Los *Elementos de geometría* de Alexis Claude Clairaut (1713-1765)

Adaptación al castellano de Vicente Meavilla y Carlos Vicén

Prólogo de Claudi Alsina

Prólogo

Los *Elementos de Geometría* de Clairaut que aquí se presentan perfectamente traducidos y con las imágenes bien situadas en el texto son el resultado de una esmerada labor de Vicente Meavilla y Carlos Vicén. Casi tres siglos después de su aparición original, este documento nos permite hoy, en su actual versión, el placer intelectual de leer un libro clásico del siglo XVIII y a la vez poder hacer una reflexión educativa sobre la geometría y su enseñanza. Este doble valor de la obra es lo que justifica plenamente su edición y nuestra lectura.

Alexis Claude Clairaut (1713-1765) fue un niño prodigio (a los dieciocho años ya era académico) y a lo largo de su prolífica vida matemática realizó importantes contribuciones a la geometría en general, al estudio de curvas y superficies, a la teoría de integrales de línea y ecuaciones diferenciales y a una ingente cantidad de estudios sobre problemas físicos relacionados con el estudio mecánico-planetario propio de aquel momento. Sus resultados forman parte del brillante desarrollo matemático de la Ilustración, junto a las aportaciones de Newton, Leibniz, Lagrange, Laplace, los Bernoulli, D'Alembert, Maupertuis, etc. Ya en la portada de esta publicación podemos observar la pertenencia de Clairaut a las grandes academias de la época, que fueron las instituciones donde floreció el progreso científico quedando por aquel entonces las universidades en un discreto segundo plano.

En esta obra, tras un curioso índice muy detallado, Clairaut nos da en el prefacio de la misma una clara declaración de intenciones didácticas. El autor nos invita a recuperar el origen concreto de la Geometría y a gozar de sus aplicaciones prácticas, a resolver problemas y desarrollar las ideas intuitivas, a no caer en un logicismo estéril de deducciones sistemáticas y desarrollar en cambio el interés por el saber y el placer por descubrir. A lo largo de todos los capítulos se explican, con lenguaje simple e ilustraciones muy claras, muchas de las propiedades más básicas de la geometría plana y espacial, siempre con especial atención a las medidas de longitud, superficie o volumen y a las aplicaciones de las mismas.

El lector curioso puede encontrar en esta obra una aproximación simple al discurso geométrico típico de la Ilustración. El profesorado de matemáticas encontrará además ideas didácticas para abordar temas geométricos elementales, su visualización y la posibilidad de proponer ejercicios sobre partes de este texto. El creciente interés pedagógico por usar la propia historia de la matemática como motor educativo (recuperando textos clásicos) es un motivo adicional para celebrar que esta obra se ponga hoy en circulación.

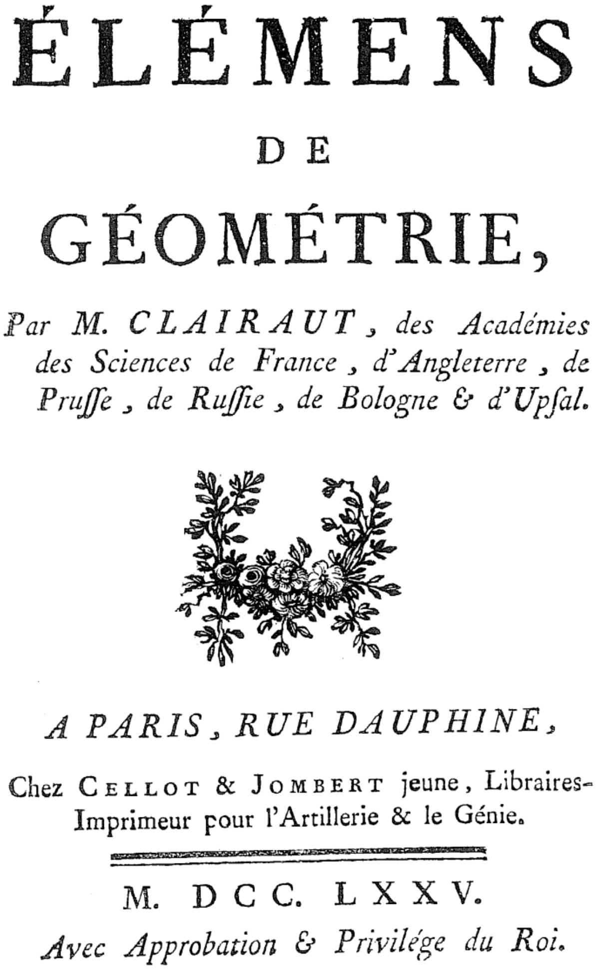
Y tratándose de Geometría, la obra nos aporta el valor añadido de incentivar su cultivo con formulaciones sintéticas e intuitivas, sin confundir lo que es la geometría básica y genuina con los modelos algebraicos que la pueden describir. Hace años que el tratamiento docente de la Geometría ha sido un tema no bien resuelto y por tanto su revisión merece nuestra atención renovada.

Clairaut al acabar el prefacio hace alusión a: *"…las ideas geométricas a las que solamente debo fijar el espíritu del lector"*. Estas ideas son bellas y claras. El texto espera. ¡Que lo disfrute!

Claudi Alsina
Universitat Politècnica de Catalunya

Unas palabras de los traductores a los lectores

Los *Elementos de Geometría* de Alexis Claude Clairaut se publicaron por primera vez en francés en 1741. Posteriormente vieron la luz las ediciones francesas de 1753, 1765, 1775, 1830, 1852, 1853, 1857 y 1861, además de traducciones al italiano, inglés y alemán.



ÉLÉMENS

DE

GÉOMÉTRIE,

Par M. CLAIRAUT, des Académies des Sciences de France, d'Angleterre, de Pruſſe, de Ruſſie, de Bologne & d'Upſal.

A PARIS, RUE DAUPHINE,

Chez CELLOT & JOMBERT jeune, Libraires-Imprimeur pour l'Artillerie & le Génie.

M. DCC. LXXV.

Avec Approbation & Privilége du Roi.

En la adaptación al castellano de la edición de 1775 que ofrecemos en las páginas siguientes, hemos intentado ser fieles al discurso del autor. Sin embargo, para no causar excesiva fatiga al lector moderno, también hemos procurado adecuar el estilo del texto original al lenguaje actual.

En el libro de Clairaut, como solía ocurrir en los manuales de los siglos XVIII y XIX, las figuras que ilustran los conceptos y procedimientos se agrupan en láminas situadas al final de la obra. Para facilitar la lectura hemos intercalado las ilustraciones en el lugar apropiado del texto.

Sin más preámbulos, le invitamos a que inicie un paseo intelectual por uno de los libros de Didáctica de la Geometría que debería ser de obligada consulta para cualquier aspirante a profesor de Matemáticas y para cualquier docente consagrado a la enseñanza de esta disciplina.

Vicente MEAVILLA SEGUÍ
Carlos VICÉN ANTOLÍN
Teruel – Zaragoza, primavera de 2008

ELEMENTOS
DE
GEOMETRÍA,

Por M. CLAIRAUT, de las Academias
de Ciencias de Francia, Inglaterra,
Prusia, Rusia, Bolonia y Upsala.

EN PARÍS, CALLE DAUPHINE,

Casa Cellot & Jombert, hijo. Libreros-
Impresor para Artillería & Ingenieros.

M D C C L X X V

Con Aprobación & Privilegio del Rey.

A MONSEÑOR
EL CONDE
DE MAUREPAS,
MINISTRO
Y SECRETARIO DE ESTADO, COMENDADOR DE LAS ÓRDENES DEL REY.

MONSEÑOR,

Quizás sea olvidar la superioridad de vuestros conocimientos el presentaros estos Elementos de Geometría; pero conociendo vuestra consideración os ofrezco alguna cosa útil.

No debo temer pues en absoluto poner bajo vuestra protección una Obra que contiene los principios de una Ciencia de cuyo éxito vos participaréis necesariamente. Os suplico muy humildemente, MONSEÑOR, que la aceptéis como un homenaje de mi reconocimiento y como una prueba del profundo respeto que os tengo,

MONSEÑOR,

Vuestro humilde y muy obediente
Servidor, Clairaut.

TABLA DE MATERIAS

PRIMERA PARTE

El procedimiento más natural, de entre todos los que hay, para lograr la medida de terrenos.

X. Construir un rectángulo conociendo su longitud y su altura.

XI. Las paralelas son las líneas que siempre están a la misma distancia unas de otras. Trazar una paralela a una línea por un punto dado.

XII. El área de un rectángulo es el producto de su altura por su base.

XIII. Las figuras rectilíneas son las que están limitadas por líneas rectas. El triángulo es una figura limitada por tres líneas rectas.

XIV. La diagonal de un rectángulo es la línea que lo divide en dos triángulos iguales. Los triángulos rectángulos son los que tienen dos de sus lados perpendiculares. Un triángulo es la mitad del rectángulo que tiene su misma base y su misma altura. Entonces, su área es la mitad del producto de su altura por su base.

XV. Los triángulos que tiene la misma altura y la misma base tienen la misma área.

XVII. Los triángulos que tienen la misma base, y están contenidos entre las mismas paralelas, tienen la misma área.

XVIII. Los paralelogramos son las figuras de cuatro lados en las que los dos opuestos son paralelos. Su área se obtiene multiplicando su base por su altura.

XIX. Los paralelogramos que tienen una base común, y que están comprendidos entre las mismas paralelas, tienen la misma área.

XX. Los polígonos regulares son las figuras limitadas por lados iguales e igualmente inclinados unos sobre otros.

XXI. Método para describir un polígono con un número determinado de lados. El pentágono tiene cinco lados; el hexágono, seis; el heptágono, siete; el octógono, ocho; el eneágono, nueve; el decágono, diez; etc.

XXII. Cálculo del área de un polígono regular. La apotema es la perpendicular bajada desde el centro de la figura a uno de sus lados.

XXIII. El triángulo equilátero es el que tiene los tres lados iguales. Procedimiento para describirlo.

XXVI. Conociendo los tres lados de un triángulo, construir otro que sea igual.

XXVII. Ángulo es la inclinación de una línea sobre otra.

XXVIII. Procedimiento para dibujar un ángulo igual a otro. Si se conocen dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido, entonces el triángulo está determinado.

XXIX. Segundo método para dibujar un ángulo igual a otro. La cuerda de un arco de circunferencia es el segmento limitado por los dos extremos del arco.

XXX. Dos ángulos y un lado determinan un triángulo.

XXXI. El triángulo isósceles es el que tiene dos lados iguales. Los ángulos que estos lados forman con la base son iguales entre sí.

XXXIV. En qué consiste la semejanza de dos figuras.

XXXVI. Método para dibujar una figura semejante a otra

XXXVIII. Si dos ángulos de un triángulo son iguales a dos ángulos de otro triángulo, entonces el tercer ángulo de uno será igual al tercer ángulo del otro.

XXXIX. Dos triángulos cuyos ángulos son respectivamente iguales tienen sus lados proporcionales.

XL. Dividir una línea en tantas partes iguales como se quiera.

XLI. Cuarta proporcional a tres líneas y cómo se construye.

XLII. Las alturas de los triángulos semejantes son proporcionales a sus lados.

XLIV. Las áreas de los triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos.

XLV. Propiedades de las figuras semejantes obtenidas a partir de las propiedades de los triángulos.

XLVII. Las áreas de las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos.

XLVIII. Las figuras semejantes sólo se diferencian en las escalas a las que se construyen.

L. Método para medir la distancia a un lugar inaccesible.

LII. Un ángulo tiene por medida el arco de circunferencia que interceptan sus lados.

LIII. El círculo está dividido en 360 grados; cada grado se divide en 60 minutos, etc.

LIV. El ángulo recto tiene 90 grados y sus lados son perpendiculares uno al otro.

LV. Un ángulo agudo es menor que un ángulo recto.

LVI. Un ángulo obtuso es mayor que un ángulo recto.

LVII. La suma de los ángulos dibujados al mismo lado sobre una línea recta y con el mismo vértice es igual a 180 grados.

LVIII. Todos los ángulos que se puede dibujar alrededor de un mismo punto son iguales, tomados en su conjunto, a cuatro rectos.

LIX. Uso del instrumento llamado semicírculo para medir la amplitud de un ángulo.

LX. Uso del transportador para construir un ángulo de un número determinado de grados.

LXIII. Los ángulos alternos son los ángulos invertidos que forma, a una y otra parte, una línea recta que corta a dos paralelas. Estos ángulos son iguales.

LXIV La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.

LXVIII. Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos.

LXIX. Un ángulo de un triángulo isósceles determina los otros dos.

LXX. Los ángulos de un triángulo equilátero son cada uno de sesenta grados.

LXXI. Descripción del hexágono.

LXXII. La mitad del ángulo central del hexágono determina el ángulo central del dodecágono.

LXXIII. Dividir un ángulo en dos partes iguales.

LXXIV. Descripción de los polígonos de 24, 48, etc. lados.

LXXV. Descripción del octógono y de los polígonos de 16, 32, etc. lados.

SEGUNDA PARTE

Del método geométrico para comparar figuras rectilíneas.

