si el denominador es primo de la forma 4m + 1: le corresponde signo –
- si el denominador es primo de la forma 4m-1: le corresponde signo +
- si el denominador es compuesto el signo sería el del producto que corresponde a sus factores primos.

Y obtuvo la fórmula "tipo Machin": $\pi/4 = \arctan 1/2 + \arctan 1/3$



Es fácil probar este resultado geométricamente:

En la figura el triángulo ABC es rectángulo en B e isósceles.

Por tanto el ángulo A = a+b mide π/4 radianes, mientras que $a = \arctan 1/2$ y $b = \arctan 1/3$

Euler también resolvió uno de los más famosos problemas de la época, el llamado "problema de Basilea", en el que aparece π de forma inesperada[(6)].

La cuestión consistía en determinar el valor exacto de la serie infinita:

$$1 + 1/4 + 1/9 + ... + 1/k^2 + ...$$

"Sin embargo he encontrado ahora y contra todo pronóstico una expresión elegante para la suma de la serie 1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + ... que depende de la cuadratura del círculo... He encontrado que seis veces la suma de esta serie es igual al cuadrado de la longitud de la circunferencia de un círculo de diámetro 1"

$$\text{O sea: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Estos eran los conocimientos sobre π cuando Euler publica en 1748 la famosa fórmula que da título a este artículo.

En los siguientes 200 años habría pocos cambios en los métodos de cálculo de π, que se basan fundamentalmente en variaciones de la fórmula de Machin.

El cenit de los cálculos a mano se alcanza con William Shanks (1812-1882) quien publica en 1853 primero 607 cifras y luego 707. Sin embargo comete un error en la cifra 528, error que pasó desapercibido hasta que en 1945 D.F.Ferguson, en uno de los últimos cálculos hecho a mano, halló 530 cifras.

En la época moderna, con la aparición de los ordenadores, el cálculo de cifras de π cobra una nueva dimensión(7).

Hasta el siglo XVIII se había avanzado mucho en la vertiente del cálculo de π pero muy poco en la vertiente teórica. Es en 1761 cuando Johann Heinrich Lambert (1728-1777) demuestra que π es irracional y Lindemann en 1882 demostraría que es trascendente con lo que quedaría definitivamente resuelto el problema de la cuadratura del círculo. Se necesitó una comprensión profunda de los números reales para llegar a la conclusión de que el círculo no es cuadrable usando regla y compás.

π pertenecía a una clase de números de la que ni siquiera se había sospechado que existiesen hasta que Euler llamó trascendentes a aquellos números que "trascienden los métodos algebraicos". Liouville demostraría la existencia de estos números en 1844 y luego resultó que π era uno de ellos.

J. Liouville (1809-1882)

EL 0 Y LOS NÚMEROS ENTEROS

Hay que reconocer que todavía hoy en día el concepto de número negativo y las reglas de operaciones entre ellos son fuente de dificultades en la enseñanza. Por ello no estaría de más dar un breve repaso histórico por su proceso de construcción y su lenta aceptación en sociedad como miembros de pleno derecho.

Los números naturales y fraccionarios tienen su origen en la experimentación con magnitudes, en la necesidad de contar y medir. No ocurre lo mismo con los números negativos que surgen de las propias necesidades de la matemática y en concreto de las manipulaciones algebraicas. Antes de la aparición de los números negativos se habían construido muchas, muchísimas matemáticas, lo que quiere decir que el concepto de número negativo no es un concepto elemental y con el que, como profesores, debemos comprender las dificultades que pueden tener nuestros alumnos.

La antigua civilización griega desconocía los números negativos. Su álgebra geométrica impidió que necesitasen este nuevo tipo de números.

Los hindúes nos aportaron nuestro actual sistema de numeración, decimal y posicional, y Brahmagupta en el año 628 estableció las reglas para operar con números positivos, negativos y el cero.

Los árabes, con Al-Kwarizmi a la cabeza, transmitieron a occidente las aportaciones hindúes, y, aunque tuvieron que conocer los números negativos, sólo utilizarían los positivos

En la Europa medieval destaca Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. En 1202 escribió su *Liber abaci* (*El libro del ábaco*) donde introducía el sistema de numeración hindú y los algoritmos de cálculo. En cuanto a los números negativos no acepta las raíces negativas de una ecuación.

L. Fibonacci (1170-1250)

Con el Renacimiento y el desarrollo del álgebra vuelven a surgir los números negativos. Se reconoce su utilidad para abordar la resolución de ecuaciones, aunque no se les confiere categoría de números ni se los acepta como soluciones de las ecuaciones. (Hay que recordar que el álgebra no utilizó nuestra simbología actual hasta el siglo XVII y que, hasta entonces, era retórica).

Progresivamente se incorporaron símbolos como +, - a través del alemán Michael Stifel en 1544, quien ya conocía las reglas operativas con los números negativos pero los rechazaba como soluciones de ecuaciones.

Tras las avances realizados por Scipione del Ferro, Tartaglia, o Ferrari sobre la resolución de la ecuación cúbica, Giordano Cardano publica en1545 su *Ars magna* donde se recoge la resolución de la ecuación de tercer y cuarto grado. Cardano sí acepta las raíces negativas, aunque las llama "ficticias", pero no admite los negativos como coeficientes en las ecuaciones algebraicas. Por tanto para él las ecuaciones que hoy nosotros escribiríamos así: $x^3 + x = q$, $x^3 = x + q$ eran distintas. En el lenguaje de la época la primera se diría "el cubo y la cosa igual a un número" y la segunda "el cubo igual a la cosa y a un número".

