Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós[1]

En este número, presentamos la versión castellana (realizada por J. M. Almira y D. Arcoya a partir de la reciente traducción inglesa) de un interesante artículo de Luzin escrito hace unos 70 años. En él, el gran analista ruso ofrece una magistral reflexión sobre la evolución del concepto de función durante los siglos XVIII, XIX y principios del XX. En más de un lugar, el detalle en la exposición y las reflexiones superan lo que puede encontrarse en trabajos muy posteriores sobre el mismo tema.

Un aspecto interesante de la discusión es que resultan patentes las dudas escépticas de Luzin, en línea con las posiciones constructivistas dentro del debate sobre fundamentos de principios de siglo. Por eso afirma que "actualmente" (en los años 1930) el concepto "no está tan definitivamente cristalizado ni establecido fuera de duda como pareció estarlo a fines del XIX", y dice que la evolución y maduración de la idea de función continúa. Es obvio que Luzin se aleja del concepto habitual de función como aplicación entre conjuntos, debido a Dirichlet y Dedekind, del mismo modo que (como tantos contemporáneos) se distancia del axioma de elección.

Además de complementar someramente las referencias (véase más abajo) para incluir algunos trabajos históricos y algún buen tratamiento en castellano, vale la pena hacer dos o tres comentarios de detalle:

- Al decir que el concepto de función apareció en el debate sobre la cuerda vibrante en el XVIII, Luzin se olvida de las raíces de la idea en el estudio de fenómenos físicos, donde la variable independiente suele ser, típicamente, el tiempo. Atender a estos orígenes físicos haría que la discusión se retrotrayera a Galileo y más allá, a autores medievales y al mismo Ptolomeo (véase Pedersen 1974). Pero no es extraño que Luzin haya centrado su atención en la evolución moderna y estrictamente matemática del concepto.

- La propia palabra "función" fue empleada por vez primera, en un sentido próximo al moderno, por Leibniz en 1673 y sobre todo por J. Bernoulli

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós; Sección Historia-La Gaceta de la RSME; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla, C/ Camilo José Cela, s/n, 41018 - Sevilla, correo electrónico: josef@us.es

en 1694. Un concepto de función como expresión analítica aparece ya en una obra de J. Gregory de 1667 (ver Youschkevitch 1976). Pero fue Euler quien puso el concepto de función en el centro del cálculo infinitesimal, en su Introductio.

- Cuando dice que la moderna teoría de funciones (complejas) surgió del deseo de mantener la dependencia mutua entre las partes de una curva, Luzin simplifica demasiado. Para una reconstrucción histórica detallada puede verse el libro de Bottazzini (1986).

- En la sección "Funciones de una variable real", Luzin simplifica demasiado también al decir que la definición de Dirichlet fue aceptada por todos hasta 1897, con Brodén. En realidad, ya Weierstrass le hacía objeciones de vaguedad y excesiva generalidad en los años 1870[2]), y no digamos Kronecker, que inaugura las críticas constructivistas. En un manual sobre teoría de funciones de 1882, Paul du Bois-Reymond recoge explícitamente la disputa entre clásicos (a los que llama "idealistas") y constructivistas ("empiristas").

- Algo más adelante, en la misma sección, puede advertirse cómo Lebesgue y Borel tienden a confundir un asunto lógico con uno psicológico. Las críticas constructivistas más serias no dependen de asuntos psicológicos, de si uno "puede confundirse" o no al razonar sobre cosas arbitrarias. En particular, el constructivismo no debe identificarse con el intuicionismo (sobre todo esto conviene consultar los trabajos de E. Bishop).

REFERENCIAS

[1] E. BISHOP, *Foundations of constructive analysis*, New York, MacGraw Hill, 1967.

[2] U. BOTTAZZINI, *The Higher Calculus: A history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass*, Berlin, Springer, 1986.

[3] C. CAÑÓN LOYES, *La matemática: creación y descubrimiento*, Madrid, Univ. Pont. Comillas, 1983, Apéndice en pp. 167-181.

[4] L. EULER, *Introducción al análisis de los infinitos*, 2 vols., Sevilla, SAEM Thales / RSME, 2000.

[5] F. A. MEDVEDEV, *Scenes from the history of real functions*, Basel, Birkhäuser, 1991.

[6] O. PEDERSEN, Logistics and the theory of functions. An essay in the history of Greek mathematics. *Arch. Internat. Hist. Sci.* **24** (1974), no. 94, 29–50.

[2]Véase J. Ferreirós, *Labyrinth of Thought: A History of set theory and its role in modern mathematics* (Basel, Birkhäuser, 1999

[7] B. Riemann, *Selecta*, Madrid, CSIC, 2000.

[8] A. P. Youschkevitch, The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact Sci.* **16** (1976), 37-85.

Función[3]

por

N. N. Luzin

En su máxima generalidad, el término "función" denota una relación entre cantidades variables. Si una cantidad x puede tomar valores arbitrarios y se da una regla mediante la cual es posible asociar a estos valores, determinados valores de una cantidad y, entonces decimos que y es una función de x y denotamos esto mediante notaciones simbólicas como $y = f(x)$, o $y = F(x)$, o $y = \varphi(x)$, y así sucesivamente. Llamamos a la cantidad x la variable independiente o argumento, y a y la variable dependiente. Sin embargo, esta definición del término función es algo vaga y debe ser perfilada como sigue: (1) con respecto a la variación de la variable independiente x, debemos especificar un intervalo de variación $a < x < b$ y si x va a tomar todos los valores desde a hasta b (el caso de una variable dependiente contínua) o sólo algunos de ellos, por ejemplo, sólo valores enteros; (2) debemos precisar la naturaleza de la regla que nos dice cómo vamos a asociar un valor y a un valor concreto x; (3) con respecto a la naturaleza del argumento x, debe decidirse si x es real o complejo, etc.

El concepto de función es uno de los conceptos más importantes de las matemáticas modernas. No apareció repentinamente. Surgió hace más de doscientos años en el famoso debate de la cuerda vibrante y originó cambios profundos durante el transcurso de esta polémica acalorada. Desde entonces este concepto ha madurado [haciéndose cada vez más complejo] y evolucionado contínuamente, y este doble proceso continúa hasta hoy mismo. Esto es por lo que ninguna definición formal aislada puede incluir el contenido completo del concepto de función. Este contenido sólo puede comprenderse mediante un estudio de las líneas principales de su desarrollo que está intimamente ligado al desarrollo de la ciencia en general y al de la física matemática en particular.

Las vibraciones fundamentales de un sistema de masas

Consideremos cualquier sistema de masas (por ejemplo, un puente) en estado de equilibrio. Si se perturba ligeramente, entonces, en un esfuerzo por volver al estado de equilibrio, el sistema comienza a vibrar. Una vibración se llama *fundamental* si todos los puntos del sistema pasan por sus respectivas posiciones de equilibrio al mismo tiempo. El estudio del movimiento de un

[3]Este artículo fue publicado originalmente por Luzin en la *Gran Enciclopedia Soviética* Vol 59, 314–334 en los 1930's. Posteriormente, Abe Shenitzer lo tradujo al inglés, descomponiéndolo en dos partes, y lo publicó en *The American Mathematical Monthly* Vol. 105, 59–67 y 263–270. Nosotros hemos traducido el artículo de su versión inglesa.

sistema con un único grado de libertad fue esencialmente completado en el siglo XVII, y en el siglo XVIII comenzó el estudio de los movimientos de sistemas con varios grados de libertad. Los primeros pasos en esta dirección fueron dados por el gran Johann Bernoulli (1727). Para estudiar el movimiento de una cuerda vibrante, realizó un experimento mental en el que colocó n pesos iguales y espaciados equitativamente sobre una cuerda ingrávida flexible horizontal. Da los periodos de las vibraciones fundamentales cuando el número de pesos es menor que 8 y establece el importante principio de que la fuerza actuando sobre una partícula material en una vibración fundamental es siempre proporcional a la distancia de esa partícula a su posición de equilibrio. Usando este principio, demuestra que la razón $(y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})/y_k$ debe ser independiente de k; donde y_k es la distancia del peso k-ésimo en el hilo ingrávido cuando este último está en posición de equilibrio. Se supone que las amplitudes de las partículas vibrantes son infinitesimales en todo tiempo. Mediante este enfoque, Bernoulli obtuvo una ecuación en diferencias finitas para y_k. Las constantes que aparecen en estas ecuaciones en diferencias finitas se determinan a partir de una ecuación algebraica de grado n-ésimo. A cada raíz de esta ecuación le corresponde una vibración fundamental concreta del sistema. Bernoulli fue incapaz de demostrar que las raíces de esta ecuación son reales y simples.