I. Dos rectángulos que tienen la misma altura están en la misma razón que sus bases.

V. Método para transformar un rectángulo en otro equivalente[1] que tenga una altura dada.

VI. Segundo método para transformar un rectángulo en otro equivalente que tenga una altura dada.

[1] Dos figuras son equivalentes cuando tienen la misma área (Nota de los traductores).

VII. Se demuestra rigurosamente que si dos rectángulos son equivalentes, entonces la base del primero es a la base del segundo como la altura del segundo es a la altura del primero.

VIII. Si cuatro líneas son tales que la primera es a la segunda como la tercera a la cuarta, entonces el rectángulo formado por la primera y la cuarta es equivalente al determinado por la segunda y la tercera.

IX. Cuatro cantidades tales que la primera es a la segunda como la tercera a la cuarta se dice que forman una proporción.

X. De los cuatro términos de una proporción, el primero y el cuarto se llaman extremos. El segundo y tercero se llaman medios.

XI. En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

XII. Si el producto de los extremos es igual al producto de los medios, los cuatro términos forman una proporción.

XIII. De aquí se sigue la regla de tres, o el procedimiento para encontrar el cuarto término de una proporción si se dan los tres primeros.

XVI. Construir un cuadrado doble de otro.

XVII. Construir un cuadrado equivalente a la suma de otros dos.

XVIII. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es su lado mayor. Y el cuadrado de este lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

XIX. De dónde se sigue un método sencillo para reducir dos cuadrados a uno solo.

XX. Si los lados de un triángulo rectángulo sirven de bases a tres figuras semejantes, la figura construida sobre la hipotenusa es equivalente a las otras dos tomadas conjuntamente.

XXI. Reducir varias figuras semejantes a una sola.

XXIII. El producto que resulta de la multiplicación de un número por sí mismo es el cuadrado de este número. La raíz de un cuadrado es el número que multiplicado por sí mismo produce el cuadrado.

XXIV. Un número es múltiplo de otro cuando lo contiene exactamente varias veces. El lado de un cuadrado y su diagonal son inconmensurables.

XXV. Otras líneas inconmensurables.

XXVII. Los triángulos y las figuras semejantes tienen sus lados proporcionales, incluso si éstos son inconmensurables.

XXVIII. Y estas figuras están siempre entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.

TERCERA PARTE

De la medida de las figuras circulares y de sus propiedades.

I. El área del círculo es el producto de su circunferencia por la mitad de su radio.

II. El área del círculo es igual a la de un triángulo cuya altura es el radio y cuya base es una recta igual a la circunferencia.

IV. Si el diámetro de un círculo tiene siete partes, la circunferencia tiene aproximadamente 22 [2].

V. Las circunferencias de los círculos están entre sí como sus radios.

VI. Las áreas de los círculos son proporcionales a los cuadrados de sus radios.

VII. De los tres círculos que tienen como radios los tres lados de un triángulo rectángulo, el que corresponde a la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

VIII. Una corona es el espacio comprendido entre dos círculos concéntricos. Para medir el área de una corona es necesario multiplicar su ancho por la circunferencia media.

IX. El segmento circular es un espacio limitado por un arco y su cuerda. La medida de todas las figuras circulares se reduce a la del segmento.

X. El sector es una porción de círculo limitada por dos radios y por el arco que comprenden. Su medida y la del segmento.

XI. Encontrar el centro de un arco de círculo cualquiera.

XIII. Si desde un punto cualquiera de la circunferencia de un semicírculo se trazan dos rectas a los extremos del diámetro, se obtiene un triángulo rectángulo.

XV. Todos los ángulos cuyo vértice está en la circunferencia y se apoyan en el mismo arco son iguales y tienen por medida común la mitad del arco sobre el que se apoyan.

---

[2] Esta aproximación equivale a tomar como valor de π la fracción $\frac{22}{7}$ (Nota de los traductores).

XVIII. La tangente a la circunferencia es la línea que la toca en un solo punto. El ángulo semiinscrito[3] es el formado por la cuerda y por la tangente. Su medida es la mitad del arco del segmento.

XIX. La tangente es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de tangencia.

XXI. Arco capaz de un ángulo dado. Procedimiento para construir el arco capaz de un ángulo dado.

XXII. Determinar la distancia de un lugar a otros tres cuyas posiciones son conocidas.

XXIII. Si dos cuerdas se cortan en un punto del círculo, entonces el rectángulo determinado por las partes de una es equivalente al rectángulo determinado por las partes de la otra.

XXIV. El cuadrado de una perpendicular cualquiera al diámetro de un círculo es equivalente al rectángulo determinado por las dos partes del diámetro.

XXV. Transformar un rectángulo en un cuadrado.

XXVI. Media proporcional entre dos líneas rectas. Método para encontrarla.

XXVII. Otro procedimiento.

XXVIII. Transformar una figura rectilínea en un cuadrado.

XXX. Construir un cuadrado que esté con otro en una razón dada.

XXXI. Construir un polígono que esté en una razón dada con un polígono semejante.

XXXII. Dibujar un círculo que esté en una razón dada con otro.

XXXIII. Si desde un punto tomado fuera de un círculo se trazan dos líneas que lo corten, los rectángulos determinados por dichas rectas y sus partes exteriores serán equivalentes.

XXXIV. El cuadrado de la tangente es equivalente al rectángulo determinado por una secante y por su parte exterior.

XXXV. Desde un punto exterior a un círculo trazar una tangente.

---

[3]Para referirse al ángulo semiinscrito Clairaut utiliza el término *angle au segment* (Nota de los traductores).

CUARTA PARTE

De la manera de medir los sólidos y sus superficies.

I. El cubo es una figura sólida limitada por seis cuadrados. Es la medida común de los sólidos.

II. El paralelepípedo es un sólido limitado por seis rectángulos. Los planos paralelos son los que conservan entre sí la misma distancia.

III. Volumen del paralelepípedo.

IV. Los paralelepípedos se generan por un rectángulo que se mueve paralelamente a sí mismo.

V. La línea perpendicular a un plano es la que no se inclina hacia ningún lado sobre el plano. Puede decirse algo similar del plano perpendicular a otro plano.

VI. La línea perpendicular a un plano es perpendicular a todas las líneas del plano que parten del punto en que la línea corta al plano.

VIII. Método simple para levantar o bajar perpendiculares a los planos.

IX. Una línea es perpendicular a un plano, si es perpendicular a dos líneas de dicho plano que pasen por el punto en el que lo corta.

X. Procedimiento para levantar un plano perpendicular a otro.

XI. Trazar un plano paralelo a otro.

XII. Medir la inclinación de un plano sobre otro.

XIII. Medir la inclinación de una línea sobre un plano.

XIV. Nuevo procedimiento para bajar una perpendicular a un plano dado.

XV. Segundo método para levantar una línea perpendicular a un plano dado.

XVI. El prisma recto es una figura sólida cuyas dos bases opuestas son polígonos iguales y las otras caras son rectángulos.

XVII. Formación de los prismas rectos.

XIX. Dos prismas que tienen las bases iguales están en la misma razón que sus alturas.

XX. Dos prismas que tienen la misma altura están en la misma razón que sus bases.

XXI. El volumen del prisma recto es el producto de su base por su altura.

XXII. Los prismas oblicuos difieren de los rectos en que las caras que son rectángulos en éstos son paralelogramos en aquéllos.

XXIII. Formación de los prismas oblicuos.

XXIV. Los prismas oblicuos tienen el mismo volumen que los prismas rectos siempre que tengan la misma base y la misma altura.

XXV. Les sucede lo mismo a los paralelepípedos oblicuos con respecto a los rectos.

XXVI. Las pirámides son cuerpos limitados por un cierto número de triángulos que salen de un mismo vértice y terminan en una base poligonal cualquiera.

XXVII. Las pirámides reciben el nombre de sus bases.

XXVIII. Se dividen en pirámides rectas y oblicuas.

XXXII. En qué consiste la semejanza de dos pirámides.

XXXVII. Las pirámides que tienen la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

XXXVIII. Dos pirámides también tienen el mismo volumen si, teniendo la misma altura, sus bases, sin ser polígonos semejantes, tienen la misma área.

XXXIX. Las pirámides que tienen la misma altura están entre sí como sus bases.

XLII. El volumen de una pirámide cualquiera es el producto de su base por el tercio de su altura.

XLIII. La pirámide es la tercera parte del prisma que tiene la misma base y la misma altura.

XLV. El cilindro es un sólido limitado por dos bases opuestas y paralelas, que son dos círculos iguales, y por un plano plegado alrededor de sus circunferencias. Los cilindros se dividen en rectos y oblicuos.

XLVI. Formación del cilindro.

XLVII. La superficie curva del cilindro recto es igual a un rectángulo que tiene la misma altura y cuya base es igual a la circunferencia.

XLIX. Los cilindros que tienen la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

L. El volumen de un cilindro cualquiera es el producto de su base por su altura.

LI. El cono es una especie de pirámide cuya base es un círculo.

LII. Se dividen en conos rectos y oblicuos.

LIII. El área lateral de un cono recto se mide multiplicando la mitad de su generatriz[4] por la circunferencia de su base.

LIV. El desarrollo de un cono es un sector circular.

LVI. Los conos que tienen la misma base y la misma altura tienen el mismo volumen.

LVII. Su volumen es el producto de la base por el tercio de la altura.

LIX. Método para calcular el área de un tronco de cono.

LX. La esfera es el cuerpo cuya superficie tiene todos sus puntos equidistantes del centro.

LXV. La superficie de la esfera tiene por área el producto de su diámetro por la circunferencia de su círculo máximo.

LXVI. Qué es un segmento esférico y cómo se mide su superficie.

LXVII. El área de la superficie esférica es igual al área lateral del cilindro circunscrito.

LXVIII. Las secciones de cilindro y de esfera tienen la misma superficie.

LXIX. El área de la superficie esférica es igual a cuatro veces la de su círculo máximo.

LXX. El volumen de la esfera es el producto del tercio de su radio por cuatro veces el área del círculo máximo.

LXXI. El volumen de la esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

LXXII. Medida del volumen de un segmento esférico.

LXXIII. En qué consiste la semejanza de dos cuerpos limitados por planos.

LXXIV. Condiciones que determinan la semejanza de dos cilindros rectos.

LXXV. Condiciones que determinan la semejanza de dos cilindros oblicuos.

LXXVI. Condiciones que determinan la semejanza de dos conos.

LXXVII. Condiciones que determinan la semejanza de dos troncos de cono.

LXXVIII. Las esferas, los cubos y todas las figuras que sólo dependen de una línea son semejantes.

---

[4] Clairaut llama “lado” a la generatriz del cono (Nota de los traductores).

LXXIX. En general, los sólidos semejantes sólo difieren en las escalas en que están construidos.

LXXX. Las áreas de los sólidos semejantes, están entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.

LXXXI. Las áreas de las superficies esféricas están entre sí como los cuadrados de sus radios.

LXXXIII. Los sólidos semejantes están entre sí como los cubos de sus lados homólogos.

LXXXIV. Las esferas están entre sí como los cubos de sus radios.

Fin de la Tabla.

PREFACIO

Por más que la Geometría sea por sí misma abstracta, es preciso reconocer no obstante que las dificultades que tienen los que comienzan a dedicarse a ella proceden frecuentemente de la forma en que ha sido enseñada en los Elementos ordinarios. Siempre se empieza con un gran número de definiciones, de postulados, de axiomas y de principios preliminares que parecen no prometer nada más que algo árido al lector. Las proposiciones que vienen a continuación, al no fijar el espíritu sobre los temas más interesantes, y siendo por otra parte difíciles de entender, provocan comúnmente que los principiantes se cansen y las rechacen antes de tener una idea clara de lo que se les quiere enseñar.

Es cierto que para salvar esta aridez, añadida de un modo natural al estudio de la Geometría, algunos autores han puesto detrás de cada proposición esencial el uso que de ella puede hacerse en la práctica. Pero con ello prueban la utilidad de la Geometría sin facilitar los medios para aprenderla. Porque, al estar cada proposición delante de su uso, el espíritu sólo recuerda las ideas sensibles después de haber sufrido las fatigas de aprehender las ideas abstractas.

Algunas reflexiones que he hecho sobre el origen de la Geometría me han dado la esperanza de evitar estos inconvenientes, uniendo las dos ventajas de interesar y de aclarar los Principios.

He pensado que esta ciencia, como todas las demás, debe haberse formado gradualmente, que ha sido alguna necesidad la que verdaderamente ha obligado dar los primeros pasos, y que estos primeros pasos no puedan quedar fuera del alcance de los principiantes, puesto que fueron ellos los que los dieron.

Prevenido por esta idea, he propuesto remontarme a lo que pudo haber sido el nacimiento de la Geometría e intentar desarrollar sus principios por un método natural del que se pueda asumir que fue el mismo que el de sus primeros inventores. Sólo he procurado evitar aquellas falsas tentativas que ellos tuvieron la necesidad de hacer.