N. Tartaglia (1500-1557)

G. Cardano (1501-1576)

Veremos también más adelante que la aparición de los números imaginarios surge en este mismo contexto –resolución de la ecuación cúbica- y que, aunque se admitieron como artificio de cálculo, su aceptación como números de pleno derecho también necesitó de varios siglos.

Vieta (1540-1603), el matemático más importante de finales del siglo XVI, pone de manifiesto de forma clara la dificultad conceptual que conllevan los negativos. Considerado el padre del álgebra simbólica, introdujo las letras para representar los coeficientes en las ecuaciones (parámetros) pero no admitía los negativos ni como coeficientes ni como raíces.

Resumiendo, en el Renacimiento los negativos se usaban porque eran útiles en la manipulación algebraica pero no se acepaban como números. De hecho, para Stevin (1548-1620) un número era "lo que expresa cantidad" y está claro que en esta definición no pueden entrar los negativos que no provienen de la experiencia, de contar o medir.

Durante el siglo XVII se amplía el uso de los negativos para el cálculo y aunque se mantienen las reticencias aparecen los primeros intentos por considerarlos números de pleno derecho. El hecho de utilizarlos sin disponer de una fundamentación lógica sólida dio lugar a interpretaciones erróneas.

Por ejemplo, John Wallis (1616-1703), el matemático inglés más importante anterior a Newton, operó con los negativos sin ningún problema, dio reglas para operar con potencias de exponentes negativos, pero pensaba que los negativos eran mayores que infinito y lo justificaba generalizando relaciones válidas para los números naturales:

"Si a/0 es infinito para a > 0, y si el denominador se sustituye por un número negativo b que es menor que cero, pues a/b debería ser mayor que infinito y a/b es negativo".

Para Descartes (1586-1650): "No pueden existir números menores que nada".

Antoine Arnauld (1612-1694) ante la proposición –1/1 = 1/-1 se preguntaba: "¿Cómo es posible que una cosa menor a otra mayor sea lo mismo que una mayor a otra menor?"

Los primeros pasos en la aceptación de los negativos son debidos a Girard quien aporta una interpretación geométrica: positivo –avance y negativo– retroceso, aunque Descartes y Fermat, creadores de la Geometría Analítica, no lo aceptaron.

Newton (1642-1727) fue el primero en utilizar los ejes de coordenadas cartesianos como hoy los conocemos. Así los números negativos encuentran un significado geométrico: -3 es la coordenada de un punto que dista 3 unidades del origen hacia la izquierda.

Pero una cosa era la interpretación geométrica del negativo, ya admitida por Wallis y Girard, y otra que valga como soporte de la estructura del número negativo.

En el siglo XVIII continúan los problemas con la interpretación de los negativos. D'Alembert (1717-1783) en la Enciclopedia escribe: "Decir que la cantidad negativa es menos que nada es expresar una cosa que no se puede concebir". La aparición de una solución negativa significa para D'Alembert que el problema está mal planteado. Por ejemplo: "Si se busca un número que añadido a 100 dé 50 las reglas del álgebra darán x = -50, lo que hace ver que la cantidad x es igual a 50 y que en lugar de ser añadida debe ser restada".

Llegamos a Euler, quien en su "Introducción completa al Álgebra" quiere dar un significado real a las operaciones: restar –x es lo mismo que sumar x porque "cancelar una deuda es lo mismo que dar un obsequio".

Euler interpreta b(-a) = -ba ya que "3 deudas de a escudos constituyen una deuda de 3a escudos". A partir de aquí justifica que (-a)(+b) = -ab por la conmutatividad de la multiplicación y (-a)(-b) = ab es consecuencia de que el resultado en valor absoluto es ab y por lo anterior no puede tener signo negativo, por tanto deberá ser positivo.

En cuanto al orden la confusión era todavía mayor. Euler pensaba que los negativos eran mayores que ∞ y menores que 0. Puesto que

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\dots \qquad \textit{cuando} \quad x=2 \quad \textit{se tiene}$$

$$\frac{1}{-1}=-1=1+2+4+\dots \qquad \textit{por} \quad \textit{tanto} \quad -1>\propto$$

En el siglo XIX se empieza sentir la necesidad de un mayor rigor lógico en la fundamentación del análisis. De todas formas hay que decir que Cauchy (1789-1857), pionero en esa rigorización, todavía distinguía entre número (positivo) y cantidad (positivo o negativo). Augusto Morgan (1806-1871), seguía defendiendo en 1831 que ni los números negativos ni los imaginarios tenían significado real y que si aparecían como solución de algún problema era consecuencia de algún fallo en el planteamiento. Ponía el siguiente ejemplo:

"Un padre tiene 56 años y su hijo tiene 29. ¿Cuándo doblará la edad del padre la del hijo? Ante la solución x=-2 Morgan dice que había que haber preguntado ¿cuándo dobló la edad del padre la del hijo?"

Así pues seguían las dificultades para aceptar que los negativos tuviesen un significado real. Herman Hankel (1839-1873) introduce un nuevo punto de vista: la justificación se apoya en las leyes formales, en el "principio de permanencia" introducido por George Peacok. Este principio afirmaba que: las reglas que se verifican con los números naturales –conmutativa, asociativa para la suma y el producto, la distributiva del producto respecto de la suma– siguen verificándose para todos los números u objetos representados por letras.