Algo después (1732–36), el hijo de J. Bernoulli, Daniel, y su amigo Euler trataron el problema análogo de la determinación de las vibraciones fundamentales de una cuerda vertical ingrávida, fijada en su extremo superior, con n pesos incrustados y libre para deslizarse en el aire. Daniel Bernoulli fue un magnífico experimentador. Primero obtuvo una solución experimental para $n = 2$ y 3 y entonces proporcionó una explicación teórica. Euler, que era un matemático igualmente sublime, trató el caso general y demostró que en una vibración fundamental los lados de un polígono vibrante intersectan la posición vertical de la cuerda en puntos fijos. Entonces ambos comenzaron a investigar otros sistemas, por ejemplo, una lámina sumergida en un líquido y balanceándose en él, la oscilación de una vara pesada suspendida de un extremo, y, finalmente, un péndulo.

En todos estos problemas Bernoulli y Euler solo investigaron vibraciones fundamentales. Cuando la fuerza solo dependía de la localización de la partícula, las vibraciones fundamentales eran armónicas, esto es, el desplazamiento de la k-ésima partícula estaba dado por la fórmula $y_k = f_k \cos at$, donde f_k era específica de cada partícula y todas las partículas tenían el mismo periodo $T = 2\pi/a$. D. Bernoulli formuló explícitamente para el caso general la existencia de vibraciones fundamentales, pero no pudo demostrar que las raíces de la ecuación auxiliar eran reales y distintas. Lo que es de máxima importancia es el hecho fundamental de que, en aquel momento, ninguno de ellos fue capaz de expresar un movimiento arbitrario del sistema en términos exclusivamente de las vibraciones fundamentales. Mucho antes (Rameau, 1726), los teóricos de la música observaron que además de los tonos fundamentales, los instrumentos musicales también producen armónicos no fundamentales. Es importante señalar que la preocupación respecto de las vibraciones fundamentales derivó del siguiente error: comenzando con la investigación del gran Taylor (1713), los matemáticos se aferraron a la visión errónea, compartida por D. Bernoulli, de que toda vibración compuesta tiende muy rápidamente a *status uniformis*, esto es, a una vibración fundamental. Hasta cierto punto, esto es verdad para situaciones físicas en las que la fricción, la resistencia del aire, etc., causan dispersión de la energía y por tanto, priorizan una componente fundamental. El problema era, sin embargo, que estas conclusiones se trasladaban tácitamente al aparato matemático, es decir, a soluciones de ecuaciones diferenciales que son completamente independientes de este efecto colateral.

Paso al límite de sistemas discretos a sistemas contínuos. D. Bernoulli y Euler pasaron sin vacilación de sistemas finitos de partículas a sistemas contínuos pensando en estos últimos como compuestos de una gran cantidad, o de infinitas, partículas. La audacia de los matemáticos del siglo XVIII es bien conocida. Exceptuando Varignon, N. Bernoulli y d'Alembert, ninguno de ellos apreció las dificultades implícitas en el paso al límite. Aceptaron como obvio que una proposición que se satisface para todo valor finito de n, continúa verificándose cuando n tiende a infinito. Tenían una noción borrosa de la diferencia entre "muy grande" e "infinitamente grande", y de la diferencia entre resultados de precisión limitada y resultados cuya precisión se puede mejorar indefinidamente. Utilizaron diferencias finitas en vez de ecuaciones diferenciales y sumas en vez de integrales e ignoraron las diferencias en cada caso. Generalmente, la transferencia de conclusiones desde lo finito al caso infinito se hacía bien en las fórmulas acabadas o bien muy al principio de la investigación. Un ejemplo muy importante del primer método se encuentra en el artículo de D. Bernoulli que trata la oscilación de una cuerda homogénea flexible pesada suspendida de un extremo. Comienza con una cuerda ingrávida cargada de n pesos, resuelve el problema y, asumiendo n infinitamente grande en la respuesta, obtiene la solución del problema de las vibraciones de una cuerda flexible pesada en la forma $y = cos(t/T)f(x)$, donde x es la abcisa de un punto de la cuerda, y es la desviación de la posición de equilibrio, y $f(x) = 1 - \frac{x}{a} + (\frac{x}{2!a})^2 - (\frac{x}{3!a})^3 + \cdots$. Aquí a se determina por la condición $f(l) = 0$, donde l es la longitud de la cuerda.

Sobre la base de un resultado anterior en el que aparecen pesos, Bernoulli concluye que la ecuación $f(l) = 0$ posee infinitas raíces $a_0, a_1, a_2, a_3 \cdots$, y que la raíz a_k corresponde a una vibración fundamental en la que la cuerda pesada posee k puntos fijos además del punto del que suspende.

Determinación directa de las vibraciones fundamentales de la ecuación diferencial. Un ejemplo muy importante de paso al límite al principio de una investigación es el reemplazamiento de un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d^2y_k}{dt^2} = f(y_{k+1}, y_k, y_{k-1}) \tag{1}$$

por la única ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right). \tag{2}$$

Esto se hace poniendo $y_k = y_{k-1} + \Delta y_{k-1}$ y $y_{k+1} = y_{y-1} + 2\Delta y_{k-1} + \Delta^2 y_{k-1}$ y reemplazando las diferencias finitas por diferenciales. En este enfoque, en lugar de un sistema de ecuaciones algebraicas que ligan los valores iniciales de la y_k en una vibración fundamental –y por tanto en lugar de una única ecuación en diferencias finitas que combina todas estas ecuaciones– aparece una única ecuación diferencial para la forma inicial. La última ecuación también se obtiene poniendo $y = Y \cos at$ en la ecuación (2) para la determinación de la vibración fundamental y exigiendo que Y dependa solo de x (más que de x y t). También deben tenerse en cuenta las condiciones especiales que verifican los puntos primero y último del sistema y expresarlas mediante ecuaciones particulares (condiciones de frontera). El primero en investigar la cuerda vibrante de esta forma fue Taylor (1713). Demostró que la forma de una cuerda vibrante es la de una curva cuyos radios de curvatura son el uno al otro como las ordenadas. En otras palabras, obtuvo la ecuación diferencial $y'' = -n^2 y$. Tras dos integraciones esta ecuación produjo una cantidad proporcional al seno del argumento, que, de paso, es proporcional a la abcisa. Taylor no escribió su solución explícitamente porque en aquella época el símbolo "sin" para la función seno no había sido introducido aún. Es por ello que no pudo plantear la cuestión de la unicidad de las constantes de integración verificando todas las condiciones. Aquí es donde Taylor cometió su famoso error al asumir que existe una única vibración fundamental y que, para un movimiento inicial arbitrario, cualquier otro movimiento de la cuerda vibrante tiende a la vibración fundamental encontrada por él. J. Hermann y D. Bernoulli repitieron el error de Taylor. Cuando obtuvo la solución de Taylor mediante su propio enfoque, D. Bernoulli dijo que la forma de una cuerda vibrante es *socia trochoidis* (ésto fue antes de la introducción del término curva sinusoidal). Ninguno de estos autores (1716 y 1718) sospechó la posibilidad de la existencia de otros movimientos de la cuerda vibrante. D. Bernoulli fue el primero en conjeturar la existencia de muchas otras vibraciones fundamentales cuando comenzó a tratar el problema de las vibraciones de una cuerda elástica pesada y libremente suspendida (1732 y 1739), el cual trató como análogo de una cuerda vibrante. En relación con esto, realizó experimentos con una cuerda vibrante y observó que ésta no rechazaba trozos de papel colocados en sus nodos. En aquella época (1734) Euler todavía mencionaba solamente las vibraciones fundamentales. Fue solo en 1744 cuando Euler, en el curso de una investigación de las vibraciones fundamentales de una membrana elástica con el borde sujeto, demostró que la ecuación auxiliar, con raíces correspondientes a las vibraciones fundamentales, posee infinitas soluciones, las cuales intentó aproximar.

El debate sobre la cuerda vibrante

El artículo de d'Alembert. Mientras D. Bernoulli y Euler apuntaron en sus artículos hacia la multiplicidad de las vibraciones fundamentales de una cuerda vibrante, fue d'Alembert quien consiguió una solución casi exahustiva de este problema en su famoso artículo de 1747. Él establece directamente que el objetivo de su artículo es probar que la forma de la cuerda vibrante posee infinitas soluciones además de la "compañera de la cicloide". El método de d'Alembert es como sigue. Comienza con la ecuación diferencial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ y utiliza las identidades $d\frac{\partial y}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) dx + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) dt$ y $d\frac{\partial y}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) dt + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right) dx$ para obtener como consecuencia las relaciones

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt + dx), \text{ y} \\ d\left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}\right) &= \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t}\right)(dt - dx) \end{aligned}$$

De esto, concluye directamente que $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x}$ depende solo de $t + x$, y $\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x}$ depende solo de $t - x$, esto es, $\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial x} = \Phi(t + x)$ y $\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial x} = \Delta(t - x)$. Por tanto, $dy = (\frac{\partial y}{\partial t})dt + (\frac{\partial y}{\partial x})dx = \frac{1}{2}\Phi(t + x)d(t + x) + \frac{1}{2}\Delta(t - x)d(t - x)$.