La medición de las tierras me ha parecido lo más apropiado para hacer surgir las primeras proposiciones de Geometría. Este es, en efecto, el origen de esta ciencia, porque Geometría significa “medida de la Tierra”.

Algunos autores pretenden que los egipcios, viendo los límites de sus heredades continuamente destruidos por los desbordamientos del Nilo, establecieron los primeros fundamentos de la Geometría buscando los medios para fijar exactamente la situación, la extensión y la forma de sus propiedades. Pero, aun cuando no se traigan a colación estos autores, no se puede dudar que, desde los primeros tiempos, los hombres buscaron métodos para medir y para repartir sus tierras.

Queriendo perfeccionar estos métodos, las investigaciones particulares les condujeron poco a poco a investigaciones generales y, estando dispuestos a conocer la relación exacta entre toda clase de medidas, dichas investigaciones dieron lugar a una ciencia mucho más vasta que la que en un principio habían previsto y de la cual conservaron el nombre.

Para seguir en esta obra un camino semejante al de los inventores, primeramente pretendo hacer descubrir a los aprendices los principios de los que puede depender la simple medida de las tierras, de las distancias accesibles o inaccesibles, etc. Por otra parte, considero otras investigaciones, tan análogas a las primeras, que la curiosidad común a todos los hombres les lleva a detenerse en ellas. A continuación, justificando esta curiosidad con algunas aplicaciones útiles, vengo a examinar los aspectos más interesantes de la Geometría elemental.

Creo que se puede estar de acuerdo en que este método sea, cuando menos, el más apropiado para animar a aquellos que podrían ser rechazados por la aridez de las verdades geométricas privadas de sus aplicaciones. Además, espero que tendrá una utilidad más importante: que acostumbrará al espíritu a buscar y a descubrir, porque evito conscientemente dar algunas proposiciones en forma de teoremas; es decir, proposiciones en las que se demuestra tal o cual verdad, sin mostrar cómo se ha llegado a su descubrimiento.

Si los primeros autores de Matemáticas han presentado sus descubrimientos en forma de teoremas, ha sido sin duda para dar un aire más maravilloso a sus producciones o para evitar el esfuerzo de retomar la sucesión de ideas que les han guiado en sus investigaciones. Sea lo que fuere, me ha parecido más apropiado ocupar continuamente a mis lectores en la resolución de problemas; es decir, en buscar los medios para alguna operación, o en descubrir alguna verdad desconocida, determinando la relación que hay entre las magnitudes dadas y las desconocidas que se pretende encontrar.

Siguiendo esta vía, los principiantes se darán cuenta de que en cada paso se les hace seguir el razonamiento del inventor; y, de cuando en cuando, podrán adquirir más fácilmente el espíritu de la invención.

Se me reprochará quizás, en algunas cuestiones de estos Elementos, el referirme demasiado al testimonio de los ojos y no atenerme bastante a la exactitud rigurosa de las demostraciones.

Ruego a aquellos que podrían hacerme semejante reproche, que observen que no paso ligeramente más que sobre las proposiciones cuya verdad se descubre por poca atención que se preste. Yo hago uso de la suerte, sobre todo en los comienzos donde se encuentran más frecuentemente proposiciones de este género, porque he notado que los que tienen disposición para la Geometría se complacen en ejercer un poco su espíritu; y que, por el contrario, se desaniman cuando se les abruma con demostraciones, por así decir, inútiles

Que Euclides se tomase la molestia de demostrar que dos círculos que se cortan no tienen el mismo centro o que, en un triángulo inscrito en otro, la suma de sus lados es menor que la suma de los lados del triángulo en el que se encuentra inscrito, no resulta sorprendente. Esta Geometría tenía que convencer a los sofistas obstinados, que se vanagloriaban en rehusar las verdades más evidentes. Entonces era necesario que la Geometría, como la Lógica, tuviese la ayuda de esos razonamientos formales para tapar la boca a los necios.

Pero las cosas han cambiado mucho. Todo razonamiento que incide sobre lo que el buen sentido decide por sí solo, es siempre pura pérdida de tiempo y sólo sirve para obscurecer la verdad y para hastiar a los lectores.

Otro reproche que se me puede hacer es el de haber omitido diferentes proposiciones que encuentran su lugar en los Elementos ordinarios y contentarme, cuando trato de proposiciones, con dar solamente los principios fundamentales.

A esto respondo que en este Tratado se encuentra todo lo que puede servir para realizar mi proyecto: que las proposiciones que rechazo son aquéllas que no pueden ser de utilidad alguna por sí mismas, y que además no contribuyen a facilitar la comprensión de aquellas en las que interesa instruirse. Respecto a las proporciones, lo que digo debe ser suficiente para hacer entender las proposiciones elementales en que se basan. Es una materia que trataré más a fondo en los Elementos de Álgebra, que daré a continuación.

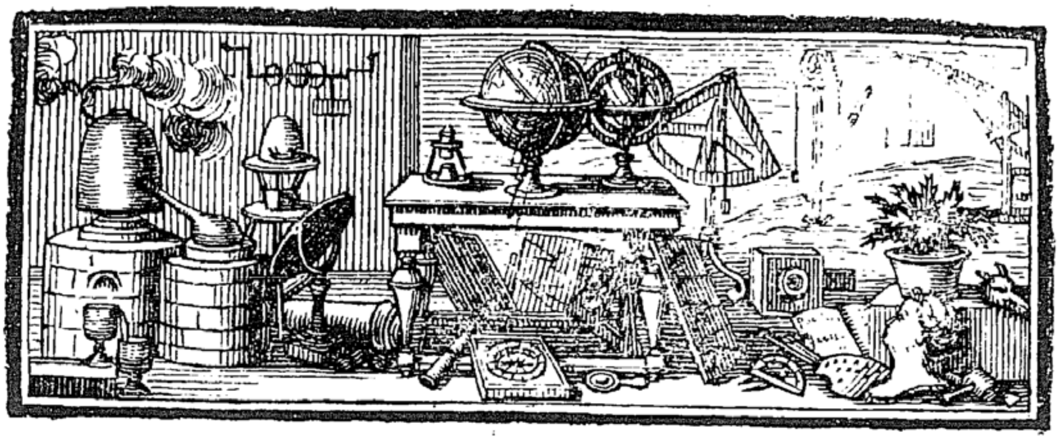
En fin, como he elegido la medida de los terrenos para interesar a los principiantes, no debo temer que se confundan estos Elementos con los Tratados ordinarios de Agrimensura. Este pensamiento no se les puede ocurrir a aquellos que consideren que la medida de los terrenos no es el verdadero objetivo de este libro, sino que sólo me sirve de excusa para hacer descubrir las principales verdades geométricas.

También hubiese podido remontarme a estas verdades sirviéndome de la Historia de la Física, de la Astronomía o de cualquier otra parte de las Matemáticas que hubiese querido escoger; pero, entonces, la multitud de ideas extrañas de las que hubiese necesitado ocuparme habrían asfixiado las ideas geométricas a las que únicamente debo llevar el espíritu del Lector.

Extracto de los Registros de la Academia Real de Ciencias, del 31 de Agosto de 1740.

Señores de Reaumur, de Mairan y Nicole, que habiendo sido nombrados para examinar los Elementos de Geometría de M. Clairaut, habiendo remitido su informe, la Compañía ha juzgado que esta obra es merecedora de la impresión, en fe de lo cual he firmado el presente Certificado. En Paris, 14 de Diciembre de 1740.

Firmado: Fontenelle, Secretario perpetuo de la Academia Real de Ciencias.



ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

PRIMERA PARTE

El procedimiento más natural, de entre todos los que hay, para lograr la medida de terrenos.

Lo que parece que se ha debido medir desde un principio son las longitudes y las distancias.

I

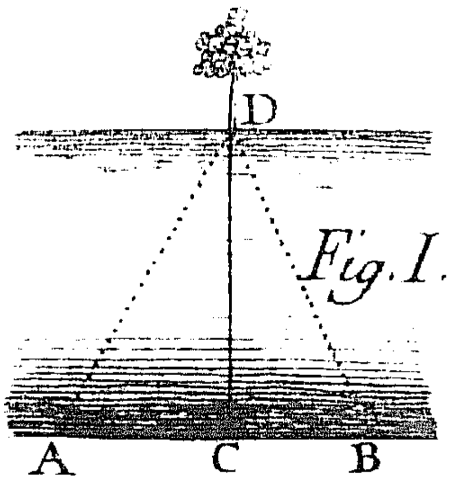
Para medir una longitud cualquiera, el procedimiento que proporciona una especie de Geometría natural es el de comparar la longitud de una medida conocida con la longitud que se quiere conocer.

II

En lo que respecta a la distancia, para medir la que hay entre dos puntos es necesario trazar una línea recta desde uno hasta el otro y llevar sobre esa línea la medida conocida. Porque todas las otras líneas, al hacer necesariamente un rodeo más o menos grande, son más largas que la línea recta, que no hace ninguno.

III

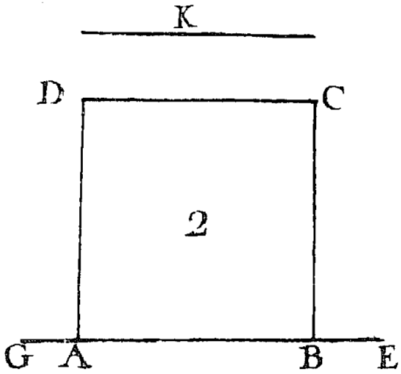
Por otra parte, la necesidad de medir la distancia de un punto a otro se presenta frecuentemente cuando se precisa medir la distancia de un punto a una línea. Por ejemplo, un hombre situado en D, sobre la orilla de un río, se propone saber cuánto hay desde ese lugar en el que se encuentra hasta la otra orilla AB. Resulta claro que, en este caso, para medir la distancia buscada es necesario tomar la más corta de todas las líneas rectas DA, DB, etc. que se pueden trazar desde el punto D a la recta AB.

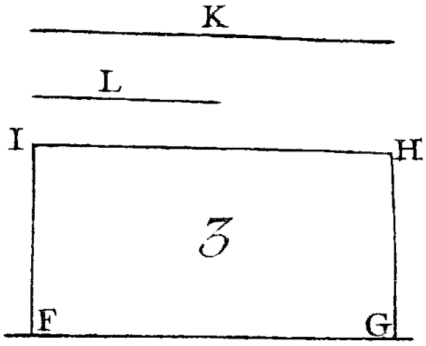


Es fácil de ver que esta línea, la más corta que se necesita, es la línea DC que no se inclina hacia A ni hacia B. Sobre esta línea, a la que se ha dado el nombre de perpendicular, debe llevarse la medida conocida para obtener la distancia DC, del punto D a la recta AB. Pero se ve también que para poner esta medida sobre la línea DC es preciso que esta línea se trace previamente. Por ello, es necesario que se disponga de un método para trazar estas perpendiculares.

IV

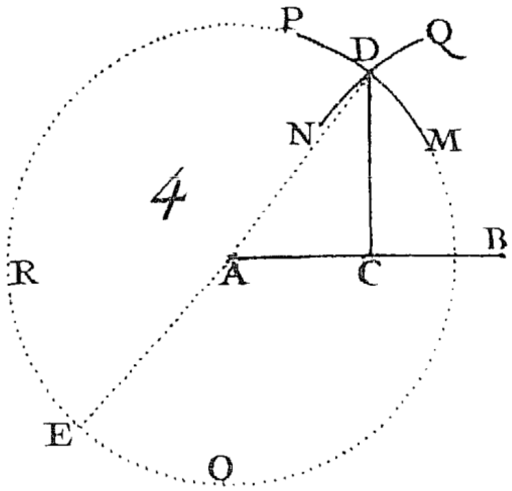
Se tiene la necesidad de trazarlas en muchas otras ocasiones. Por ejemplo, la regularidad de figuras tales como ABCD, FGHI, llamadas rectángulos y compuestas por cuatro lados perpendiculares los unos a los otros, invita a dar sus formas a las casas, a sus interiores, a los jardines, a las habitaciones, a los lados de las murallas, etc. La primera de estas figuras, ABCD, cuyos cuatro lados son iguales se llama comúnmente cuadrado. La otra, FGHI, que no tiene más que sus lados opuestos iguales, se llama rectángulo.





V

En las diferentes situaciones que exigen el trazado de perpendiculares, se trata de bajar una perpendicular a una línea desde un punto exterior o de levantar una perpendicular a una línea desde un punto situado sobre ella.



Si desde el punto C, tomado sobre la línea AB, se quiere levantar la línea CD perpendicular a AB será necesario que esta línea no se incline ni hacia A ni hacia B.

Suponiendo, en primer lugar, que C esté a la misma distancia de A que de B y que la recta CD no se incline a ningún lado, está claro que cada uno de los puntos de esta línea estará igualmente separado de A y de B; bastará con encontrar un punto cualquiera D, tal que su distancia al punto A sea igual a su distancia al punto B. Entonces, trazando por C y por ese punto una línea recta CD, esta línea será la perpendicular pedida.