Así los negativos fueron admitidos como símbolos con los que se opera siguiendo unas leyes, aunque carecían de una definición rigurosa. El problema se resolvió con la construcción formal del número entero. Se les reconoció como número y se les otorgó la misma categoría que a los positivos.

A tener en cuenta en el aula

a) Conocido el recorrido histórico, desde la aparición de los negativos hasta su plena aceptación en sociedad, no nos debe extrañar las dificultades que surgen en el proceso de aprendizaje. Los números naturales representan cosas reales y concretas. Sin embargo los negativos no tienen esa representación natural y directa, pero se deben operar con ellos como si la tuvieran. Más allá de las representaciones elementales de la vida corriente –temperaturas, ganancias, pérdidas,...– nos encontramos por primera vez con la transición de las matemáticas concretas a las formales, para lo que se necesita capacidad de abstracción.

b) Por otra parte el cálculo con números negativos puede darnos sorpresas en el aula. Las calculadoras científicas y los asistentes matemáticos que poco a poco van introduciéndose en nuestras aulas, además de tener importantes repercusiones en todo lo que tiene que ver con los procedimientos de cálculo y su enseñanza, también pueden modificar los propios contenidos o cuando menos el orden en el que se plantean esos contenidos.

Ocurrió realmente en un aula de Bachillerato. Entre los primeros ejercicios elementales para ir conociendo el programa la profesora planteó calcular $\sqrt[3]{-8}$. En vez de obtener la solución conocida y esperada por todos –2, el programa respondió con $1 + \sqrt{3}\ i$. Las preguntas, comentarios, ligados a un interés muy concreto, crearon un ambiente diferente en el aula, más de tipo investigativo y dieron lugar a la introducción de nuevos contenidos.

i: LA UNIDAD IMAGINARIA

La aparición de los números imaginarios en la historia de las matemáticas no proviene de la necesidad de resolver la ecuación $x^2 +1 = 0$, para la que, como no disponíamos de ninguna solución real, definimos un nuevo número $i = \sqrt{-1}$ y ya podemos hablar de los números complejos.

El proceso de construcción histórica es muy diferente. Responde, eso sí, a la necesidad de resolver ecuaciones, pero no la ecuación de segundo grado sino la cúbica.

Los babilonios ya conocían el método de completar cuadrados para resolver la ecuación cuadrática, incluso disponían de tablas que les permitían obtener soluciones para ecuaciones del tipo $x^3+x^2 = a$. Desde entonces la mayor contribución al desarrollo del álgebra vino de la mano de la solución de las ecuaciones cúbica y cuártica, que se abordó en el Renacimiento y, que entre otras cosas, dio lugar a la consideración de los números imaginarios.

Su origen y la valoración inicial que merecen estos nuevos números a los matemáticos de la época son muy similares a los ya descritos para los números negativos: útiles como artificios de cálculo pero sin ninguna significación real.

Hay que decir que la necesidad de resolución de estas ecuaciones no vino impulsada por ninguna exigencia de tipo práctico (de hecho Al-Kashi, matemático árabe de principios del siglo XV, sabía resolver con suficiente aproximación cualquier ecuación cúbica proveniente de problemas prácticos). Fue más bien un interés teórico.

La publicación de la solución de la ecuación cúbica, y también de la cuártica, se realizó en 1545 en el *Ars magna de Cardano* (1501-1576). La autoría del descubrimiento dio lugar a una de las grandes polémicas en la historia de las matemáticas(8). Brevemente contada ésta es la cronología de lo ocurrido:

Scipione del Ferro (1465-1526) fue el primero que, alrededor de 1515, obtuvo la solución de un caso particular de la ecuación cúbica –la de la forma $x^3+px = q$, donde hay que recordar que los coeficientes p y q se consideran solamente positivos, pues los negativos todavía no eran admitidos-, pero no la publicó sino que se la reveló a uno de sus alumnos, Antonio Maria Fiore.

Por otra parte, Tartaglia (1500-1557) logró obtener la solución de forma independiente. En esta época los desafíos intelectuales eran habituales y se organizó uno entre Fiore y Tartaglia. Corría el año 1535 y cada uno propuso al otro 30 cuestiones. Tartaglia resolvió las 30 cuestiones que le propuso Fiore y éste no logró resolver ninguna de las propuestas por su rival.

Y es que Tartaglia, además de saber resolver la ecuación que conocía Fiore, también obtuvo la solución para las de la forma $x^3 + p\,x^2 = q$.

Cardano, consiguió, bajo juramento de que no desvelaría el secreto, que Tartaglia le revelase su solución y posteriormente la publicó en su Ars magna.

Aplicando la regla que da Cardano a la ecuación $x^3 = 15x + 4$ se llega al resultado:

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$$

lo que podría hacer pensar que no existen soluciones pues, como Cardano ya sabía, no existían las raíces cuadradas de números negativos. Pero, por otra parte, mediante un cálculo elemental también vio que x = 4 era una solución de la ecuación. ¿No era válida la fórmula para obtener las soluciones?

Fue Rafael Bombelli (1526-1573) quien tuvo lo que él mismo calificó como "una idea loca". Puesto que la suma de los dos radicales cúbicos debía dar 4, expresó el radical cúbico $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}$ de la forma $2 + b\sqrt{-1}$, donde había que determinar el valor de b.

Operando, obtuvo que b = 1 y, análogamente, $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=2-\sqrt{-1}$ y por tanto llegó a que

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Aunque Bombelli logró resolver esta ecuación específica, el problema general no se resolvería hasta la introducción de los números complejos. Porque, ¿cómo determinar el número complejo que debemos elevar al cubo para obtener $2 + \sqrt{-121}$, sin conocer de antemano la solución de la ecuación?. ¿Y dónde están las otras raíces reales de la ecuación cúbica?