Integrando la última expresión, d'Alembert obtiene la solución final $y = \psi(t + x) + \delta(t - x)$, a la cual llama sin dudarlo, la "solución general". En el caso en el que la cuerda, fijada en los puntos $x = 0$ y $x = l$ del eje OX, cruce la posición de equilibrio (el eje OX) para el momento $t = 0$, esta solución se convierte en $y = \psi(x+t) - \psi(x-t)$, donde ϕ es una función periódica par con periodo $2l$. En el caso que la forma de la cuerda en el instante inicial $t = 0$ está dada por $y = \Sigma(x)$ y la velocidad de sus partículas en ese instante está dada por la fórmula $\partial y/\partial t = \sigma(x)$, la solución toma la forma $y = \psi(x+t) - \psi(t-x)$, donde ψ es una función periódica de periodo $2l$ determinada a partir de las condiciones suplementarias $\psi(x) + \psi(-x) = \Sigma(x)$ y $\psi(x) - \psi(-x) = \int \sigma(x)dx$. Esto completa esencialmente el artículo.

Solución de Euler. En 1748, Euler, siguiendo a d'Alembert, aborda el mismo problema. Observa que su solución no difiere esencialmente de la de d'Alembert, pero enfatiza que es la *verdadera solución general*. Euler supone que la velocidad inicial (en $t = 0$) de las partículas de la cuerda es cero y que la forma inicial de la cuerda (en $t = 0$) es $y = f(x)$. Bajo estas condiciones, la solución de Euler es $y = \frac{1}{2}f(x + t) + \frac{1}{2}f(x - t)$. Además, Euler es el primero en observar que el periodo de la vibración de la cuerda es independiente de la forma inicial siempre que ésta no sea subdividida en idénticas partes alicuotas. A primera vista, podría parecer que, excepto por algunos aspectos menores, las soluciones de Euler y d'Alembert son idénticas. Pero en absoluto es así.

Ambos utilizaron la misma terminología, pero utilizaban las mismas palabras para denotar cosas diferentes. Estaban de acuerdo en una cosa, a saber, que el término "ecuación" significa igualdad de dos expresiones analíticas (sin entrar a discutir qué constituye una expresión analítica). También coincidían ambos en que si dos expresiones analíticas toman los mismos valores en todos los puntos de un intervalo, deben ser idénticas. Sin embargo, d'Alembert y Euler diferían fundamentalmente en el significado que asignaban a la palabra "función": *d'Alembert entendía por ello cualquier expresión analítica, mientras que Euler entendía por ello cualquier curva dibujada libremente a mano.*

El debate entre d'Alembert y Euler. Que Euler y d'Alembert suscribían puntos de vista diametralmente opuestos se hizo claro durante un animado debate en el que se perfilaron las ideas y se dieron formulaciones exactas. D'Alembert fue el primero en buscar contradicciones en la interpretación de Euler de la palabra "función". Escribe: "No se puede imaginar una expresión más general para una cantidad y que la de suponer que es una función de x y t; en cuyo caso el problema de la cuerda vibrante tiene solución solo si las diferentes formas de la cuerda están contenidas en la misma ecuación". D'Alembert concluye que su propia solución y la de Euler sólo tienen sentido si la función dada $f(x)$ es *periódica*. La objeción de Euler adopta la forma de pregunta: "Si la solución obtenida se considera deficiente en aquellos casos especiales en los que la forma de la cuerda no puede expresarse mediante una única ecuación, ¿qué debemos entender por solución en tales casos?". Insiste en que "su construcción geométrica es siempre correcta, independientemente de la forma inicial de la cuerda", que "las diferentes partes de la curva inicial no están relacionadas, en absoluto, por una ecuación, sino que están relacionadas simplemente por su descripción", y que "el conocimiento de una curva geométrica es completamente suficiente para el conocimiento del movimiento sin recurrir a los cálculos". La réplica de d'Alembert no tardó en llegar. Él insiste en su interpretación de lo que es una solución y observa el hecho frecuentemente descuidado de que la propia ecuación diferencial $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ requiere que la razón $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ tenga un valor definido (finito), es decir, que la curva posea una curvatura definida en cada punto. En particular, esto se aplica a los extremos de la cuerda, donde, en vista de la igualdad $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$, el radio de curvatura debe ser infinitamente grande. Además, la presencia de puntos como picos, uniendo artificialmente curvas de diferente naturaleza, produce que la fuerza sea indeterminada allí, y, por tanto, hace imposible el movimiento: "la misma naturaleza bloquea aquí los cálculos". "Debemos dejar a los físicos que se preocupen" sobre la cuestión del movimiento de una tal cuerda compuesta. Euler declinó continuar el debate, pero observó que es posible desarrollar una teoría de ecuaciones diferenciales conteniendo estas funciones "impropias" o "mixtas". En respuesta a las críticas de d'Alembert, señala que su solución, empleando estas funciones "impropias" confirma, por ejemplo, la propagación de ondas expansivas (shocks) a través de una cuerda –un hecho observado por

D. Bernoulli. D'Alembert insiste en la validez de su punto de vista y repite que la presencia de un pico en la cuerda hace imposible toda solución.

LAS IDEAS DE D. BERNOULLI. D. Bernoulli enfocó el problema de una forma completamente distinta. Ya había adquirido cierta experiencia en el estudio de los problemas de acústica, y cayo en la cuenta que una cuerda vibrante poseía infinitas vibraciones fundamentales. Sobre la base de su estudio de los sistemas discretos concluyó que el movimiento más general de una cuerda vibrante puede obtenerse mediante la superposición de vibraciones fundamentales. Las ideas de D. Bernoulli maduraron en 1753, y concluyo que la ecuación

$$y = \alpha \sin x \cos t + \beta \sin 2x \cos 2t + \gamma \sin 3x \cos 3t + \cdots$$

abarca tanto la solución de d'Alembert como la de Euler. Así D. Bernoulli descubrió un principio de la física matemática extremadamente importante y merece honores no sólo por haberlo formulado sino también por haber comprendido claramente sus consecuencias de largo alcance. Pero mientras D. Bernoulli comprendió la importancia y el significado de su principio de superposición de vibraciones, fue incapaz de justificarlo matemáticamente y, por tanto, provocó durísimas críticas tanto de d'Alembert como de Euler. Euler señaló que D. Bernoulli no se daba cuenta de la consecuencia totalmente inaceptable implícita en sus ideas de que una función completamente arbitraria de una variable x es representable por medio de una serie de senos de arcos múltiples. Euler pensaba que una tal función debe ser impar y periódica. Vemos que Euler hace nuevamente uso implícito del principio de que si dos expresiones analíticas poseen los mismos valores numéricos en algún intervalo, entonces deben ser idénticas por doquier. D. Bernoulli respondió observando que su fórmula contenía infinitos coeficientes indeterminados que se pueden utilizar para permitir a la curva pasar a través de un número arbitrariamente grande de puntos de una curva dada y por tanto, obtener una aproximación arbitrariamente próxima. Respecto a la posibilidad de dejar fuera de este proceso algún punto concreto, D. Bernoulli hace referencia a las críticas anteriores de d'Alembert a Euler. A esto Euler respondió que era extremadamente difícil, si es que no imposible, elegir los coeficientes de la forma descrita por D. Bernoulli. En cuanto a d'Alembert, él afirmó su completo acuerdo con las críticas de Euler a D. Bernoulli y que iba más allá de ellas, pues era de la opinión de que no toda función periódica (analítica) se podía representar por medio de una serie de senos, que cualquier función representada por una serie de senos debía poseer curvatura contínua, y que la coincidencia de dos curvas en un número infinito de puntos no las hace necesariamente idénticas. La naturaleza de la controversia entre d'Alembert y D. Bernoulli demuestra fácilmente que, en términos modernos, el primero era un "aritmetizador" del análisis matemático y el último era un físico que veía las cosas desde el punto de vista de la física.