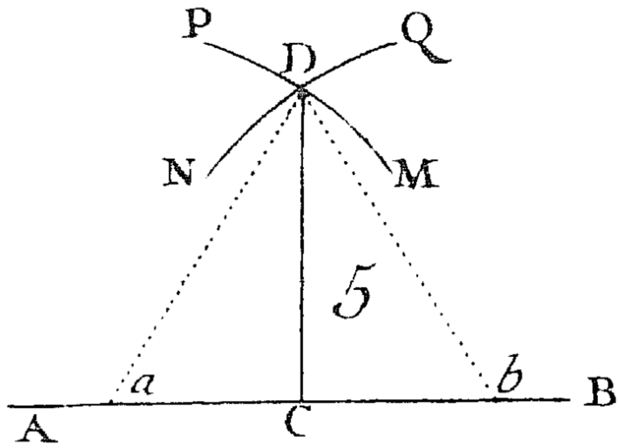
Para obtener el punto D se podría proceder por tanteo; pero el tanteo no satisface al espíritu, éste necesita un método que esclarezca. Helo aquí.

Toma una medida común, una cuerda, por ejemplo, o un compás con una abertura determinada, según estés trabajando sobre el terreno o sobre el papel.

Tomada esta medida, fija sobre el punto A el extremo de la cuerda o la punta del compás y haciendo girar la otra punta, o el otro extremo de la cuerda, traza el arco PDM. Después, sin cambiar de medida, procede del mismo modo con relación al punto B y describe el arco QDN que, cortando al primero en el punto D, determinará el punto buscado.

Puesto que el punto D pertenecerá igualmente a los dos arcos PDM y QDN descritos por medio de una medida común, su distancia al punto A será igual a su distancia al punto B. Por consiguiente CD no se inclinará ni hacia A ni hacia B. Entonces esta línea será perpendicular a AB.

Si el punto C no se encuentra a igual distancia de A y de B, es necesario tomar otros dos puntos *a* y *b*, igualmente distantes de C y, sirviéndose de ellos, en lugar de A y de B, describir los arcos PDM y QDN.



VI

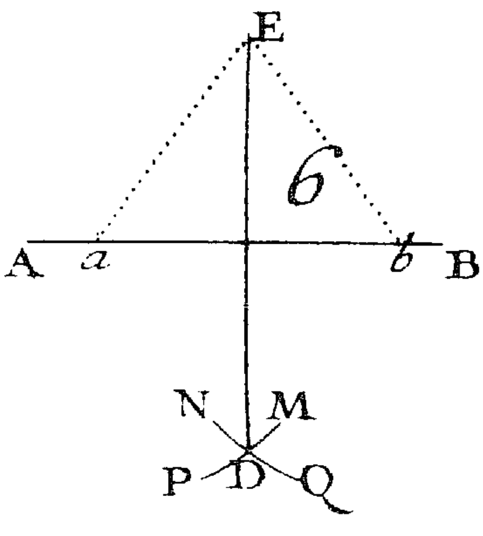
Si uno de los arcos, por ejemplo el PDM, se prolonga hasta O, E, R, etc. de modo que vuelva al punto P en donde empezó, entonces la línea entera se llamará circunferencia del círculo, o simplemente círculo.

Cuando sólo se traza una parte PDM de la circunferencia, esta parte se llama arco del círculo. El punto fijo A es su centro, o el del círculo; y el intervalo AD, su radio.

Toda línea, como la DAE, que pasa por el centro A y que se termina en la circunferencia se llama diámetro. Es evidente que esta línea es doble del radio, lo que hace que el radio se suela llamar semidiámetro.

VII

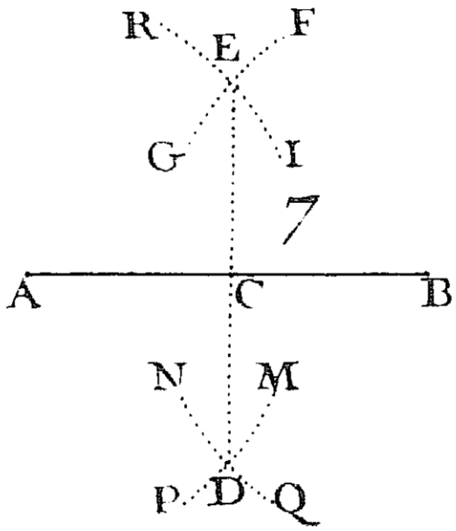
El procedimiento para levantar una perpendicular a una línea AB se apoya en el de bajar una perpendicular desde un punto cualquiera E, exterior a esta línea.



En efecto. Si se fija en E el extremo de un hilo o la punta de un compás, y con una misma abertura E *b* se marcan dos puntos *a* y *b* sobre la línea AB, se buscará, como en el artículo precedente, otro punto D cuya distancia a los puntos *a* y *b* sea la misma. Por este punto y por E se trazará la recta DE que, teniendo cada uno de sus extremos igualmente distantes de *a* y de *b,* y no inclinándose más hacia uno de estos puntos que hacia el otro, será perpendicular a AB.

VIII

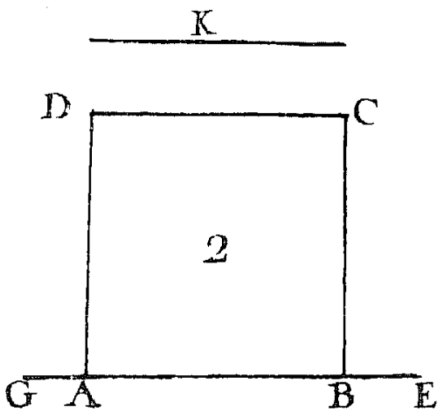
Del procedimiento anterior se sigue la solución de un nuevo problema.



Se trata de dividir una línea recta AB en dos partes iguales. Desde los puntos A y B, tomados como centros, y con una abertura de compás cualquiera, se describen los arcos REI y GEF. A continuación, desde los mismos centros, y con la misma u otra abertura del compás, se describen los arcos PDM y QDN. Entonces, la línea ED que une los puntos de intersección E y D corta a AB en dos partes iguales en el punto C.

IX

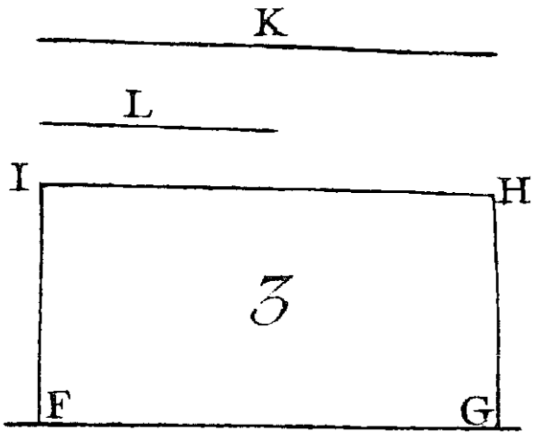
Habiendo encontrado la manera de trazar perpendiculares, nada es más fácil que servirse de ello para construir las figuras que se llaman rectángulos y cuadrados, de las que ya hemos hablado en el artículo IV.



Se observa que para construir un cuadrado ABCD, cuyos lados sean iguales a la línea dada K, es preciso tomar un segmento AB, igual a K, sobre la recta GE. A continuación, levantar las perpendiculares AD y BC, cada una igual a K, desde los puntos A y B (Artículo V). Por último, trazar DC.

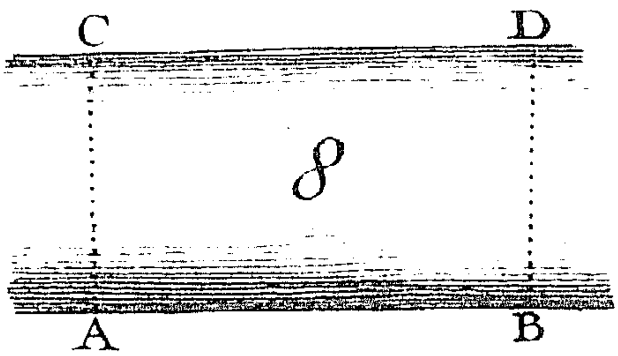
X

Si se quiere dibujar un rectángulo FGHI, cuya altura sea K y cuya anchura sea L, se hace FG igual a K; a continuación, se levantan las perpendiculares FI y GH, cada una igual a L. Por último, se traza HI.



XI

En la construcción de obras, como murallas, canales, calles, etc. hay necesidad de trazar líneas paralelas; es decir, líneas cuya posición es tal que sus intervalos siempre tienen por medida perpendiculares de la misma longitud. Para trazar estas paralelas nada parece más natural que recurrir al método del que se sirve para dibujar rectángulos.



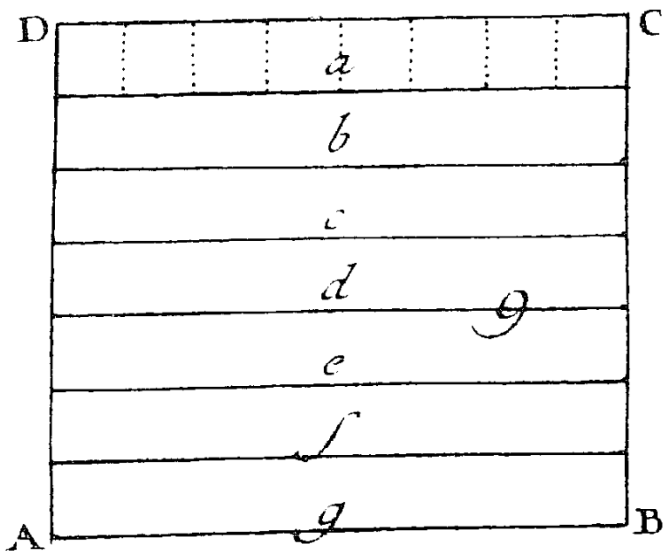
Por ejemplo, sea AB uno de los lados de algún canal, o de alguna muralla, etc., al que se quiere dar la anchura CA; o, para enunciar la cuestión de una manera más geométrica y más general, supongamos que se quiere trazar por C la paralela CD a AB. Se toma un punto cualquiera B de la línea AB y se procede del mismo modo que si teniendo la base AB se quisiera dibujar un rectángulo ABDC que tuviese AC por altura. Entonces, prolongando las líneas CD y AB hasta el infinito siempre serán paralelas, o, lo que viene a ser lo mismo, no se encontrarán jamás.

La frecuencia con que se utilizan las figuras rectangulares, debido a su regularidad, hace necesario conocer su área. Se trata, por ejemplo, de calcular cuánta tapicería se necesita para una habitación, o cuántos arpens[1] debe tener el cercado rectangular de una casa, etc.

Se sabe que, para llegar a este tipo de determinaciones, el medio más simple y más natural es utilizar una medida común que, aplicada varias veces sobre la superficie a medir, la cubra por completo. Este método se parece al que hemos utilizado para determinar la longitud de las líneas.

Por otra parte, es evidente que la medida común de las superficies debe ser ella misma una superficie, por ejemplo, la de una toesa[2] cuadrada, de un pie[3] cuadrado, etc. Así, medir un rectángulo es determinar el número de toesas cuadradas o de pies cuadrados, etc. que contiene su superficie.

Consideremos un ejemplo para aliviar el espíritu.



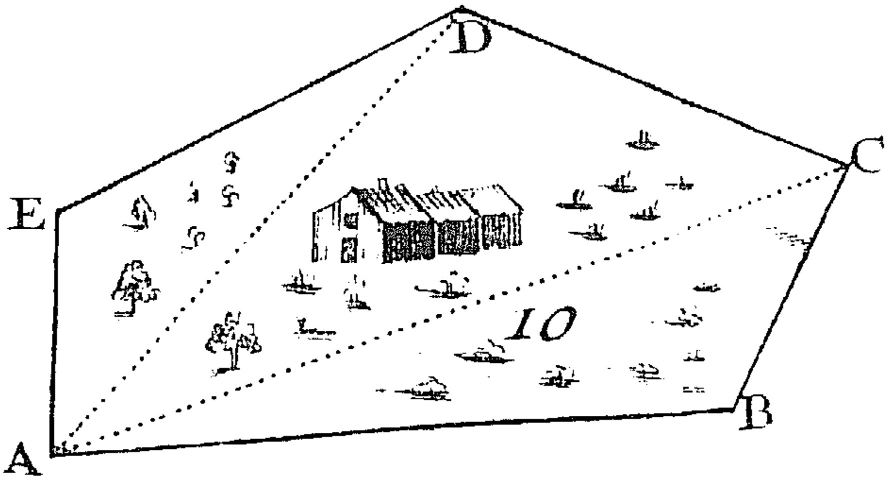
Supongamos que el rectángulo ABCD tiene siete pies de alto sobre una base de ocho pies. Se puede considerar este rectángulo como dividido en siete bandas -*a, b, c, d, e, f, g*- y que cada una contiene ocho pies cuadrados; el área del rectángulo será pues siete veces ocho pies cuadrados, o sea, 56 pies cuadrados.