El propio término "imaginario" sugiere que esos números no tienen un significado real. Se podía operar con ellos asumiendo que eran simplemente un artificio de cálculo, que nos permitía obtener las soluciones reales. Porque, después de todo, ¿qué número es la raíz cuadrada de –1?

Durante el siglo y medio posterior se utilizaron los números imaginarios, aunque sin darles un significado real. Todavía Leibniz (1646-1716), uno de los creadores del cálculo, calificaba a $\sqrt{-1}$ como "ese anfibio entre el ser y el no ser".

Y llegamos a Euler. Para Euler, a quien debemos el símbolo i como $\sqrt{-1}$, el hecho de que las cantidades imaginarias existiesen solamente en la imaginación, no nos impide hacer uso de ellos y emplearlos en el cálculo.

En sus *Elementos de Álgebra* de 1770 da una solución para la ecuación cúbica reducida $x^3 = mx+n$ y en 1751 estudió las soluciones de las ecuaciones $x^n = 1$.

Así observó que $x^2-1 = 0$ tiene dos soluciones; que $x^3-1 = 0$ tiene una solución real x = 1 y dos soluciones imaginarias $\left(x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}\right)$

También obtuvo las cuatro raíces de x^4-1 = 0 y las cinco raíces de x^5-1 = 0.

Euler consiguió comprender las raíces complejas en toda su profundidad (ver apartado de página 147) y así resolver completamente el problema asociado a la fórmula de Cardano, y obtener las tres raíces reales de la ecuación $x^3 = 15x + 4$ a partir del cálculo con números complejos.

En cuanto a la teoría general de ecuaciones, afirmó, sin demostrarlo en general, que un polinomio con coeficientes reales de grado arbitrario puede descomponerse en factores lineales y cuadráticos con coeficientes reales. Además, hizo notar que las raíces complejas se presentan en pares conjugados cuyo producto da una expresión cuadrática con coeficientes reales.

La plena aceptación de los números complejos en la comunidad matemática se produjo gracias a la obra de Gauss (1777-1855), quien, entre otras cosas, probó el Teorema Fundamental del Álgebra y extendió la representación gráfica de los complejos en el plano (plano de Gauss).

F. Gauss (1777-1855)

A tener en cuenta en el aula

En la enseñanza siempre está presente la dicotomía utilitarismo-comprensión conceptual, aplicaciones-teoría. Si hace unos años predominó el enfoque lógico-deductivo, la construcción coherente y lógicamente correcta de los distintos conceptos matemáticos en detrimento de su utilidad y al margen de su finalidad práctica, podemos decir que, con las últimas renovaciones didácticas, se ha puesto de manifiesto la importancia de darles significatividad a esos conceptos. Es necesario, antes de proceder a la necesaria abstracción, de dotarnos, de dotar a nuestros alumnos, de referencias concretas a las que poder asirse, a modo de muletas de apoyo, que faciliten este proceso.

El caso de los números complejos nos ofrece un ejemplo histórico de cómo se construyeron, que nos puede hacer reflexionar a la hora de utilizar un modelo de enseñanza para el aula. Los alumnos deberán ver a lo largo de toda su etapa formativa no sólo los modelos ya construidos, ya terminados, de los que luego se podrán obtener las correspondientes aplicaciones, sino también su proceso de construcción. El profesor deberá establecer el necesario equilibrio que garantice la comprensión y la formación adecuada del alumnado.

Como ya ha quedado dicho, los números imaginarios no surgen como respuesta a un problema concreto, externo a la matemática, sino como un artificio de cálculo que permitía establecer un puente entre una ecuación con coeficientes reales y unas soluciones también reales. Así, en principio, el concepto de número complejo no es necesario para nada, como queda bien reflejado por su nombre inicial: "número imaginario" y por tanto sin existencia real. Se iban a usar sin tener una definición rigurosa de lo que significaban.

El proceso histórico de construcción de los números complejos nos deja otra lección: puede ser difícil encontrar situaciones reales que justifiquen la introducción de determinados conceptos, lo que no significa que haya que renunciar a enseñarlos. Es más, los avances y aplicaciones en los que posteriormente se mostraron tremendamente útiles –física, electricidad, electromagnetismo,...– indican todo lo contrario. Hay muchos ejemplos en los que conceptos puramente teóricos han encontrado aplicaciones en campos con los que, a priori, era insospechable que pudiesen tener alguna relación.

Por otra parte, también podemos extraer de aquí conclusiones sobre el modo de construcción de la matemática. Por un lado, la matemática, como parte de la ciencia, se ha dedicado a modelizar aspectos de la realidad para poder analizarlos, comprenderlos, obtener o predecir resultados –geometría, aritmética, álgebra, azar, análisis– pero por otro, hay que reconocer que los grandes saltos cualitativos se han producido al romper con ideas ingenuas pero firmemente apoyadas en la intuición o en la experiencia cercana –números irracionales, negativos, imaginarios, geometrías no euclídeas, infinito,...–.