LA LLEGADA DE LAGRANGE. Por entonces, cuando los matemáticos más eminentes discutían sobre los principios matemáticos asociados al problema de la cuerda vibrante, un joven desconocido, Lagrange, apareció en escena. Inmediatamente atrajo la atención debido a sus “hábiles” cálculos (1759). Lagrange investigó la condición del problema de la cuerda vibrante con sumo cuidado y adoptó una posición definida en la controversia, colocándose completamente del lado de Euler y oponiéndose tanto a d’Alembert como a D. Bernoulli. En un esfuerzo por demostrar la exactitud de [los argumentos de] Euler, Lagrange introdujo ante todo el *problema de interpolación.* Él toma una de las funciones “impropias” de Euler, esto es, una curva dada gráficamente, compuesta generalmente de trozos de curvas completamente distintas y subdivide el eje de abcisas en pequeños segmentos iguales. Entonces levanta en los puntos de división perpendiculares de forma que determina una sucesión de puntos sobre la gráfica de la curva y busca una curva de interpolación que pase por estos puntos. Lagrange trabaja con *interpolación trigonométrica lineal* con un número acotado de términos. Esto hizo sus curvas de interpolación “legales” incluso para d’Alembert, ya que estaban dadas por expresiones analíticas sencillas. Habiendo así resuelto el problema de interpolación, Lagrange busca una solución del problema de la cuerda vibrante para la *curva de interpolación.* Pasando al límite cierto número de veces, obtiene finalmente la fórmula de Euler para la forma de una cuerda vibrante. Merece la pena decir que Lagrange pasó por un descubrimiento colosal sin advertirlo. Camino de la derivación definitiva de las fórmulas de Euler, Lagrange obtenía *series trigonométricas de Fourier.* Simplemente intercambiando los límites, Lagrange hubiese descubierto la ley de formación de los coeficientes de Fourier, y esto habría acabado con todos los debates. Pero los esfuerzos de Lagrange estaban dirigidos en otra dirección, y, aunque quemándose prácticamente con el descubrimiento, era tan poco consciente de él que lanzó a D. Bernoulli la frase: “Es una pena que una teoría tan brillante sea insostenible”. Irónicamente, fueron las ideas de D. Bernoulli, como fueron presentadas finalmente por Fourier, las que cerraron la controversia. En otro artículo (1760) Lagrange retoma el problema de la cuerda, sigue el método de d’Alembert, obtiene la solución de este último y, se asegura de que “no hace uso de ninguna continuidad” (continuidad en el sentido de Euler, es decir, en términos modernos, “prolongabilidad analítica”). Éste no era el caso, pues, como es bien sabido, Lagrange estaba completamente convencido de que toda función contínua (en el sentido moderno) era infinitamente derivable y se podía representar como una serie de Taylor con la posible excepción de puntos aislados. Siendo esto así, se hace extremadamente difícil decidir en cuales argumentos de Lagrange toma parte o no la continuidad de Euler. Sus críticos pusieron objeciones sólo en algunos aspectos particulares, pero no tocaron los aspectos fundamentales de su investigación y admitieron que sus cálculos eran, en general, “singularmente hábiles”. D’Alembert atacó, sobre todo, los frecuentes pasos al límite de Lagrange. Su perspicaz inteligencia comenzó a apreciar plenamente las dificultades asociadas a esta operación. D’Alembert también objetó el uso de series divergentes por parte de Lagrange. La respuesta de Lagrange fué manifestar que “hasta ahora , nadie ha cometido un error al reemplazar la serie $1+x+x^2+x^3+\cdots$ por la fórmula $1/(1-x)$". Defendiéndose de las críticas de d'Alembert (que éste también había dirigido contra Euler) referentes al hecho de que una cuerda vibrante debe tener curvatura en todos sus puntos, Lagrange dijó que "la naturaleza no puede volverse contra los cálculos ya que, en términos físicos, no hay esquinas en una cuerda; siempre hay cierta redondez por la rigidez de la cuerda". En correspondencia posterior, d'Alembert fuerza a Lagrange a admitir que su solución asume tácitamente la existencia y finitud de todas las de derivadas. Y como d'Alembert y Lagrange compartían la convicción contemporánea dominante de que la existencia de derivadas de todos los órdenes implicaba que una función se puede desarrollar en serie de Taylor, Lagrange fue forzado a admitir que él había introducido implícitamente la continuidad de Euler, esto es, la representación de una función por medio de ecuaciones –un aspecto en el que siempre había insistido d'Alembert.

Posteriormente, Lagrange realizó otro intento por reforzar sus consideraciones, de cuya verdad estaba profundamente convencido. En esta nueva exposición él pasa a través de un número finito de puntos una curva que es solución del problema de la cuerda y consta de m curvas seno. Es importante observar que ahora estos puntos ya no están sobre la curva dada, sino cerca de ella. Lagrange llama a la curva que él introdujo una *generatriz.* Observa que cuando m es muy grande, la generatriz se desvía muy poco de la forma inicial de la cuerda, de modo que la forma inicial podría ser tratada como un trozo de la generatriz. Entonces plantea la siguiente cuestión: ¿No implica esto que la forma inicial de la cuerda se compone de curvas seno? Su respuesta es que tal suposición es inevitable cuando se llega a una identidad "geométrica", pero que en el resto de casos la curva inicial es una especie de asíntota indefinidamente aproximada por la generatriz, sin que ambas curvas lleguen nunca a coincidir completamente. Y de los coeficientes de su fórmula de interpolación Lagrange deduce la conclusión de que podemos ignorar la desviación de la generatriz sólo si la curva inicial posee derivadas de todos los órdenes –una propiedad que debe preservarse en el transcurso del tiempo a lo largo del movimiento de la cuerda. El movimiento de la cuerda es posible únicamente bajo estas condiciones. Lagrange no explica al lector que su afirmación representa una renuncia completa a la defensa del punto de vista de Euler (que era su objetivo inicial) y una aceptación de la posición de d'Alembert. Éste último insistió tercamente en que el uso de series divergentes era inaceptable. Merece la pena resaltar que él da la función $(\sin x)^{1/3}$ como un ejemplo de que una función finita en todo punto no posee necesariamente serie de Taylor. No se escapa a su penetrante visión que el propio ejemplo va contra él mismo. De hecho, por una parte, tenemos una "ecuación", de modo que esta forma de una cuerda admite una solución. Por otra parte, ya no tenemos la finitud de todas las derivadas. Para resolver el problema, d'Alembert dice que valores infinitamente grandes de las derivadas son admisibles siempre que no hayan saltos. El debate duró otros 20 años sin solución definitiva.

El descubrimiento de Fourier

Actualmente el concepto de función no está tan definitivamente cristalizado ni establecido fuera de duda como pareció estarlo durante un tiempo a fines del siglo XIX. No es una exageración afirmar que actualmente el concepto de función está aún en evolución y que la controversia sobre la cuerda vibrante continúa, excepto por el hecho evidente de que las circunstancias científicas, las personalidades implicadas y la terminología son distintas. Si ahora miramos hacia atrás hasta el debate del siglo XVIII, lo que es especialmente llamativo es la notable perspicacia y capacidad intuitiva de los pensadores que participaron en el debate, y la tremenda riqueza de profundas ideas analíticas relacionadas con esta controversia y ampliamente generadas por ella. En este sentido, el debate era una abigarrada maraña de preguntas profundas y extremadamente difíciles relativas a la posibilidad de pasar al límite y el intercambio de límites, las condiciones bajo las cuales se pueden usar series divergentes; la convergencia de la serie de Taylor de una función infinitamente derivable; la diferencia entre una función y su representación analítica; la prolongabilidad analítica de una función; el concepto de arbitrariedad; determinantes infinitos; curvas sin curvatura y curvas que constan solo de picos; interpolación; discontinuidades de funciones y, en particular, de series trigonométricas. La última [cuestión] ocupó un puesto tan importante a lo largo y después del debate que, posteriormente, ha llegado a denominarse como "el eje de rotación de todo el análisis matemático". Incluso a la luz del análisis matemático moderno, no es sencillo conseguir conocer las particularidades del choque de todas estas ideas. Lo que hace este tema más difícil aún es que no estamos completamente seguros de comprender correctamente el punto de vista de cada uno de los que participaron en el debate. Por ejemplo, ya en 1744 Euler comunicó a Goldbach la fórmula $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin nx)/n = (\pi - x)/2$ sin concluir, en absoluto, que *dos expresiones analíticas que coinciden en un intervalo no coinciden necesariamente en todas partes.* En esta época, esta conclusión se hubiera considerado monstruosa y Euler, en posesión de un hecho confirmando esta conclusión, no logró tomar nota de ello por alguna razón, para nosotros, inexplicable. En general, bajo la luz del análisis matemático moderno, este asunto podría, por lo visto, ser descrito como sigue. La pregunta clave del debate concernía a la relación entre una definición analítica de una función y una definición que es hasta cierto punto física; ¿existe una fórmula que proporciona la posición inicial exacta de una cuerda desviada de su posición de equilibrio *de forma arbitraria*? Ni la sofisticada mente analítica de d'Alembert, ni los esfuerzos creativos de Euler, D. Bernoulli, y Lagrange bastaron para resolver este problema. La persona predestinada a llevar a cabo esta tarea era Fourier. En 1807, para el asombro de todo el mundo, Fourier dió la regla para los coeficientes a_n y b_n de la serie trigonométrica