Ahora, si se retrocede a los primeros elementos del cálculo aritmético, y se recuerda que multiplicar dos números es tomar uno de ellos tantas veces como la unidad está contenida en el otro, se encuentra una perfecta analogía entre la multiplicación ordinaria y la operación por la que se mide un rectángulo. Se observa que multiplicando el número de toesas o de pies, etc. que mide su altura, por el número de toesas o de pies, etc. que mide la base, se determina la cantidad de toesas cuadradas o de pies cuadrados, etc. que contiene la superficie.

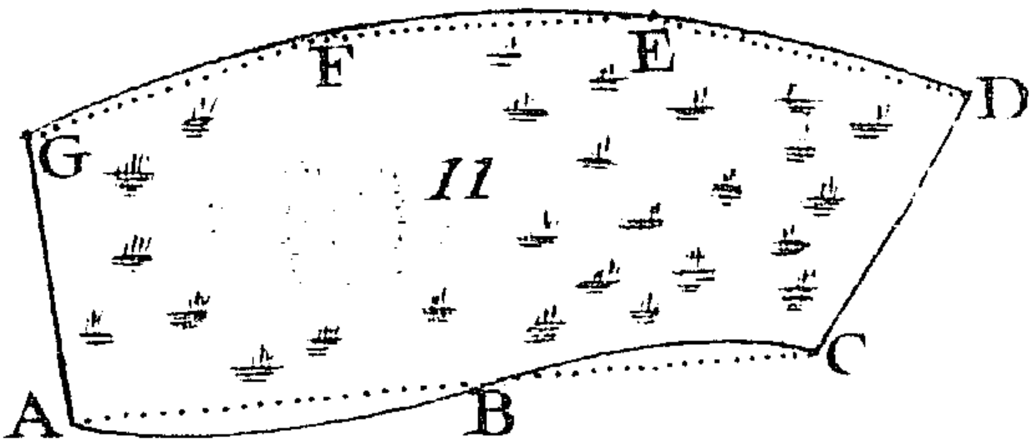
[1] Antigua medida agraria (Nota de los traductores).
[2] Antigua medida de longitud francesa que equivalía a 1.949 m (Nota de los traductores).
[3] 1 pie ≅ 32 cm (Nota de los traductores).

XIII

Las figuras que se han de medir no siempre son regulares como los rectángulos. Sin embargo, con frecuencia se tiene necesidad de obtener su medida. Unas veces se trata de determinar la extensión de una obra construida sobre un terreno que carece de regularidad, otras veces se quiere saber cuántos arpens contiene una tierra irregularmente limitada. Resulta pues necesario que al método para determinar el área de los rectángulos se añada el procedimiento para medir las figuras que no son rectangulares.



Ante todo se ve que, en la práctica, la dificultad sólo se presenta en la medida de figuras rectilíneas tales como ABCDE; es decir, figuras limitadas por líneas rectas. Si en el contorno del terreno aparecen algunas líneas curvas, como en la figura ABCDEFG, es evidente que estas líneas, divididas en tantas partes como sea necesario para evitar todo error sensible, se podrán tomar como un conjunto de líneas rectas.

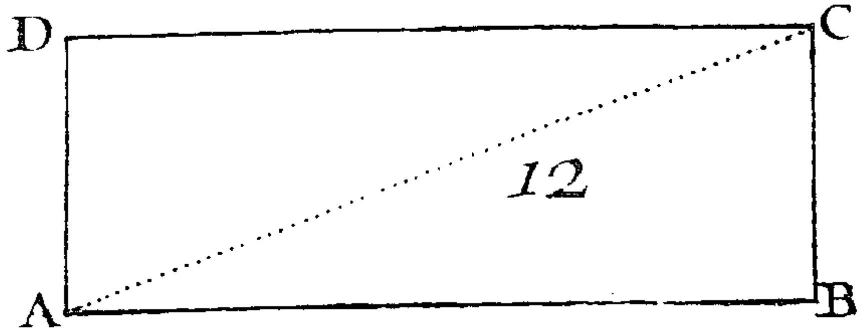


Dicho esto se observa que, a pesar de la infinita variedad de figuras rectilíneas, se pueden medir todas de la misma manera: dividiéndolas en figuras de tres lados, llamadas comúnmente triángulos. Esto se consigue, de la manera más simple y cómoda, si desde un punto cualquiera A del contorno de la figura ABCDE, se trazan las líneas rectas AC, AD, etc. a los puntos C, D, etc.

XIV

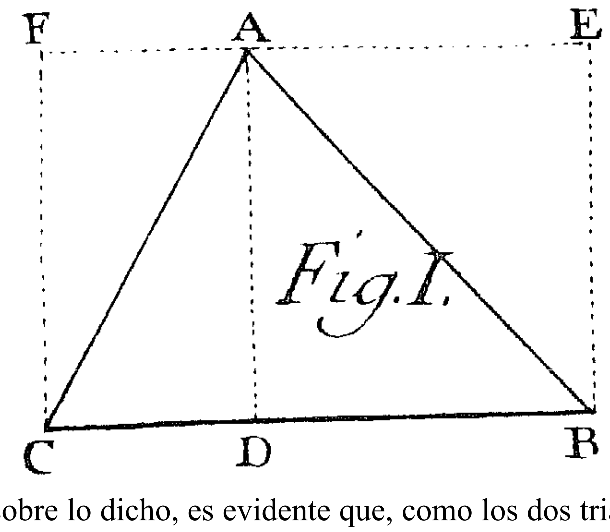
Sólo se tratará pues de conocer la medida de los triángulos que se hayan formado. Para encontrar lo que se ignora, el medio más seguro es buscar si en lo que se conoce hay algo que se relacione con lo que se quiere conocer.

Ya hemos visto que todo rectángulo ABCD es igual al producto de su base AB por la altura CB. Por otra parte, es fácil de ver que esta figura cortada transversalmente por la línea AC, llamada diagonal, se encuentra dividida en dos triángulos iguales. De ello se infiere que cada uno de estos triángulos será igual a la mitad del producto de su base AB o DC, por su altura CB o DA.



Esto es cierto cuando los triángulos que se quieren medir tienen dos de sus lados perpendiculares, como los triángulos ABC y ADC, que se llaman triángulos rectángulos; pero nada impide reducir cualquier tipo de triángulo a triángulos de esta especie.

Puesto que si desde el punto A, vértice de un triángulo cualquiera ABC, se baja la perpendicular AD, sobre la base BC, el triángulo ABC queda dividido en dos triángulos rectángulos ADB y ADC.

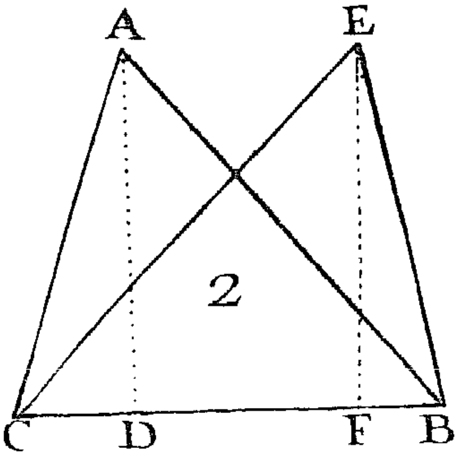


Volviendo sobre lo dicho, es evidente que, como los dos triángulos ADB y ADC son las mitades de los rectángulos AEBD y ADCF, el triángulo ABC propuesto será también la mitad del rectángulo EBCF, que tiene BC por base y AD por altura. Pero puesto que el área del rectángulo EBCF es igual al producto de la altura EB o AD por la base BC, el área del triángulo ABC es la mitad del producto de la base BC por la perpendicular AD, altura del triángulo.

Tenemos entonces la forma de medir los terrenos limitados por líneas rectas, dado que no se encuentra ninguno que no se pueda reducir a triángulos desde cuyos vértices se puedan bajar perpendiculares a sus bases.

XV

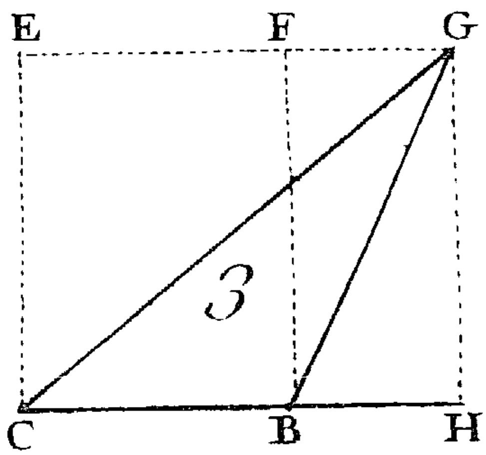
Dado que en el método que hemos presentado para medir el área de los triángulos sólo se emplea su base y su altura, sin tener en cuenta las longitudes de sus lados, enunciamos esta proposición o teorema: todos los triángulos, tales como ECB y ACB, que tienen una base común CB y cuyas alturas EF y AD son iguales, tienen la misma área.



XVI

Para facilitar la comprensión del principio que proporciona la medida de triángulos, hemos creído que sólo se debe escoger como base un lado sobre el que caiga la perpendicular bajada desde el vértice opuesto. Siempre se tiene la libertad de hacer esto cuando sólo se trata de la medida de terrenos.

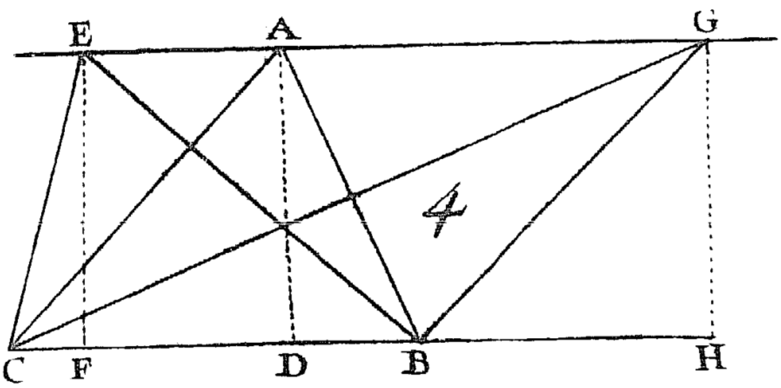
Pero parece que en la comparación de los triángulos que tienen la misma base, las perpendiculares bajadas desde sus vértices pueden caer fuera del triángulo, como en la figura 3. Es pues necesario establecer si los triángulos, tales como el BCG, están en el caso de los otros; es decir, si siempre son la mitad de rectángulos ECBF que tienen la perpendicular GH por altura.



Es fácil asegurarse de esto haciendo notar que el triángulo CGH, suma de los triángulos CGB y GBH, es la mitad del rectángulo ECHG, suma de los rectángulos ECBF y FBHG. Por tanto, los triángulos CGB y GBH, tomados en conjunto, valen la mitad del rectángulo ECHG. Por otra parte, el triángulo GBH es la mitad del rectángulo FBHG. Entonces, el triángulo CGB propuesto es la mitad del otro rectángulo ECBF, que tiene BC por base y GH por altura.

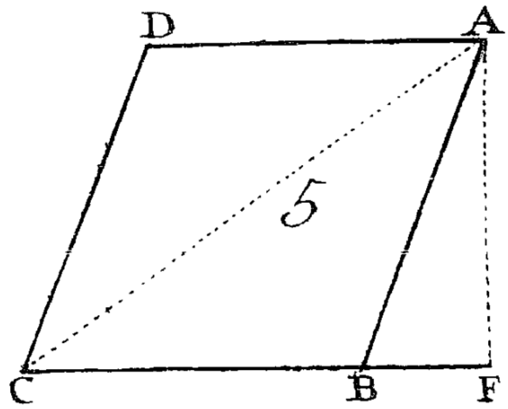
XVII

La proposición que hemos demostrado en los tres artículos precedentes puede enunciarse de forma general en los siguientes términos: los triángulos EBC, ABC y GBC son equivalentes cuando tienen una base común BC y están comprendidos entre las mismas paralelas EAG y CBH; es decir, cuando sus vértices E, A, G se encuentran en una misma línea recta EAG. Porque entonces (Artículo XI), sus alturas, medidas por las perpendiculares EF, AD y GH, son las mismas.



XVIII

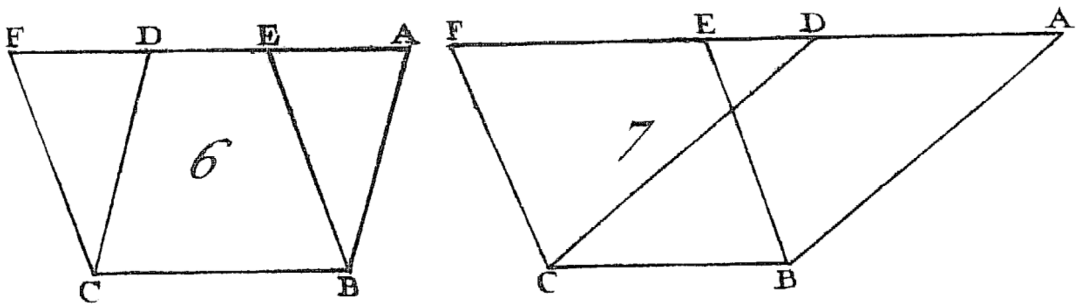
Entre las diferentes figuras rectilíneas que se pueden medir por el método precedente, las hay que se aproximan a la regularidad de los rectángulos. Son espacios tales como el ABCD, delimitados por cuatro lados, en los que cada uno es paralelo al lado opuesto.