Que los cuadrados de todos los números son positivos, ¡creamos uno nuevo cuyo cuadrado sea –1! Lógicamente al hacer esto perdemos la referencia intuitiva que podríamos obtener de la realidad y sólo nos queda para guiarnos las leyes de la lógica o las reglas formales que podamos establecer. Surge la necesidad de formalizar la realidad, los aspectos matemáticos más cercanos a la realidad, para poder así generalizar esos aspectos a los nuevos conceptos construidos. He aquí una forma de avanzar en matemáticas.

e BASE DEL LOGARITMO NEPERIANO

Euler fue el primero en utilizar la letra e para designar la base del sistema de logaritmos naturales. Bien es cierto que la idea que representa este número ya era conocida antes de que se inventaran los logaritmos.

La primera aparición histórica del número e, aunque no con esta nomenclatura, podría deberse al problema del interés compuesto: dado un capital C al interés compuesto n veces al año y a una tasa r de interés anual, invertido durante t años se transforma en un capital final CF dado por la fórmula: $CF = C\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$

Jacques Bernoulli propuso el problema del interés compuesto continuo, es decir, permitir que n crezca indefinidamente lo que para C=1, r=1, t=1 lleva al estudio del límite $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$, que desarrolló mediante el teorema del binomio y concluyó que ese límite debía estar entre 2 y 3.

Neper, unos años antes, con la publicación de sus logaritmos, también se acercó a esta idea y, aunque la base elegida era un número cercano a 1/e no es suficiente para adjudicarle el descubrimiento del número e. (Ver apartado de página 147),

Otro problema completamente ajeno al interés compuesto y al cálculo operacional que se abordaba también en aquella misma época llevaría al mismo número: la cuadratura de la hipérbola.

Fermat (1601-1665) se interesó por la cuadratura de las curvas de la forma $y = x^n$ con n entero positivo, y aproximando el área mediante rectángulos obtuvo como valor del área entre 0 y a: $A = a^{n+1}/(n+1)$. Lo que con nuestra notación actual sería:

$\int_0^a x^n\,dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ (Fermat obtuvo este resultado hacia 1640, treinta años antes de que Newton y Leibniz lo obtuvieran como parte del cálculo integral).

Fermat demostró también la validez de su fórmula para n negativos. Sólo había una pega: para n = -1 no servía porque se anulaba el denominador.

Sería Gregoire de Saint-Vicent (1584-1667) quien observaría, al abordar la cuadratura de la hipérbola y = 1/x, que cuando las bases de los rectángulos utilizados para aproximar el área formaban una progresión geométrica, éstos rectángulos tenían igual área. Esto significa que, cuando las abscisas crecen en progresión geométrica, el área encerrada por la hipérbola aumenta en progresión aritmética. Es decir, la relación entre el área y la abscisa es logarítmica.

Posteriormente se probaría que el área encerrada por la hipérbola y = 1/x entre las abscisa 1 y a vale 1 precisamente cuando a es el número e. Hoy lo escribiríamos:

$\int_1^a \frac{1}{x}dx = 1 \Rightarrow \quad a = e$ y por tanto $\int_1^t \frac{1}{x}dx = \ln t$

Todavía antes que Euler, Newton en 1665 descubrió, a partir del desarrollo del binomio $(1+1/n)^n$ y haciendo tender n a $\propto$, que e = 1 + 1/1 + 1/2! + 1/3! + ...

Fue Euler quien vio la función logarítmica como inversa de la función exponencial y que, por tanto, había infinitas funciones logarítmicas según la base elegida:

$$z = \log_a y \quad \Leftrightarrow \quad a^z = y$$

Obtuvo la relación entre los logaritmos en bases distintas $\log_b y = \log_a y / \log_a b$ y series infinitas para las funciones exponencial y logarítmica.

Euler, que fue un gran matemático experimental, que no se preocupó si los pasos dados eran rigurosos o no, -no desde luego desde nuestro actual punto de vista de lo que es el rigor- comenzó calculando el desarrollo de la serie para $y = a^x$ donde a > 1 basándose en el binomio de Newton(9):

Supuso $\propto$ un número infinitamente pequeño tal que $a^\omega = 1+\psi$ donde ψ también es infinitamente pequeño. Las relacionó de la forma $\psi = k\omega$ y operando obtuvo:

$$a^x = 1 + kx + \frac{k^2x^2}{2} + \frac{k^3x^3}{3.2.1} + \frac{k^4x^4}{4.3.2.1} + \ldots$$

haciendo x = 1 se genera una serie para la base a en función de k y Euler eligió la base concreta para la que k = 1. Así obtuvo: $a = 1 + 1 + \frac{1}{2.1} + \frac{1}{3.2.1} + \frac{1}{4.3.2.1} + \ldots$

Euler calculó este número que aproximadamente era: 2’71828182845904523536028... , una constante a la que, “en aras de la brevedad” la designó por e. (La razón para tal elección, por encima de que fuera la inicial de su nombre o de la palabra exponencial, parece deberse a que era la primera vocal libre, puesto que ya había usado la a).

Después obtuvo:

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2.1} + \frac{x^3}{3.2.1} + \frac{x^4}{4.3.2.1} + \ldots = \sum_0^{\propto} \frac{x^r}{r!}$ y también

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Con la invención del cálculo resultaría que la función e^x era igual a su propia derivada. Esto dio un papel fundamental a e^x. Euler permitiría a la variable x tomar valores imaginarios y, a partir de ahí, surgirían importantes propiedades y relaciones nuevas.

Pero, quedaba una cuestión sin respuesta:

¿Qué tipo de número es el número e?

Los números irracionales ya fueron descubiertos por los pitagóricos y, aunque no son necesarios desde un punto de vista practico, los aspectos teóricos los hacen fundamentales: los necesitamos para llenar los huecos que dejan en la recta real los números racionales.