$$a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

que representa una función $f(x)$ "arbitrariamente dada". Las fórmulas

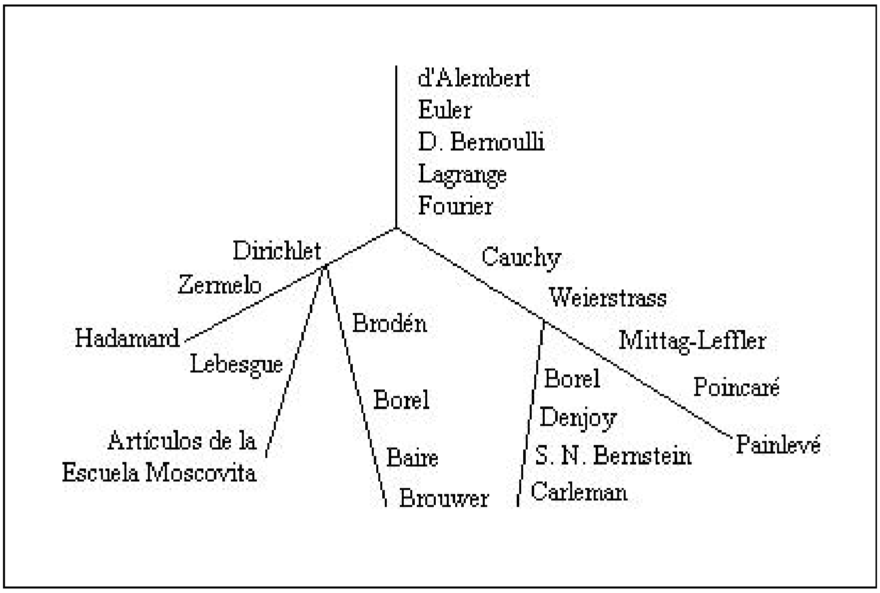
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2pi} f(\alpha)\cos n\alpha d\alpha \text{ y } b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\sin n\alpha d\alpha,$$

hoy conocidas como fórmulas de Fourier, decidieron categóricamente la controversia en favor de D. Bernoulli, para cuyo punto de vista, la mayor objeción era precisamente la ausencia de una regla para el cálculo de los coeficientes de una serie trigonométrica que represente a una función "arbitrariamente" dada $f(x)$. Ciertamente, quedaba la objeción a los resultados de Fourier alimentada por el hecho de que no se sabía si su serie convergían o no. Un argumento inmediato a favor de Fourier era la extrema simplicidad de su regla para el cálculo de los coeficientes de la serie trigonométrica. Un argumento definitivo a su favor, fue una sucesión de artículos de Leujene Dirichlet (1805–1859) en los cuales demostraba la convergencia de la serie de Fourier de toda función $f(x)$ con un número finito de máximos y mínimos [en un intervalo]. El descubrimiento de Fourier produjo una tremenda perplejidad y confusión entre los matemáticos. Derribó todos los conceptos. Hasta entonces, todo el mundo, incluyendo Euler y d'Alembert, pensaba que cualquier expresión analítica representaba solo curvas cuyas sucesivas partes dependen una de la otra. Euler introdujo su término "función contínua" para expresar esta dependencia mutua de las partes de una función (el significado moderno del término es completamente distinto). Bajo la influencia de la visión de Euler de la continuidad, Lagrange intentó demostrar en su teoría de las funciones analíticas (1797) que toda función contínua se puede desarrollar en serie de Taylor: ya en ese momento se sentía que existía relación entre las diferentes partes de una función que se puede desarrollar en serie de Taylor, ya que se era consciente que el conocimiento de un pequeño arco de la curva implicaba el conocimiento de toda la curva. Pero Fourier demostró que tales afirmaciones eran inútiles e imposibles, ya que un físico que dibuja una curva de forma arbitraria, es libre de cambiar su curso a su voluntad; pero una vez que la curva ha sido dibujada puede ser representada mediante una única expresión analítica. Esto sugirió el resultado paradójico de que no hay relación orgánica entre las diferentes partes de la misma línea recta o entre los diferentes arcos del mismo círculo, ya que el descubrimiento de Fourier demostró que podemos incluir bajo una única fórmula analítica, una única ecuación, una curva contínua compuesta de segmentos de diferentes líneas rectas o arcos de diferentes círculos. Ciertamente, algunas voces tímidas observaron que la ecuación de una única línea recta o un único círculo parecían "más simples" que un desarrollo de Fourier. Pero pronto se hizo claro que este criterio de "simplicidad" era totalmente inútil, ya que obligaba al uso exclusivo de funciones algebraicas y prohibía el uso de desarrollos infinitos, comprometidos por el descubrimiento de Fourier, cuya importancia y utilidad crecía de un día para otro.

El concepto de función déspues del descubrimiento de Fourier

La comprensión moderna de las funciones y su definición, las cuales nos parecen correctas, solo surgiría tras el descubrimiento de Fourier. Su descubrimiento demostró claramente que la mayoría de los malentendidos que surgieron en el debate de la cuerda vibrante fueron el resultado de la confusión de dos conceptos aparentemente idénticos pero, en realidad muy distintos, a saber, el de función y el de su representación analítica. En efecto, antes del descubrimiento de Fourier no se había establecido ninguna distinción entre los conceptos de "función" y de "representación analítica", y fue este descubrimiento lo que condujo a su desconexión. Después de esto, los esfuerzos de los matemáticos se canalizaron en dos direcciones distintas. Por una parte, el deseo de mantener la dependencia mútua de las partes de una curva dio lugar al nacimiento de la moderna *teoría de funciones de una variable compleja*. La perspectiva de este camino era la completa separación de los conceptos de función y de su representación analítica. Esto fue hecho por Weierstrass en su concepto de función "analítica ("holomorfa"). Por otra parte, el descubrimiento de Fourier y el estudio de los valores de expresiones analíticas destruyó todas las conexiones entre las diferentes partes de una curva. Parecía que la única propiedad de los valores de una expresión analítica era su *determinación*, y que eran, por otra parte, completamente arbitrarios, cada uno independiente del resto. Este era el sentido de la definición del concepto de función dado por Dirichlet. Esta definición pasó a ser de capital importancia para la contemporánea *teoría de funciones de una variable real*. Durante algún tiempo, las definiciones de función dadas por Dirichlet y Weierstrass, respectivamente, aportaron gran claridad y cierta serenidad en el entorno matemático. Parecía que esta claridad era definitiva y que todo lo que quedaba por hacer era desarrollar las consecuencias de las sólidas definiciones conseguidas después de tantas dificultades y esfuerzos. Pero, bastante recientemente se hizo claro que no todos los matemáticos estaban completamente de acuerdo respecto del valor y el sentido de estas definiciones. Basados en hechos incontestables, con más frecuencia que nunca, ciertos indicios sugerían que la definición de Weierstrass de función es excesivamente restrictiva. Por otra parte, los matemáticos concluyeron con suma consternación que no pensaban, en absoluto, de una única forma con respecto al sentido de la definición de función de Dirichlet. Algunos la encontraban perfecta, otros demasiado general y aún otros, carente de significado. Así, se hizo claro que en nuestro propio tiempo, la controversia sobre la cuerda vibrante ha sido renovada con otra luz y con un contenido diferente. El grupo de nombres que aparecen en la figura 1 sugiere el patrón general de la evolución del concepto de función.

Funciones de una variable real. El descubrimiento de Fourier demostró que era posible ver como una sola función la ordenada de una curva contínua compuesta de arcos de curvas que no posean nada en común y por tanto, de naturaleza completamente distinta. Este descubrimiento eliminó completamente la



noción de una relación orgánica (lógica) existente [presumiblemente] entre las diferentes partes de una curva descrita mediante una única expresión analítica, especialmente una expresión tan sencilla como una serie trigonométrica. Siendo esto así, parecía que la única opción disponible era ignorar las expresiones analíticas y declarar que lo único que quedaba en el significado del concepto de función era el de una colección de valores numéricos asociados a valores diferentes de x que son, en general, completamente independientes los unos de los otros. Esta fue la idea detrás de la famosa definición de función, todavía hoy en uso, debida a Dirichlet, que establece que *y es una función de una variable x, definida en un intervalo $a < x < b$, si para cada valor de la variable x en este intervalo le corresponde un valor concreto de la variable y. Además, es irrelevante la forma en la que esta correspondencia se establezca.* Esta definición clarificó inmediatamente gran cantidad de fenómenos del análisis matemático que a lo sumo habían sido vagamente comprendidos hasta ahora. Al principio esta definición parecía tan perfecta que fue prácticamente aceptada por unanimidad. Durante mucho tiempo fue interpretada como un descubrimiento genuino. Su formulación fue considerada que era tan exactamente adecuada que no se dedicó ni un sólo pensamiento para su posible modificación. La visión establecida fue que desde entonces el análisis matemático se ocuparía del descubrimiento de las propiedades de diversas clases de funciones obtenidas restringiendo la definición general de función debida a Dirichlet. De esta forma surgieron ramas del análisis que se ocupaban de clases de funciones como las funciones *contínuas* (en el sentido de Cauchy); funciones *monótonas*; funciones *con un número finito de máximos y mínimos* [sobre un intervalo]; funciones verificando una *condición de Lipschitz*; funciones verificando una *condición de*