Estas figuras se llaman paralelogramos y son más fáciles de medir que las otras figuras rectilíneas, excepto los rectángulos. Cuando se divide el paralelogramo ABCD en dos triángulos ABC y ACD, esos dos triángulos son iguales. Entonces, como cada uno de estos triángulos vale la mitad del producto de la altura AF por la base BC, el paralelogramo tiene como área el producto de la base BC por la altura AF.

XIX

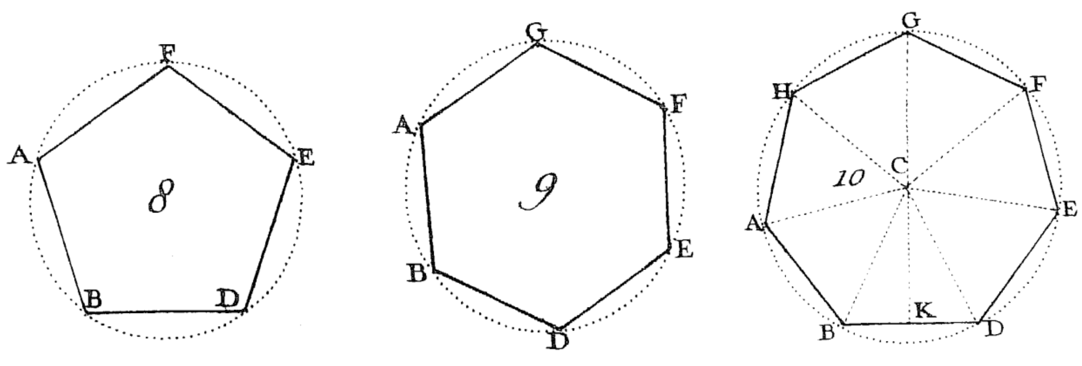
De ello se sigue que todos los paralelogramos ABCD y EBCF, que tienen una base común y se encuentran comprendidos entre las mismas paralelas, son equivalentes. Esto es fácil de ver, incluso independientemente de lo que precede, observando que el paralelogramo ABCD se convierte en el paralelogramo EBCF si se le añade el triángulo DCF o si, de la figura entera ABCF, se suprime el triángulo ABE. Suponiendo, pues, que los triángulos DCF y ABE son iguales resulta evidente que el paralelogramo ABCD no cambia al convertirse en el EBCF.



Para asegurarse de la igualdad de estos dos triángulos, basta con observar que, al ser AB y CD paralelos, así como BE y CF, el triángulo DCF no es otro que el triángulo ABE que desliza sobre la base; de forma que el punto A se convierte en el D, y el E en el F.

XX

Todavía hay otras figuras rectilíneas que son fáciles de medir y que se llaman polígonos regulares; es decir, figuras limitadas por lados iguales que tienen todos la misma inclinación unos sobre otros. Tales son las figuras ABDEF, ABDEFG y ABDEFGH.



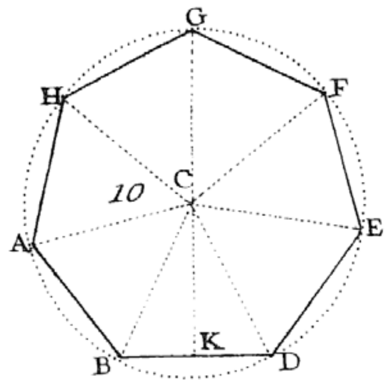
Como se acostumbra a dar la forma simétrica de estas figuras a los platos, a las fuentes, a las plazas públicas, etc. creo que, teniendo que aprender a medirlas, es necesario ver de qué manera se pueden trazar.

XXI

Se describe una circunferencia de círculo y se divide en tantas partes iguales como lados se quieran dar al polígono regular. A continuación, por los puntos de división de la circunferencia A, B, D, E, etc., se trazan las líneas AB, BD, DE, etc. y se obtiene el polígono buscado. Dicho polígono se llama pentágono, hexágono, heptágono, octógono, eneágono, decágono etc. según tenga cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, etc. lados.

XXII

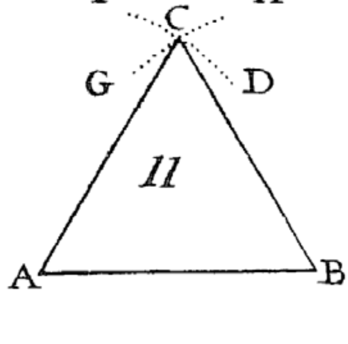
Para calcular el área de un polígono regular se podría emplear el método que hemos visto (Artículo XIII) para todas las figuras rectilíneas. Sin embargo, se descubre fácilmente que el más rápido es el de dividir el polígono en triángulos iguales que tengan todos el centro C por vértice.



Si se toma uno de estos triángulos, CBD por ejemplo, y se traza sobre la base BD la perpendicular CK, llamada apotema del polígono, entonces el área del triángulo es igual al producto de la base BD por la mitad de CK. Si se toma este producto tantas veces como lados tenga el polígono, obtenemos el área de la figura entera.

XXIII

Cuando sólo se divide la circunferencia en tres partes iguales se forma un triángulo que comúnmente se llama triángulo equilátero. Si se divide esta circunferencia en cuatro partes iguales, se forma un cuadrado. Estas dos figuras, las más simples de todos los polígonos, se pueden trazar fácilmente sin que sea necesario recurrir a la división de la circunferencia. Esto es lo que ya se ha visto (Artículo IX) para el cuadrado.



Por lo que atañe al triángulo equilátero, es fácil darse cuenta de que para describirlo sobre una base dada AB es necesario tomar los puntos A y B como centros y, con una abertura de compás igual a AB, trazar los arcos DCF y GCH. A continuación, desde los puntos A y B se trazan las líneas AC y BC al punto C, vértice del triángulo e intersección de los arcos DCF y GCH.

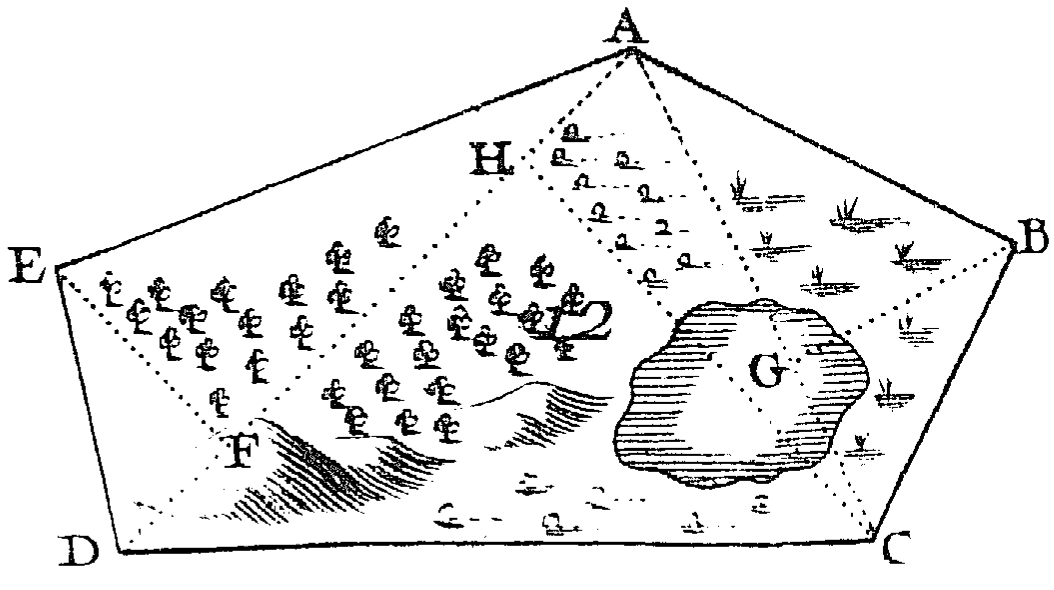
XXIV

Al método de describir geométricamente el triángulo equilátero y el cuadrado, los primeros de todos los polígonos, podría añadir el de trazar geométricamente un pentágono, tal como han hecho varios autores en los Elementos que nos han llegado. Pero dado que los principiantes, a los que nos dirigimos aquí, sólo advierten con esfuerzo el camino que ha debido seguir el espíritu para buscar la manera de trazar esta figura, camino que nos proporciona el Álgebra, nos creemos obligados a reenviar la descripción del pentágono al tratado que seguirá a éste. En él, esta descripción se añadirá a la de todos los demás polígonos que tengan un mayor número de lados y que, sin la ayuda del Álgebra, no podrían ser descritos geométricamente.

De los polígonos que tienen más de cinco lados, y que no pueden ser descritos más que por medio del cálculo algebraico, hay que exceptuar los de 6, 12, 24, 48, etc. lados y los de 8, 16, 32, 64, etc. lados, que se pueden describir fácilmente por los métodos que proporciona la geometría elemental, como se verá al final de esta primera parte.

XXV

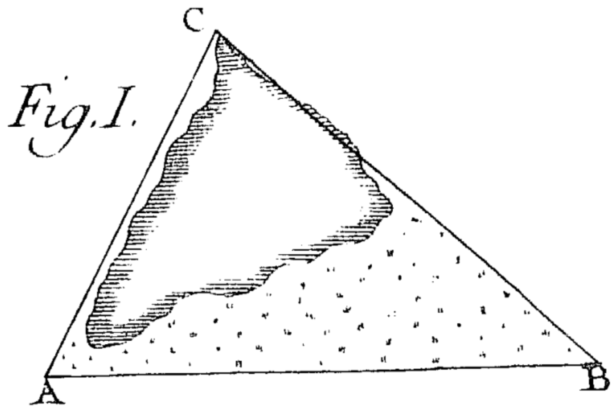
Volviendo a la medida de terrenos, vemos que los que se quieren medir son frecuentemente aquéllos que se resisten a las operaciones que prescriben los métodos precedentes.



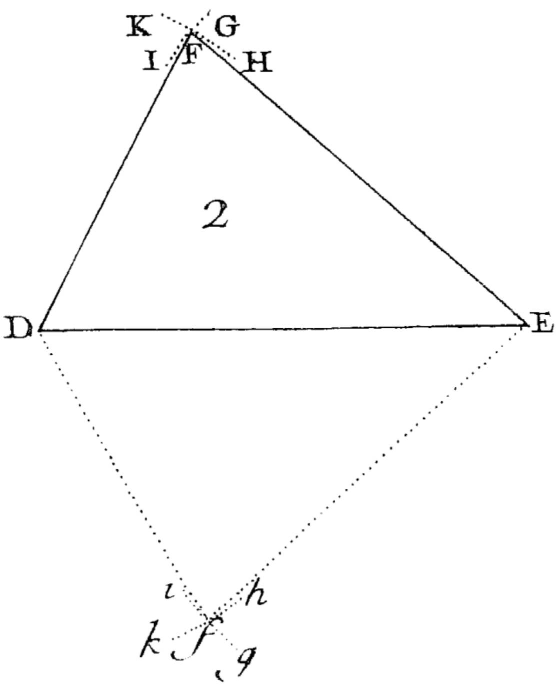
Supongamos que ABCDE es la figura de un campo, de un cercado, etc., del que se quiere conocer el área. Siguiendo lo que se ha visto, sería necesario dividir ABCDE en triángulos tales como ABC, ACD y ADE. A continuación, medir esos triángulos, después de haber trazado las perpendiculares EF, CH y BG. Sin embargo, si en el espacio ABCDE se encuentra algún obstáculo (una elevación, un bosque, un estanque, etc.) que impide que se tracen las líneas que se necesitan, ¿qué se deberá hacer entonces?, ¿qué método se deberá seguir para remediar el inconveniente del terreno? Lo que se presenta de inmediato al espíritu es escoger algún terreno llano sobre el que se puede operar fácilmente y describir sobre él triángulos iguales y semejantes a los triángulos ABC, ACD, etc. Veamos cómo se procederá para formar los nuevos triángulos.

XXVI

Admitamos que el obstáculo se encuentra en el interior del triángulo ABC, cuyos lados son conocidos, y que se quiere trazar un triángulo igual y semejante sobre el terreno escogido.

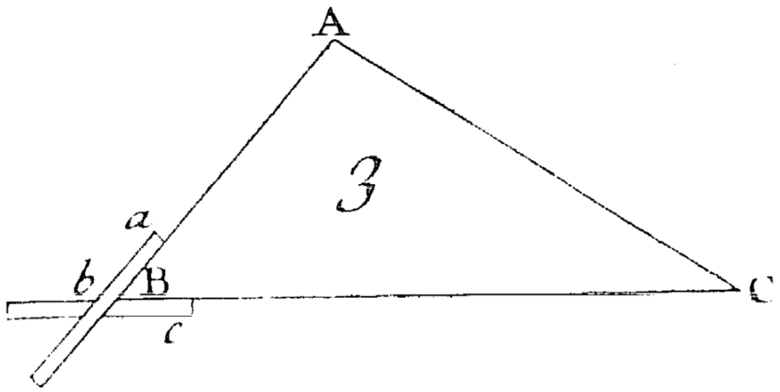


Para empezar, se describirá una línea DE igual al lado AB. A continuación, tomando una cuerda de la longitud BC, y fijando uno de sus extremos en E, se describirá el arco IFG, que tendrá la cuerda como radio. Por medio de otra cuerda de longitud AC, con uno de sus extremos en D, se describirá el arco KFH que cortará al primero en el punto F.