Euler demostró en 1737 que e es irracional(10).

Hubo que esperar hasta mediados del siglo XIX para que se consideraran un nuevo tipo de números: los números trascendentes. Un número real que satisface una ecuación polinómica con coeficientes enteros se llama algebraico. Todo número racional a/b es evidentemente algebraico –pues satisface la ecuación bx = a– pero podía haber números irracionales que no fueran algebraicos. (Ya hemos comentado que fue Liouville en 1844 quien construyó los primeros ejemplos de números trascendentes).

En 1873, antes de que se probara la trascendencia de π, Hermite probó la trascendencia de e. A pesar de su éxito no abordó la demostración de la trascendencia de π. La siguiente cita nos da una idea del esfuerzo que le supuso: “No apostaría nada en intentar demostrar la trascendencia de π. Si otros emprenden esta empresa, nadie estará más contento que yo con su éxito. Pero, créanme, esto no dejará de costarles muchos esfuerzos.”

Pero sólo 9 años después lo demostraría Lindemann, basándose en el trabajo de Hermite y precisamente en la relación de Euler: $e^{i\pi}+1=0$.

A tener en cuenta en el aula

El número e aparece de forma insospechada en contextos diversos. El llamado “problema de las coincidencias” es un ejemplo que surge en el ámbito de la combinatoria y probabilidad.

El problema inicial, planteado y resuelto por Montmart en 1708, analizaba el juego de cartas siguiente: Un jugador baraja un grupo de 13 cartas, desde el as hasta el rey. Luego las va levantando de una en una diciendo “uno” cuando levanta la primera, “dos” cuando levanta la segunda y así sucesivamente. Ganará si la carta levantada tiene el mismo número que el número dicho. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Este problema también fue estudiado por Nicolas Bernoulli, Abraham de Moivre y Euler.

Bernoulli lo enunció así:

Una secretaria tiene que meter n cartas en n sobres. De forma descuidada las mete al azar sin fijarse en los nombres. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna llegue correctamente a su destino?

Euler lo propuso en la siguiente forma:

100 caballeros cada uno con un sombrero van a la ópera y al entrar dejan los sombreros en el guardarropa. A la salida cada uno coge al azar un sombrero. ¿Cuál es la probabilidad de que ni un sólo caballero reciba su sombrero?(11)

Otro enunciado:

Sabiendo que un suceso ocurre una vez al año de media, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra en un año determinado?

En todos estos problemas la solución tiene que ver con el número 1/e.

LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS, EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

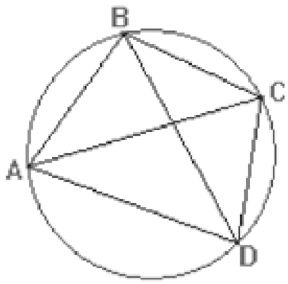
Los números complejos pondrán de manifiesto que las funciones trigonométricas y exponenciales, tan independientes en el campo real, guardan una estrecha relación en el campo complejo. La exponencial se nos va a presentar como una trigonométrica disfrazada y recíprocamente.

i) Las Funciones trigonométricas

La Trigonometría tiene una historia muy larga. Desde sus inicios ligados a la astronomía como herramienta auxiliar de cálculo, hasta su consideración como funciones trigonométricas en el siglo XVIII. Según todos los indicios, las primeras tablas trigonométricas, que relacionaban ángulos con las longitudes de la cuerda que sustentan en una circunferencia, fueron obra de Hiparco de Nicea (siglo II a.C), a quien se le considera “el padre de la trigonometría”.

El personaje más importante de la trigonometría griega fue sin duda Ptolomeo (siglo II d.C) cuya obra *Sintaxis matemática* tuvo tanta influencia que, posteriormente, en Arabia se le llamó *Almagesto* (el más grande), y desde entonces fue conocido por ese nombre.

A partir del llamado “Teorema de Ptolomeo”:



Si ABCD es un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia entonces:

AB.CD + BC.DA = AC.BD

se pueden deducir nuestras fórmulas:

Sen $(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha\ \text{sen}\,\beta$

Cos $(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta$

Cos $(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \text{sen}\,\alpha\ \text{sen}\,\beta$

También conocía $sen\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

A los hindúes les debemos la introducción de lo equivalente a la función seno, para reemplazar las tablas de las cuerdas griegas. Y a través de los árabes llegan a la Europa del Renacimiento todos estos conocimientos. En esta época destacaríamos a Regiomontano (1436-1478) y a Vieta (1540-1603) con quien la trigonometría se independiza de la astronomía.

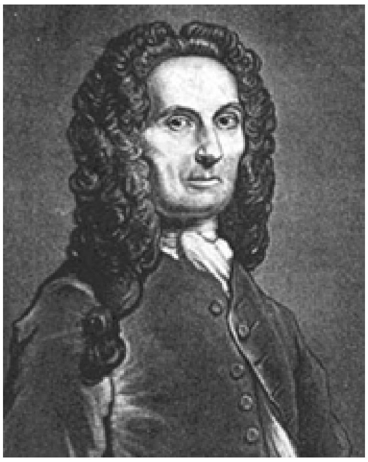
F. Vieta (1540-1603)

Entre las identidades que se manejan están las fórmulas que transforman productos en sumas o restas ("reglas de prostafairesis", por ej.: 2 cos a cos b = cos (a-b) + cos (a+b)) que permitirían simplificar los cálculos anticipando en cierta forma los logaritmos. Para multiplicar dos números x.y se buscaban en las tablas trigonométricas otros dos números a, b tales que cos a = x , cos b = y

$$\text{Así} \quad x.y = \cos a \ \cos b = \frac{\cos(a-b)+\cos(a+b)}{2}$$

Y para obtener el resultado bastaría con volver a buscar en las tablas cos(a+b) y cos(a-b), con lo que hemos transformado el producto en suma.