Dini; funciones *diferenciables*, etc. Sólo después de que estas clases de funciones habían sido aisladas e investigadas, surgieron voces que solicitaban la clarificación de la definición de Dirichlet, que había sido aceptada inicialmente sin reparos. Las objeciones se dirigieron contra la clausula "*es irrelevante la forma en la que esta correspondencia se establezca.*" Posteriormente, los argumentos en favor y en contra de este aspecto, se vincularon con los argumentos en favor y en contra del llamado *axioma de elección*, formulado explícitamente por primera vez por Zermelo. Uno de los primeros en establecer claramente su insatisfacción con este "subirse al carro" de la definición de Dirichlet, fue Brodén (1897). Desafortunadamente, el argumento de Brodén estaba redactado en términos bastante generales. Como resultado de ello, no todos los matemáticos contemporáneos prestaron atención a sus reservas. Brodén argumentaba que la definición de una función debía poseer una propiedad especial que capacitase su comunicación fácil de una mente a otra. Para lograr una idea de lo que Brodén tenía en mente, dividamos el intervalo $[a, b]$ de definición de una función $y(x)$ en infinitos subintervalos $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \cdots$. Supongamos que nuestra función coincide en δ_1 con la ordenada de una linea recta L_1, en δ_2 con la ordenada de una cicloide L_2, en δ_3 con la ordenada de una lemniscata L_3, etc. Brodén pregunta: ¿cuándo podemos decir que $y(x)$ está definida? Su respuesta es que $y(x)$ está definida si y solo si disponemos de una ley para la elección de las curvas $L_1, L_2, L_3, \cdots$, esto es, cuando estas curvas tengan algo en común, y por tanto son de alguna manera "homogeneas" [como clase]. Brodén afirma que no podemos estudiar una función compuesta de infinitas curvas totalmente "heterogéneas" ya que una tal función no se puede prescribir ni dar. Sólo podemos prescribir o dar curvas completamente diferentes cuando su número es finito, en cuyo caso se pueden dar como absolutamente independientes unas de otras. De acuerdo con Brodén, pues, no podemos estudiar infinitas curvas que sean totalmente independientes unas de otras. Algo más tarde –e independientemente de Brodén– Borel, Baire y Lebesgue (1905) apoyaron el requisito de una ley definida, siempre *implícita tácitamente*, cuando se trata con el concepto de función. Baire señaló que debíamos, de una vez por todas, desterrar la analogía de una maleta con ruedas, pasada de mano en mano, en todas las discusiones que encierran el infinito. Aunque es cierto que una función es, esencialmente, la totalidad de los valores numéricos asociados a los diferentes valores de la variable x, esta totalidad no se puede pasar de mano en mano, como la mencionada maleta con ruedas; aquí la descripción de la *ley de correspondencia* que asocia $y(x)$ a un x es absolutamente indispensable, y esa ley debe ser comunicable a cualquiera que desee investigar la función $y(x)$. Baire observa que "para nuestras mentes, todo se reduce a lo finito". Para describir con precisión las diferencias entre su propia visión y las de Zermelo y Hadamard, Borel realiza el siguiente experimento mental. Primero observa que la expansión decimal de $\pi = 3.1415926535\ldots$ se debe interpretar como *completamente determinada*, ya que cualquier libro de texto de geometría elemental nos dice cómo calcular tantas de sus cifras decimales [exactas] como deseemos. Esto significa que podemos considerar cada cifra decimal, digamos la millonésima, como completamente determinada incluso si nadie la ha calculado jamás. Entonces Borel hace una cola de un millón de personas y hace que cada persona diga un dígito decimal aleatoriamente, obteniendo así una expansión decimal de un millón de dígitos. Borel trata esta expansión como *completamente determinada*. Entonces hace una cola de infinitas personas, bastantes más de un millón, y de nuevo hace que cada persona diga aleatoriamente un dígito decimal. Ahora Borel plantea la pregunta de si podemos continuar interpretando el resultante número decimal infinito como *completamente determinado*, es decir, tan completamente determinado como, por ejemplo, la expansión decimal infinita de π. La respuesta de Borel es que los matemáticos con la mentalidad de Zermelo y Hadamard, tratarán definitivamente esta expansión decimal infinita como "completamente determinada", mientras que él mismo no la tratará así. Su argumento es que el número obtenido de esta forma no puede seguir ninguna ley, de modo que dos matemáticos discutiendo este número nunca tendrán la certeza de que están hablando *del mismo número*; sin una ley de formación de sus decimales nunca podrán tener certeza de su identidad. Lebesgue va un paso más allá y afirma que un matemático que no tiene una ley que realiza una función $y(x)$ que está considerando, no puede tener la certeza de que está hablando de la misma función en diferentes momentos de su investigación; aquí no estamos ya preocupados por el lenguaje común de dos matemáticos sino sobre un matemático discutiendo consigo mismo. Rebatiendo el punto de vista de Borel, Hadamard afirma que no hay dificultad en considerar una expansión decimal "sin ley" como completamente determinada. Así, por ejemplo, en la teoría cinética de gases, se habla de las velocidades de las partículas de un gas en un volumen dado aunque nadie las conocerá realmente jamás. Hadamard resalta que el requisito de una ley que determina una función $y(x)$ bajo investigación se parece mucho al requisito de una *expresión analítica* para esa función, y esto supone una vuelta atrás al siglo XVIII.

Los artículos matemáticos de Baire y Lebesgue han arrojado gran cantidad de luz sobre la cuestión, pero también la han hecho extremadamente compleja. Baire se embarcó en una investigación sistemática de la representación de funciones por medio de expresiones analíticas. Como, por el teorema de Weierstrass, toda función contínua $f(x)$ es representable como suma de una serie uniformemente convergente de polinomios $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)$, Baire llama a todas las funciones contínuas *funciones de clase* 0. Baire define las *funciones de clase* 1 como aquellas funciones discontinuas que son límites de funciones contínuas, es decir, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Baire llama a las funciones que no están en las clases 0 y 1 y que son límites de funciones de clase 1, *funciones de clase* 2, etc. La definición de Baire se extiende a todos los números finitos y a todos los numeros transfinitos numerables. De ahí, la famosa *clasificación de Baire de las funciones:*

$$K_0, K_1, K_2, \cdots, K_\omega, \cdots, K_\alpha, \cdots |\Omega.$$

Cada función $f(x)$ en la clasificación de Baire posee una representación analítica mediante polinomios y un número finito o numerable de símbolos de paso al límite. Este es el tipo de expresión analítica considerada por Baire. Lebesgue complementó de forma esencial la investigación de Baire demostrando que es absolutamente inútil considerar el resto de operaciones analíticas, como la diferenciación, los desarrollos en serie, la integración, el uso de funciones trascendentes como $\sin x$, $\log x$, etc.; porque toda función que se consiga utilizando un número finito o numerable de estas operaciones está necesariamente incluida en la clasificación de Baire. Lebesgue también probó el importante hecho de que ninguna de las clases de Baire es vacía y, finalmente, utilizando un método profundo y extremadamente complejo, encontró una función concreta $f(x)$ fuera de la clasificación de Baire. El impacto del descubrimiento de Lebesgue fue tan impactante como el de Fourier en su época. El resultado de Lebesgue demuestra que una definición *lógica* de una función particular es más amplia que una definición puramente matemática, ya que *una definición lógica producía una función concreta $f(x)$ que no puede obtenerse pasando al límite un número finito o infinito numerable de veces a partir de polinomios.* La función de Lebesgue que queda fuera de la clasificación de Baire es extremadamente compleja y su naturaleza no ha sido completamente estudiada aún. Pero los artículos de la escuela moscovita demostraron que el aspecto más delicado de las consideraciones de Lebesgue admitía objeciones. Cuando Lebesgue demostró que *toda* expresión analítica consistente de símbolos matemáticos, en número finito o infinito numerable, se puede transformar en una expresión de Baire, compuesta de pasos *simples* (i.e. numerables) al límite, él no disponía de un verdadero catálogo de todas las operaciones analíticas. Esto significa que él estaba exponiendo su empresa a un gran peligro, pues siempre podría surgir una expresión analítica que no se pueda transformar en una expresión de Baire. De hecho, los artículos de la escuela moscovita demostraron que, realmente, la expresión analítica

$$f(x) = \overline{\lim}_{y\to\infty}\overline{\lim}_{m\to\infty}\overline{\lim}_{n\to\infty}P_{m,n}(x,y),$$

donde $P_{n,m}(x,y)$ es un polinomio en x e y, donde el paso al límite sobre n y m es *simple* (numerable) y el paso al límite $\overline{\lim}$ sobre y es *contínuo* (i.e., no numerable), no es reducible a una expresión de Baire para una elección adecuada de los polinomios $P_{m,n}(x,y)$. Al mismo tiempo se hizo claro que, como anticipó Borel, muy frecuentemente las expresiones analíticas son totalmente inútiles en el sentido de que, *aparentemente,* incluso las funciones de clase 1 en la clasificación de Baire, nos enfrentan a problemas que son en principio *irresolubles.* Los problemas expuestos sobre la naturaleza de las expresiones analíticas están aún lejos de ser resueltos. Pero debería señalarse que hay importantes y marcados matices de opinión entre los matemáticos que pusieron objeciones a la definición de Dirichlet. Así, mientras Lebesgue está dispuesto a aceptar cualquier ley (lógica o matemática) tan pronto como produzca una función concreta, Borel insiste en la restricción de que la ley sea *numerable* (esto es, que involucre los números naturales pero no un contínuo). Brouwer parece ir aún más allá, pues renuncia a considerar incluso el infinito de los números naturales.