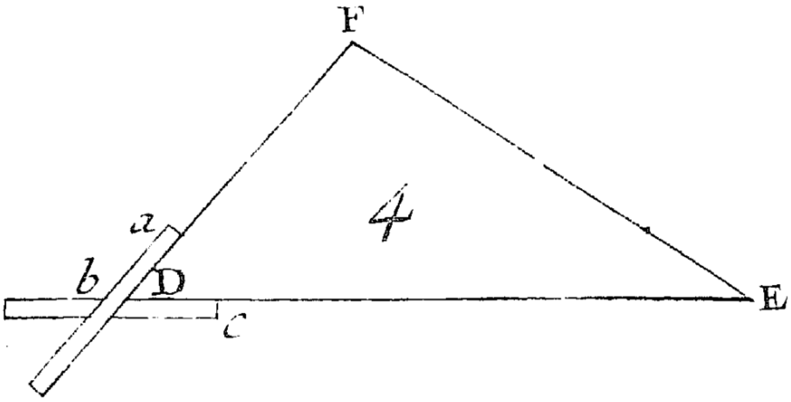


Entonces, trazando las líneas DF y FE se tendrá un triángulo DEF igual y semejante al triángulo propuesto ABC. Esto es evidente dado que como los lados DF y EF, que se unen en el punto F, son respectivamente iguales a los lados AC y BC, que se unen en el punto C, y como la base DE es igual a AB, no sería posible que la posición de las líneas DF y EF sobre DE fuese diferente de la posición de las líneas AC y BC sobre AB. Es cierto que también se podrían tomar las líneas D*f* y E*f* por debajo de DE, con lo que el triángulo obtenido sería el mismo pero invertido.

XXVII



Si sólo se pudiesen medir dos de los tres lados del triángulo ABC, los lados AB y BC, por ejemplo, es claro que con esto no se podría determinar un segundo triángulo igual y semejante a ABC.



Porque aunque se haya tomado DE igual a BC y DF igual a BA, no se sabría qué posición dar a éste respecto al otro. Para evitar esta dificultad, el recurso que se utiliza es simple: se inclina DF sobre DE de la misma manera que AB se inclina sobre BC; o, para expresarlo como lo hacen los geómetras, se da al ángulo FDE la misma abertura que al ángulo ABC.

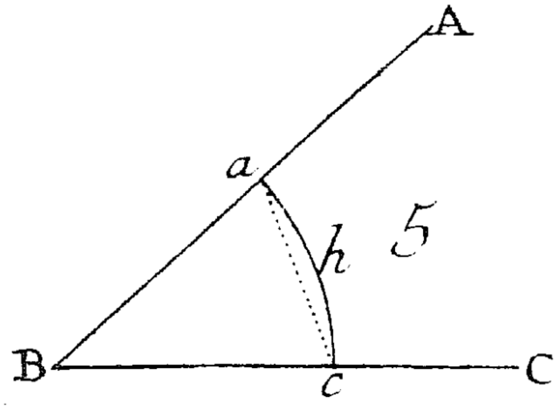
XXVIII

Para hacer esta operación, se toma un instrumento tal como el *abc*, compuesto de dos reglas que puedan girar alrededor de *b* y se colocan sobre los lados AB y BC. Así las dos reglas determinan el mismo ángulo que los lados AB y BC. Después se coloca la regla *bc* sobre la base DE, de manera que el centro *b* coincida con el punto D y que la abertura del instrumento permanezca fija. Entonces la regla *ab* da la posición de la línea DF que, con la línea DE, determina el ángulo FDE igual al ángulo ABC. Además, se toma la longitud de la línea DF igual a la de BA.

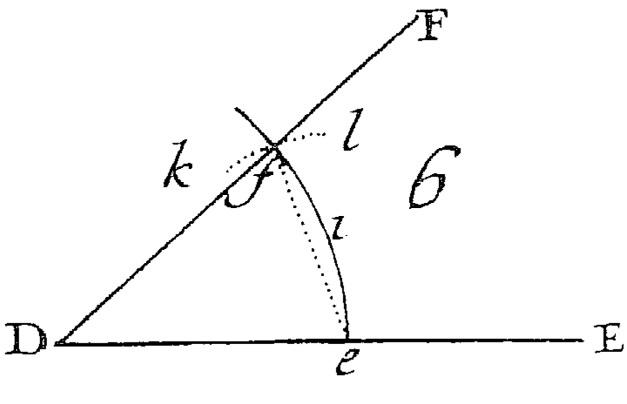
Finalmente, para obtener el triángulo FED enteramente igual y semejante al triangulo ABC, basta con trazar por F y por E la recta FE. Es una práctica simple que se apoya en el principio evidente de que un triángulo está determinado por la longitud de dos de sus lados y por su abertura; o, lo que viene a ser lo mismo, que un triángulo es igual a otro cuando dos de sus lados son respectivamente iguales y el ángulo comprendido entre ellos está igualmente abierto.

XXIX

También se podría dibujar el ángulo FDE igual al ángulo ABC de la manera siguiente.



Con centro en B y radio arbitrario B*a* se describe un arco *ahc*.



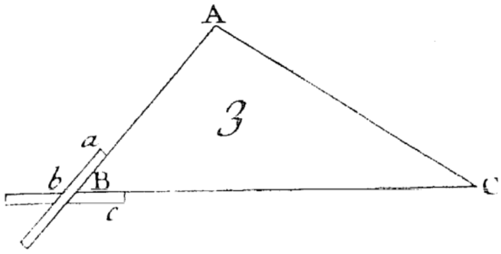
A continuación, con centro en D y el mismo radio, se traza el arco *eif*. Después, sólo se tiene que buscar un punto *f* situado en el arco *eif* de la misma manera que *a* se encuentra colocado sobre el arco *cha*. El punto *f* se determina fácilmente utilizando la recta *ac* que, siguiendo la definición ordinaria, se llama la cuerda del arco *ahc*.

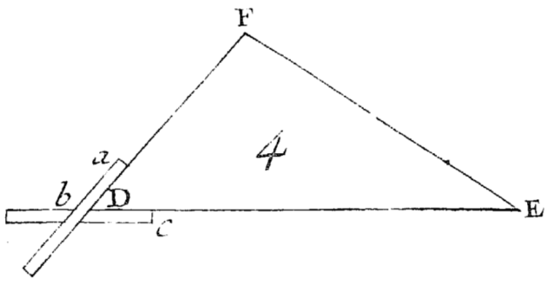
En efecto, si con centro en *e* y radio *ac* se describe el arco *lfk*, entonces la intersección de los arcos *eif* y *lfk* determina el punto *f*.

Finalmente, si por D y *f* se traza la línea D*f*F se tiene el ángulo FDE igual al ABC. Esto es evidente (Artículo XXVI), dado que los triángulos B*ac* y D*fe* son iguales y semejantes en todas sus partes.

XXX

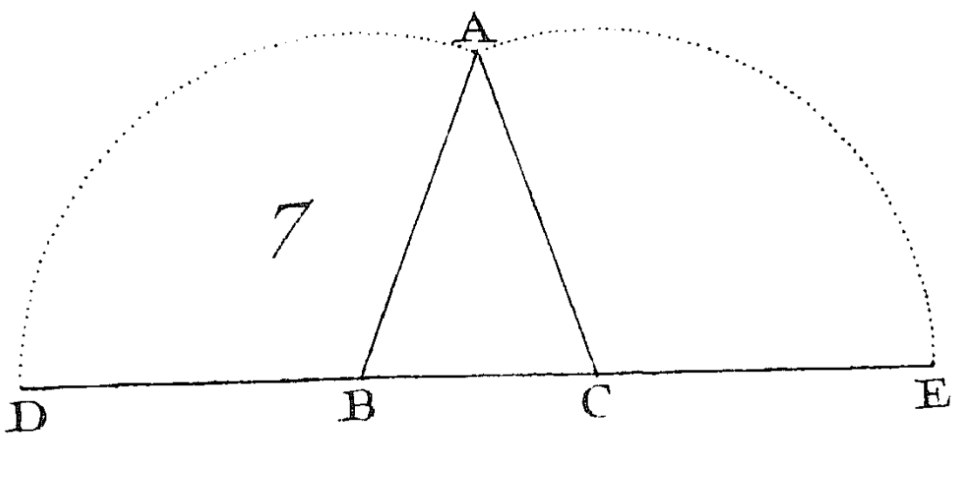
Si se quiere describir el triángulo FDE igual al triángulo ABC, cuando no se puede medir más que uno de de los lados, BC por ejemplo, se recurre a los ángulos ABC y ACB. Tomando DE igual a BC, se colocan las líneas FD y FE de modo que formen con DE los mismos ángulos que AB y AC forman con BC. Entonces, la intersección de estas líneas determina el triángulo FDE igual y semejante al triángulo ABC. El principio en que se apoya esta operación es tan simple que no hay necesidad de demostrarlo.





XXXI

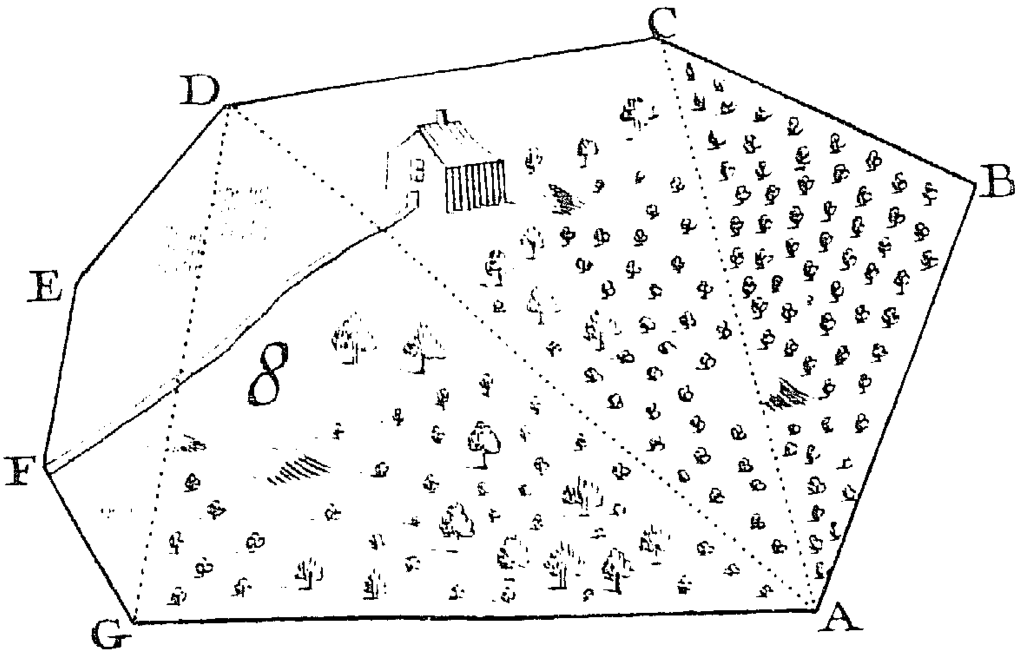
Si de los tres lados de un triángulo ABC no se puede medir más que la base BC, y este triángulo es isósceles (es decir, los dos lados AB y AC son iguales), entonces es evidente que basta con medir uno de los dos ángulos ABC y ACB, porque entonces el otro es igual.



Se ve fácilmente la razón suponiendo, en primera instancia, que los lados AB y AC del triángulo ABC se encuentran sobre BD y sobre CE, prolongaciones de la base BC; y que, a continuación, se levantan para reunir sus extremos en el punto A. Entonces, la igualdad de estos dos lados les impide recorrer más camino al uno que al otro. Por consiguiente, cuando están juntos, caen igualmente sobre la base BC. Luego, el ángulo ABC es igual al ángulo ACB.

XXXII

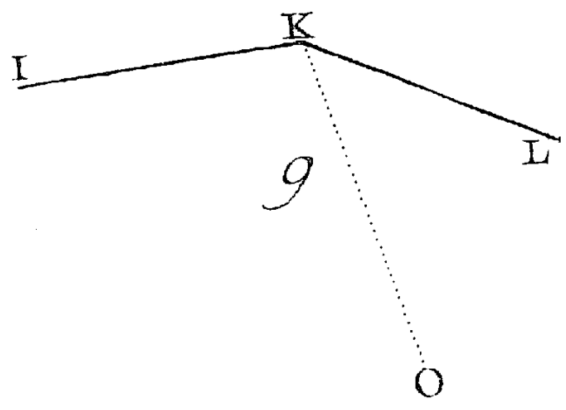
Volviendo a la medida de los terrenos se ve que, cualesquiera que sean los obstáculos que se puedan encontrar en su interior, por el método precedente es fácil transportar sobre un terreno libre todos los triángulos que dividen el espacio que se quiere medir.