De Moivre (1667-1754) establecía su bien conocido teorema $(\cos a + i \text{ sen } a)^n = \cos na + i \text{ sen } na$ y parece que Cotes (1682-1716) fue de los primeros matemáticos en anticipar la relación ln (cos a + i sen a) = ia



A. De Moivre (1667-1754)

Con Euler la idea de función pasa a ser la idea fundamental del análisis y presenta el tratamiento analítico de las funciones trigonométricas con sus desarrollos en serie y las llamadas identidades de Euler $\cos x = \dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$,, $sen\, x = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$,, $e^{ix} = \cos x + i \text{ sen } x$

ii) La función exponencial y logarítmica

Ya en los Elementos de Euclides se recoge la propiedad.

$a^m a^n = a^{m+n}$ (siendo los exponentes números naturales).

Nicolás de Oresme, en el siglo XIV, extiende la propiedad a los exponentes fraccionarios, incluyendo $(ab)^{l/n} = a^{l/n} b^{l/n}$

En el siglo XV Nicolás Chuquet estaba familiarizado con las reglas para exponentes negativos y en el siglo XVI el alemán Michael Stifel extiende la exponencial a exponentes negativos y fraccionarios.

Neper (1550-1617) aprovechó la relación entre la progresión aritmética de los exponentes y la progresión geométrica de las potencias que permitía reducir los productos a sumas.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	...
2	4	8	16	32	64	...

Así para multiplicar 32 por 64 basta sumar 5+6 = 11 y buscar en la tabla el valor de $2^{11} = 2048$.

El problema era que una sucesión como ésta, de potencias enteras de base entera, no era útil para el cálculo pues había muchos huecos entre los términos sucesivos. ¿Cómo multiplicar 48 por 75? La idea de Neper fue conseguir una progresión geométrica cuyos términos estuviesen muy cerca unos de otros y para ello tomó como base inicial $1\text{-}10^7 = 0{,}9999999$. Resultó así que los términos estaban demasiado cerca y, para evitar el uso de decimales, Neper multiplicó las potencias por 10^7, de forma que el logaritmo de Neper de un número N sería el número L tal que

$$N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

Observar que tenemos prácticamente un sistema de logaritmos de base 1/e puesto que

$$\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^{10^7} \approx \frac{1}{e}$$

Aunque se podría considerar que en esta definición está implícita la idea de función logarítmica hay que decir que Neper no se ocupó ni se preocupó por este tema. Los logaritmos eran un instrumento para facilitar los productos y cocientes, sobre todo de senos y cosenos esenciales en astronomía, mejorando la prostafairesis ya mencionada más arriba. (De hecho Neper no hablaba de logaritmos de números sino de logaritmos de senos de ángulos, lo que también explica por qué eligió una base <1).

Al margen de Neper los logaritmos tienen otro creador, mucho menos conocido, pero que trabajó completamente independiente de Neper y publicó su trabajo un poco más tarde, en 1620. Se trata del suizo Bürgi (1552-1632) quien utilizó como valor de la base un número muy próximo a 1 pero mayor que 1: 1,0001.

En 1617, el inglés Henry Briggs construyó la primera tabla de logaritmos en base 10, los logaritmos vulgares, con una precisión de catorce decimales.

Los logaritmos surgieron para facilitar el cálculo y, en su origen, no tuvieron nada que ver con la función exponencial (entre otras cosas porque ésta no existía como tal). A mediados del siglo XVII, con la introducción de la geometría analítica y del cálculo infinitesimal, se empieza a manejar la representación de la función logarítmica y se conocía que el área bajo la hipérbola y = 1/x venía dada por el logaritmo. (Gregory de Saint Vicent (1584-1667) fue quien probó que si las abscisas crecen geométricamente el área bajo la curva crece aritméticamente. Hoy diríamos

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$$
)

Mercator (1668) fue uno de los primeros que hizo uso de la definición del logaritmo por medio del área de la hipérbola y obtuvo su desarrollo en serie

Log (1+x) = $x - x^2/2 + x^3/3$ - ...

A finales del siglo XVII, la exponencial se empieza a considerar como función, lo que suponía, aún sin dar ninguna definición, la extensión para valores irracionales del exponente –cosa que no se justificaría hasta el siglo XIX– y se apreció la relación inversa entre ésta y la función logarítmica (Wallis, Jean Bernoulli estudió no sólo $y = a^x$, sino también $y = x^x$).

Los logaritmos de los números negativos eran motivo de discusión: para Leibniz no eran números reales, mientras que para Bernoulli log (-n) = log n. Para D'Alembert $\log(-1)^2 = \log 1^2$,, => 2 log (-1) = 2 log 1 => log (-1) = log 1

Sería Euler, quien definiría la función exponencial como $e^x = \left(1+\frac{x}{i}\right)^i$ que en nuestra notación actual significa $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, quien establecería el logaritmo como una función y quien aclararía el valor de los logaritmos de números negativos al establecer que ln (-1) = $i\pi$, (a partir de $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$,, $e^{i\pi} = -1$), así los logaritmos de los negativos eran complejos y no reales. Euler observó además que cualquier número, positivo o negativo, tiene infinitos logaritmos pues $e^{i(\theta\pm 2k\pi)} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$.