FUNCIONES DE UNA VARIABLE COMPLEJA. Un destino muy distinto aconteció a la definición de función que aspiraba a una formulación del concepto de función tal que "el conocimiento de un arco pequeño de la curva bajo consideración implica el conocimiento de toda la curva". Es un hecho que, de la misma forma que Dirichlet, trabajando con variables reales, propuso una definición que se consideró definitiva, también Weierstrass, trabajando con variables complejas, dió una definición tan perfecta que en el dia de hoy la mayoría de los matemáticos la tratan como única y, en cualquier caso, como verificadora de todos los requisitos de aplicación práctica. Mientras las críticas dirigidas contra la definición de Dirichlet piden que ésta sea *estrechada*, las críticas contra la definición de Weierstrass, solicitan para ella, ser *ampliada*. Los artículos de Weierstrass fueron precedidos por los de Cauchy (1789–1857). Cauchy fue el primero en darse cuenta de que la propiedad de que una curva quede determinada por un pequeño arco, demandaba el uso de una *variable compleja* y que aunque esto podría jugar un papel auxiliar, era un papel indispensable. Las ideas de Cauchy y los teoremas básicos fueron ordenados y sistematizados por Weierstrass (1815–1897). Su idea fundamental fue la de *prolongación analítica*. Las investigaciones de Cauchy demostraron que toda serie $P(x-a)$ de potencias positivas de la diferencia $x-a$ converge en el interior de cierto círculo C con centro a y diverge fuera de C. La suma de la serie dentro de C es infinitamente diferenciable. Weierstrass trató esta suma de la serie $P(x-a)$ como una "función analítica" definida en C y dependía de un proceso especial para extender su dominio de existencia. Este proceso se basa en el siguiente teorema fundamental: *Si los círculos de convergencia de dos series dadas $P(x-a)$ y $P(x-b)$ se intersectan y esta intersección contiene un punto en el que los valores de las dos sumas y los valores de todas sus correspondientes derivadas coinciden, entonces ambas sumas tienen los mismos valores a lo largo de toda la intersección de los dos círculos.* En este caso, Weierstrass trata cada una de las dos series como una *prolongación directa* de la otra y llama a cada una de ambas un "elemento" de la función analítica que se está definiendo. La definición de función analítica de Weierstrass es la siguiente: *Una función analítica $f(x)$ es la totalidad de los elementos obtenidos a partir de uno dado, mediante sucesivas prolongaciones directas.* Volterra y Poincaré contribuyeron a la clarificación definitiva de esta definición mostrando que la definición completa de una función analítica en todo su dominio no requiere más que una cantidad *numerable* de prolongaciones directas. Una función analítica $f(z)$ es univaluada si no existe un punto z en el cual dos elementos diferentes $P(x-a)$ y $P(x-b)$ posean valores diferentes. El conjunto de puntos z del interior de los círculos de convergencia de los elementos de la función univaluada $f(z)$ se llama su *dominio natural de existencia*. Un punto del borde del dominio natural de existencia de una función univaluada se llama un punto singular de la función. Un teorema básico es que *el círculo de convergencia de cada elemento de una función analítica $f(z)$ contiene un punto singular*. La definición de Weierstrass arrojó inmediatamente una luz deslumbrante sobre muchas áreas, hasta entonces oscuras, del análisis matemático. Explicó una gran cantidad de paradojas y provocó un flujo de artículos (continuado hasta la fecha) dedicados al estudio de las propiedades de las funciones analíticas. Parecía que se había encontrado una definición tan perfecta de función que todo lo que quedaba por hacer era estudiar sus implicaciones. Después de todo, parecía que finalmente se había desentrañado la propiedad de una función por la que "*los valores de una pequeña parte de una curva la determinan completamente*": esta propiedad pasaba a ser simplemente una consecuencia de la definición de función. Además, muchas propiedades, hasta entonces desconcertantes, de las expresiones analíticas, principalmente series y productos infinitos, se clarificaron: resultó que la suma de una serie uniformemente convergente de funciones analíticas en un dominio D, era una función analítica en D. El enigma de una expresión analítica que convergía a funciones diferentes en diferentes dominios se explicaba observando que la convergencia uniforme se interrumpía entre estos dominios. Esto explicaba por qué, por ejemplo, la serie

$$\frac{1+z}{1-z} + \frac{2z}{z^2-1} + \frac{2z^2}{z^4-1} + \frac{2z^4}{z^8-1} + \cdots$$

converge a 1 dentro del círculo $|z| = 1$ y a -1 en su exterior. Así, los conceptos de función analítica y de expresión analítica quedaron desligados. Borel (1895) fue el primero en señalar defectos concretos de la definición de Weierstrass y realizó varios intentos para construir una teoría más general que la teoría de Weierstrass. Los primeros dos de estos intentos fueron calificados como deficientes por Poincaré y Painlevé y solo el tercero de ellos (1917) debe ser juzgado como satisfactorio. Borel dedicó una parte significativa de su trabajo científico a la búsqueda de una clase de funciones más extensa que la clase de las funciones analíticias de Weierstrass. En este area contribuyó con un cierto número de ideas profundas que llegaron a formar los fundamentos de prácticamente todos los artículos de sus seguidores en esta dirección. La objeción clave de Borel a la definición de Weierstrass era la total artificialidad del borde del "dominio natural de existencia de una función analítica univaluada". Esta frontera es verdaderamente natural si consiste de un conjunto finito o infinito numerable de puntos. Pero si es una curva cerrada, entonces "frecuentemente, esta frontera –escribe Borel– es totalmente artificial en el sentido de que la expresión analítica que produce una función con este borde, resulta ser también uniformemente convergente fuera del borde y, por tanto, también produce una función externa. Desde el punto de vista de Weierstrass estas dos funciones, la interna y la externa, son *completamente diferentes,* ya que ninguna es una prolongación de la otra. Pero es, de hecho, una única función cortada en dos por una curva singular, pues es posible encontrar una clase de expresiones analíticas tales que si una parte verifica una relación algebraica o diferencial, entonces también lo hace la otra". Las expresiones analíticas que Borel tenía en mente eran series de fracciones racionales

$$\sum \frac{A_n}{Z - a_n},$$

donde la serie $\sum |A_n|$ converge y los puntos singulares a_n ("los polos de la expresión analítica") son densos por doquier sobre la curva cerrada bajo consideración o se acumulan en su entorno.

Poincaré y Wolf fueron críticos del primer intento de Borel [para modificar la definición de Weierstrass]. Poincaré señaló que siempre era posible dividir la curva bajo consideración en dos partes A y B y definir dos funciones analíticas (desde el punto de vista de Weierstrass) $\varphi_1(z)$ y $\varphi_2(z)$ tales que $\varphi_1(z)$ sea analítica fuera de A, $\varphi_2(z)$ sea analítica fuera de B, y además $\varphi_1(z) + \varphi_2(z) = F_1(z)$ en el interior de la curva y $\varphi_1(z) + \varphi_2(z) = F_2(z)$ en el exterior de la curva, donde $F_1(z)$ y $F_2(z)$ son dos funciones *arbitrarias* de las cuales una es analítica en el interior de la curva, la otra es analítica en el exterior de la curva y ninguna de las dos se puede prolongar analíticamente a ninguna parte cruzando la curva. Con respecto a Wolf, él construyó una serie $\sum \frac{A_n}{z-a_n}$ que convergía a cero en el interior de la curva, sus polos a_n se acumulaban en una curva exterior, y la serie $\sum |A_n|$ convergía. Siguiendo las críticas de Poincaré, Borel modificó su teoría y recurrió a los desarrollos estrella de Mittag-Leffler. Los desarrollos estrella de Mittag-Leffler son generalizaciones de las series de Taylor, pues el término n-ésimo del desarrollo es una combinación lineal de los primeros n coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ de una serie de Taylor. Borel expresó la convicción de que el concepto de Weierstrass de función analítica estaba ligado demasiado fuertemente a una clase concreta de expresiones analíticas, a saber, las series de Taylor, y que si se tomase, en vez de una serie de Taylor $K(x-a)$, un desarrollo estrella de Mittag-Leffler construido para un punto interior a la curva, entonces los polos de la expresión analítica, localizados densamente por toda la curva singular, podrían deslizarse a través de sus rayos al exterior. Observamos que el dominio de convergencia de un desarrollo estrella de Mittag-Leffler para una función analítica $f(z)$ se obtiene como sigue. Se enciende una fuente de luz en el punto inicial a de un desarrollo estrella de Mittag-Leffler $M(x-a)$, y se clavan en el plano estacas opacas en todos los puntos singulares de la función analítica que se está desarrollando. El dominio de convergencia del desarrollo estrella $M(x-a)$ de $f(z)$ es toda la zona iluminada (la estrella). Los cálculos de Borel parecían confirmar su idea, ya que resultaba que el desarrollo estrella $M(x-a)$ para un punto interior a resultaba converger en el conjunto infinito de rayos de la estrella al valor de la función externa sobre estos rayos. Pero Painlevé escribió un artículo brillante, detallado, y extremadamente sutil, en el que indicaba a Borel que todo esto podría ser accidental, ya que existen desarrollos estrella de Mittag-Leffler que convergen a cero en un segmento de un rayo sin que el desarrollo completo represente a cero. Entonces Borel hizó un tercer intento

–esta vez con éxito– suponiendo que la serie $\sum |A_n|$ *converge extremadamente rápido* (al menos del orden de $e^{-e^{n^4}}$). Él relacionó esta suposición con la "monogeneidad del conjunto", es decir, la existencia de $f'(z)$ sobre el conjunto). La nueva teoría de Borel resistió el test; para una cierta clase de funciones (complejas)(en el sentido de Dirichlet) los desarrollos estrella *invariablemente* convergen a $f(z)$. Esto significa que el conocimiento de la magnitud de la función y sus derivadas determina completamente la función en su totalidad. Este es ciertamente el caso cuando la función se conoce sobre un segmento. Una confirmación algo retrasada de la tercera teoría de Borel vino de los artículos de la escuela moscovita (Privalov, Luzin). Concretamente, se demostró que si una función es analítica cerca de una curva rectificable y se anula en casi todo punto de la curva cuando sus puntos son aproximados a lo largo de caminos tangentes, la función debe ser idénticamente igual a cero. Y como la función externa de Borel toma los mismos valores en casi todo punto de la curva singular (rectificable) que la función interna, se sigue que solo puede existir una única función externa. Esta unicidad confirma las ideas de Borel respecto de la relación *orgánica* entre las funciones no prolongables interna y externa.

En su búsqueda de la generalización más natural de la noción de función analítica, Denjoy, Bernstein y Carleman tomaron un camino completamente distinto. El hecho más original de sus investigaciones fue su determinación para trabajar con variables *reales* en lugar de *complejas*.

Bernstein comienza con sus resultados sobre mejor aproximación de funciones analíticas. Su punto de partida es el siguiente teorema. Si $f(x)$ es holomorfa en todos los puntos de un intervalo $[a, b]$ entonces la mejor aproximación $E_n f$ de $f(x)$ por medio de un polinomio de grado n-ésimo, debe verificar la desigualdad $E_n f < M\rho^n$, donde $\rho < 1$. Bernstein llama a una función (P) casi-analítica si existe una sucesión infinita de números naturales $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ tales que $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$. Estas funciones resultan ser notables porque, como afirma el teorema fundamental de Bernstein, toda función (P) casi-analítica está completamente determinada en todo el intervalo $[a, b]$ por sus valores en cualquiera de sus sub-intervalos $[a', b']$. Esta proposición permitió a Bernstein definir la *prolongabilidad casi-analítica* (P) *como la conservación de la desigualdad* $E_{n_k} f < M\rho^{n_k}$ *en un intervalo* $[c, d]$ *que contenga al intervalo dado* $[a, b]$. Bernstein comparaba el hecho observado de al cambiar la base $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$ de una prolongación casi-analítica (P), se producián prolongaciones de la función dada $f(x)$ completamente diferentes fuera del intervalo $[a, b]$, con la multivaluación de las funciones analíticas ordinarias.

Carleman dió una definición distinta de casi-analiticidad. Mientras que las funciones casi-analíticas (P) de Bernstein podían carecer de derivada, Carleman insiste en que las funciones $f(x)$ que él considera tienen derivadas de *todos* los órdenes. Él denota por C_A la clase de las funciones $f(x)$ que satisfacen en un intervalo dado $[a, b]$ la desigualdad $|f^{(n)}(x)| \leq k^n A_n$, donde

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ es una sucesión de números naturales y k es una constante positiva independiente de n.

El teorema fundamental de Carleman-Denjoy es la siguiente importante proposición. *Una condición necesaria y suficiente para que la familia de funciones C_A sea casi-analítica (es decir, que sus miembros tengan la propiedad de que sus valores sobre un intervalo $[a', b']$ de $[a, b]$ las determinen en todo $[a, b]$) es que toda mayorante monótona de la serie $\sum \frac{1}{A_n^{1/n}}$ sea divergente.* Denjoy demostró solo la suficiencia de esta condición. La definición de Carleman ya ha sido aplicada a la teoría de los momentos. Su relación con la definición de Bernstein está sin determinar, en el sentido que no tenemos ni la relación de igualdad ni la relación de lo general a lo particular.

REFERENCIAS

[1] N. N. LUZIN, *La integral y las series trigonométricas*, Moscow, 1915 (Ruso).

[2] N. N. LUZIN, *Leçons sur les ensembles analytiques et leur applications*, Paris, 1930.

[3] H. BURKHARDT, *Entwicklungen nach oszillierenden Funktionen*, Leipzig, 1901.

[4] E. W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable*, 2 vols., Cambridge, 1921–26.

[5] É. BOREL, *Leçons sur la théorie des fonctions*, Paris, 1905.

[6] H. LEBESGUE, Sur les fonctions représentables analytiquement, *J. Math. Pures Appl.*, Paris (1905).

[7] S. BERNSTEIN, *Leçons sur les propriétés extrémales at la meilleure approximation des fontions analytiques d'une variable réelle*, Paris, 1925.

[8] T. CARLEMAN, *Fonctions quasi-analytiques*, Paris, 1926.

Nota biográfica sobre el autor. N. N. Luzin nació en Irkutsk en 1883. Estudió en la Universidad de Moscú, donde ingresó en 1901. Una vez finalizada la carrera de matemáticas, en 1905, y tras haber comenzado a trabajar en problemas de investigación en teoría de funciones con Egorov, Luzin sufrió una crisis personal que le mantuvo apartado de las matemáticas hasta 1908. Estuvo algún tiempo en Göttingen, donde mantuvo contactos con Landau. Defendió su tesis doctoral en 1915, bajo la dirección de Egorov. Su tesis, titulada "Las series e integrales trigonométricas", impresionó a Egorov por su profundidad y por la gran cantidad de resultados que contenía. En 1917, justo un año antes del estallido de la revolución, Luzin fue nombrado Profesor de Matemáticas Puras, en la Universidad de Moscú. Durante 10 años siguientes, Luzin y Egorov crearon la famosa Escuela de Moscú de teoría de funciones. Algunos miembros distinguidos de dicha escuela son: Aleksandrov (1896–1982), Bari (1901–1961), Khinchin (1894–1959), Kolmogorov (1903–1987), Lyusternik (1899–1982), Menshov (1892–1988), Novikov (1901–1975), Shnirelman (1905–1938), Suslin (1894–1919) y Urysohn (1898–1924).

Luzin realizó importantes contribuciones en fundamentos de la matemática, teoría de la medida, topología general y teoría de conjuntos (en particular, en este área se ocupó del estudio de los conjuntos efectivos, i.e. aquellos que pueden construirse sin la ayuda del axioma de elección).

En 1927, Luzin fue elegido miembro de la Academia de Ciencias de Rusia. Dirigió el Departamento de Teoría de Funciones de Variable Real del Instituto Steklov de Matemáticas desde 1935 hasta su muerte, en 1950. Siempre mostró interés por la historia de las matemáticas. En particular, a él debemos algunos importantes artículos sobre Newton y Euler.

Traducido del inglés por Jose María Almira (Dpto. Matemáticas, Universidad de Jaén) y David Arcoya (Dpto. Análisis Matemático, Universidad de Granada).