Para una comprensión completa de las funciones logarítmica y exponencial habría que esperar a Gauss y Cauchy, en el siglo XIX, que abordaron la teoría de funciones de variable compleja.

Para finalizar $\quad e^{i\pi}+1=0$

¿Cómo es posible que los números e, π, i, nacidos en contextos tan diferentes se relacionen mediante una fórmula tan sencilla?

La unificación que consiste en establecer relaciones entre objetos diversos y provenientes de campos diferentes produce una comprensión más profunda de la estructura subyacente y es al mismo tiempo una fuente de satisfacción estética.

Euler relacionaría a través de los números complejos, funciones trigonométricas y exponenciales y números de orígenes tan dispares como e, i o π.

En su Introductio in Analysin infinitorum de 1748 ya considera expresiones de la forma $\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$, a partir de $1 = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta - i \operatorname{sen}\theta)$ y establece:

$$(\cos\vartheta + i\,sen\,\vartheta)^2 = \cos 2\vartheta + i\,sen\,2\vartheta \quad ,, \quad (\cos\vartheta - i\,sen\,\vartheta)^2 = \cos 2\vartheta - i\,sen\,2\vartheta$$

Y generalizando, formuló el Teorema de De Moivre:

$$(\cos\vartheta \pm i\,sen\,\vartheta)^n = \cos n\vartheta \pm i\,sen\,n\vartheta \qquad \forall\, n \geq 1$$

Obtuvo también los desarrollos en serie de

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad ,, \quad sen\,x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

y partió del desarrollo de e^x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

donde reemplazó con audacia la variable real x por la expresión imaginaria ix. Esto era jugar con símbolos sin sentido pero Euler siguió adelante

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \ldots = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Y también cambió el orden de los términos (lo que no tiene ningún riesgo en las sumas finitas, pero en las infinitas tiene riesgos).

Al reordenar

$$e^{ix} = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots\right) + i\;\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right) = \cos x + i sen\, x$$

Las conexiones entre las funciones exponencial y las trigonométricas quedaban en evidencia a través de la variable compleja.

Y haciendo x = π se sigue la relación $e^{i\pi}+1 = 0$

BIBLIOGRAFÍA

Boyer, Carl B., 1986: *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza Editorial.

Maor Eli, 2006: *e:historia de un número*. México. Libraria, SA de CV.

AA.VV., 1990 : *Números enteros*. Madrid. Editorial Síntesis.

Klein Felix, 2006: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Madrid.

A. J. Durán, 1996: *Historia, con personajes, de los conceptos de cálculo*. Madrid. Alianza Editorial.

Dunham William, 2000: Euler. *El maestro de todos los matemáticos*. Madrid. Editorial Nivola.

Leonard Euler, 2000: *Introducción al análisis de los infinitos*. Sevilla. SAEM Thales y RSME.

Mario Livio, 2007: *La ecuación jamás resuelta*. Barcelona. Editorial Ariel.

NOTAS

(1) Lairracionalidad de $\sqrt{2}$ no es algo que se puede deducir de la experiencia, ni necesario para aplicar a situaciones reales. Sin embargo, creo que todos los alumnos deberían tener la oportunidad de conocer la demostración de este hecho, donde se pone de manifiesto toda la potencia del razonamiento lógico.

(2) Losgriegos también conocián cómo obtener un segmentode longitud igual a la raíz cuadrada de otro dado.

(3) Losgriegos no tuvieron reparos en construir curvas (cuadratriz de Dinostrato, concoide de Nicomedes, espiral de Arquímedes) que permitían obtener segmentos de longitud igual a π, sin respetar la limitación de uso de regla y compás.

(4) Estosinstrumentos se suponen instrumentos de precisión infinita que trazan rectas y circunferencias ideales.

(5) Yaen 1647 Oughtred usó el símbolo d/π para la razón del diámetro de un círculo a su circunferencia, David Gregory en 1697 usó π/r para la razón de la circunferencia a su radio, pero fue William Jones en 1706 quien dio el primer uso a π con sus significado actual. Euler adoptó el símbolo en 1737 y rápidamente se convirtió en notación estándar.

(6) Elproblema fue planteado por Pietro Mengoli (1625-1686) en 1644 a Jakob Bernoulli (1654-1705) quien lo expuso a la comunidad matemática en 1689: "Grande será nuestra gratitud si alguien encuentra y nos comunica lo que hasta ahora ha escapado a nuestros esfuerzos".

(7) Sepuede ver más información en el artículo de Julián Aguirre en la revista *Sigma* nº 19.

(8) Másinformación se puede encontrar en los libros sobre Tartaglia y Cardano de la editorial Nivola.

(9) Verel desarrollo completo en *Euler: el maestro de todos los matemáticos.*

(10) Lademostración puede verse en el libro *¿Qué es la matemática?* De Courant/Robbins.

(19) Lasolución que da Euler al problema general puede verse en el libro *Euler* de la Editorial Nivola.


Nº 42. Zb.

3er Premio
3. Saria
BACHILLERATO - BATXILERGOA

IZENBURUA/TÍTULO ARGIAREN KONIKAK

IKASLEAREN IZENA
NOMBRE DEL ALUMNO SANDRA AMUTXASTEGI

IKASTURTEA/ AÑO ACADÉMICO 2006/2007

IKASTALDEA/NIVEL 2.Z.T.B.

CONCURSO FOTOGRÁFICO. IES de Fadura (Getxo)