Supongamos, por ejemplo, que se quiere medir un bosque, cuya figura es ABCDEFG.

En primer lugar, se tomará un triángulo igual a ABC. Esto se puede hacer sin entrar en el interior de este triángulo, midiendo los dos lados AB, BC y el ángulo CBA comprendido por ellos.

El triángulo descrito determina el ángulo BCA y la longitud de AC. Además, como se puede medir el lado exterior DC en el triángulo CAD se tienen los lados DC y CA.

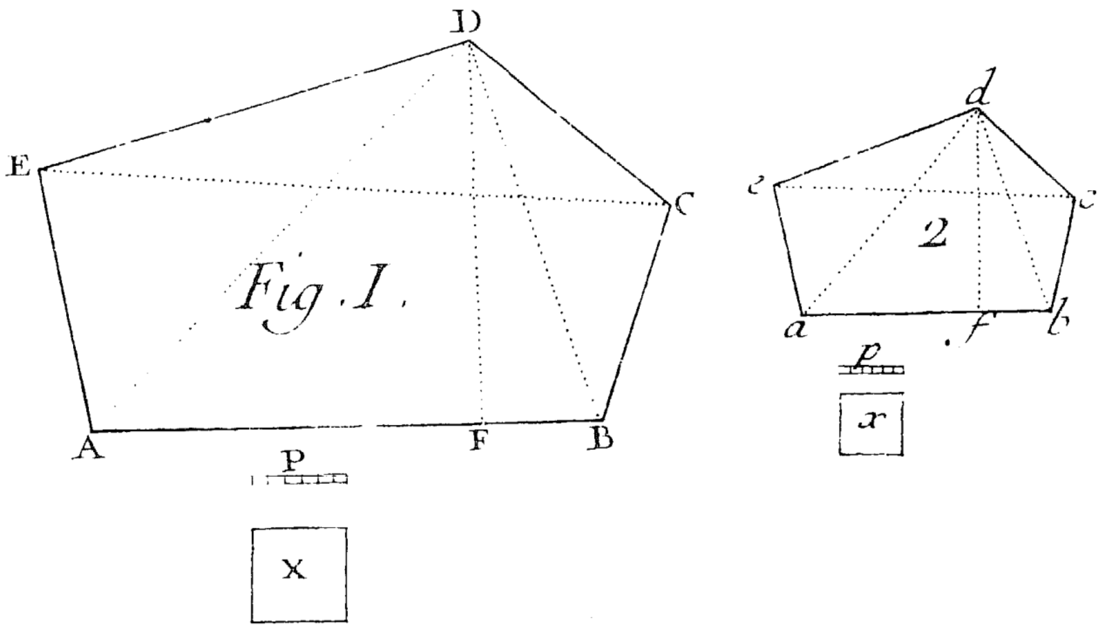


El ángulo DCA se puede determinar tomando, en primer lugar, el ángulo IKL igual al ángulo DCB y, después, el ángulo LKO igual al ángulo BCA. Con esto se tiene el ángulo IKO igual al ángulo DCA buscado.

Así, el triángulo ADC queda determinado por los lados DC y CA y por el ángulo comprendido DCA. De forma similar se podría construir el triángulo DAG y el resto de la figura.

XXXIII

El método que se acaba de ofrecer para medir los terrenos en los que no se pueden trazar líneas presenta grandes dificultades en la práctica. Raramente se encuentra un espacio liso y libre, suficientemente grande para hacer triángulos iguales a los del terreno que se quiere medir. Incluso cuando se encuentra, la gran longitud de los lados de los triángulos podría hacer las operaciones muy difíciles. Bajar una perpendicular sobre una línea, desde un punto que está alejado solamente 500 toesas de ella, sería una obra extremadamente penosa y, quizás, impracticable. Conviene pues disponer de un procedimiento que supla estas grandes operaciones.



Este procedimiento surge de forma natural representando la figura ABCDE que se quiere medir por una figura semejante *abcde*, pero más pequeña, en la que, por ejemplo: el lado *ab* mida 100 pulgadas[4], si el lado AB mide 100 toesas; y el lado *bc* mida 45 pulgadas, si BC mide 45 toesas. Entonces, debe concluirse que si el área de la figura reducida *abcde* es de 60.000 pulgadas cuadradas, la de la figura ABCDE debe ser de 60.000 toesas cuadradas.

Pero, antes de nada, es necesario saber en qué consiste la semejanza de dos figuras.

[4] 1 pulgada ≅ 2.5 cm (Nota de los traductores).

XXXIV

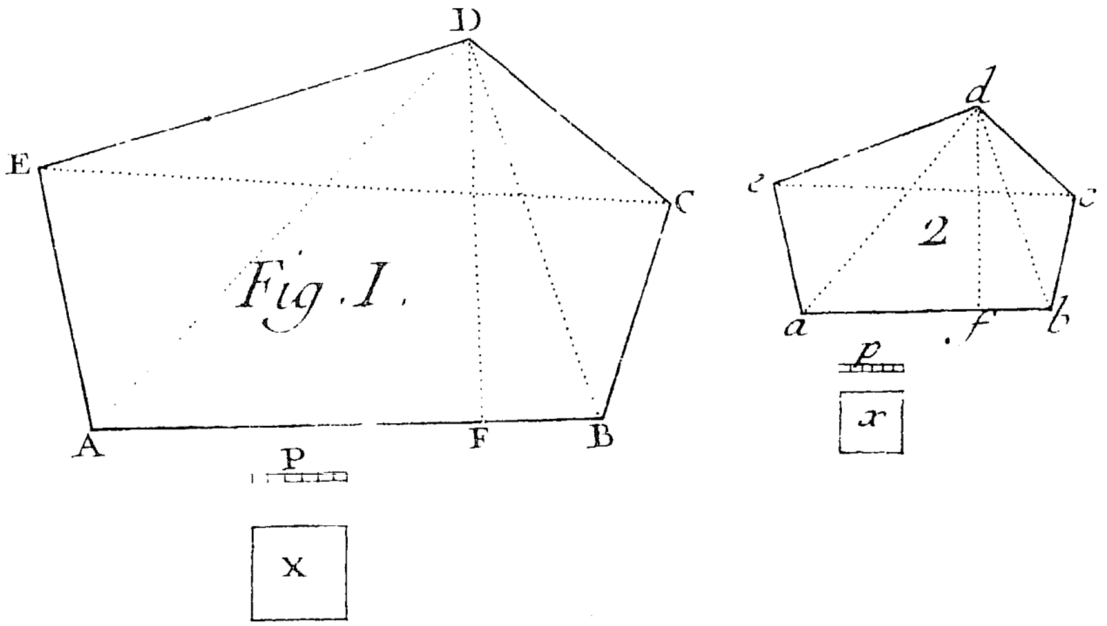
De entrada, por poco que se haya reflexionado, se observa que para que las figuras ABCDE y *abcde* sean semejantes los ángulos A, B, C, D, E de la mayor deben ser iguales a los ángulos *a, b, c, d, e* de la menor. Además, los lados *ab, bc, cd*, etc. de la menor deben contener tantas partes *p*, como partes P contengan los lados AB, BC, CD, etc. de la mayor.

XXXV

Para expresar esta segunda condición, los geómetras dicen que es necesario que los lados AB, BC, CD, etc. sean proporcionales a los lados *ab, bc, cd*, etc.; o que el lado AB contenga a *ab*, de la misma manera que BC contiene a *bc*, etc.; o que el lado AB sea tan grande, en relación a *ab*, como BC lo es en relación a *bc*, etc.; o todavía más, que haya la misma razón, o la misma relación, entre AB y *ab* que entre BC y *bc*, etc.; o , en fin, que AB sea a *ab*, como BC es a *bc*, etc. Todas ellas son formas de expresar la misma cosa, pero conviene hacerlas familiares para entender el lenguaje de los geómetras.

XXXVI

Después de haber visto en qué consiste la semejanza de dos figuras, busquemos cuál es el procedimiento más natural para dibujar una figura semejante a otra. Para esto, supongamos que un dibujante quiere hacer una copia reducida de una figura.



En primer lugar, toma *ab* para representar la base AB de la figura original ABCDE. Después, inclina sobre *ab* los lados *ae* y *bc*, de la misma manera que AE y BC están inclinados sobre AB, observando que las longitudes de *ae* y *bc* son a la de *ab*, como las longitudes de AE y BC son a la de AB. Es decir, que si AE, por ejemplo, es la mitad de AB, toma *ae* igual a la mitad de *ab*, haciendo lo mismo para determinar la longitud de *bc*, respecto a BC.

Habiendo determinado así los puntos *e* y *c*, traza dos líneas *ed* y *cd*, que inclina sobre *ea* y sobre *cb*, de la misma manera que ED y CD están inclinadas sobre EA y sobre CB. Acto seguido, prolongando estas líneas hasta que se corten en *d*, obtiene la figura *abcde*.

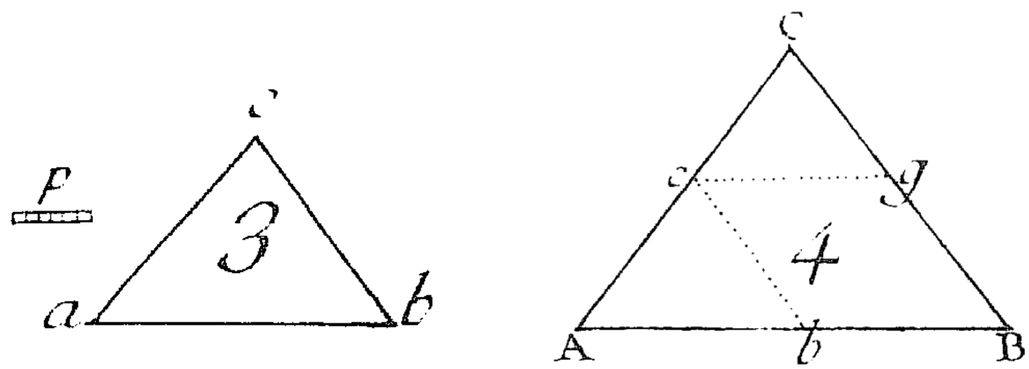
XXXVII

Cuando se reflexiona sobre esta construcción, se observa que sólo se apoya en la igualdad entre los ángulos E, A, B, C y *e, a, b, c* y en la proporcionalidad de los lados EA, AB, BC, y de los lados *ea, ab, bc*. Por tanto, la figura se construye sin que se haya tomado el ángulo *d*, igual al ángulo D, ni los lados *ed, cd* proporcionales a los lados ED, CD. En principio, esta reflexión podría hacer sospechar que el ángulo *d* no fuese igual al ángulo D, y que los lados *ed*, *cd* no fuesen proporcionales a los lados ED, CD y que, por consiguiente, la figura *abcde* no fuese semejante a la figura ABCDE.

Sin embargo, esta duda se disipa inmediatamente sin más que recurrir a la experiencia. Por otra parte, con que se ponga un de poco atención, se percibe que de la igualdad de los ángulos E, A, B, C y de *e, a, b, c* y de la proporcionalidad de los lados EA, AB, BC y *ea, ab*, *bc*, resulta necesariamente la igualdad de los ángulos D y *d* y la proporcionalidad de los lados ED, CD y *ed, cd*.

Además, para descartar todo sospecha, veamos que todas las condiciones que exige la semejanza de dos figuras son necesariamente dependientes unas de otras. Esto se comprueba con facilidad examinando primeramente los triángulos, que son las figuras más simples y que entran necesariamente en la composición de todas las demás. Este examen nos conducirá a todas las propiedades y a todos los usos de las figuras semejantes.

XXXVIII



Supongamos que sobre la base *ab* se traza el triangulo *abc*, tomando solamente los ángulos *cab* y *cba*, iguales a los ángulos CAB y CBA del triangulo ABC. Veamos primero que el tercer ángulo *acb* es igual al tercer ángulo ACB.

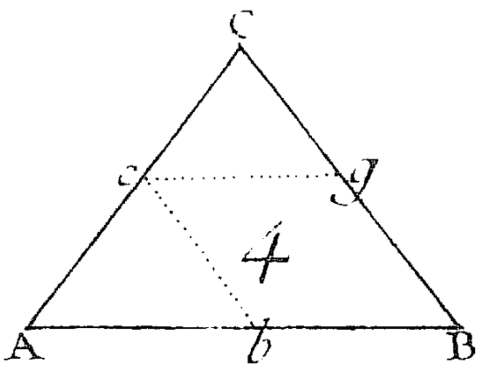
En efecto, si dibujamos el triangulo *abc* sobre el triángulo ABC, de modo que el punto *a* se encuentre sobre el punto A, *ab* sobre AB y *ac* sobre AC, entonces está claro que *cb* será paralelo a CB. Esto es cierto porque el lado *cb*, prolongado, no puede cortar al lado CB, dado que entonces las dos líneas se inclinarían desigualmente sobre el lado AB y, por tanto, los ángulos *cb*A y CBA serían desiguales, en contra de la suposición.

Como de la igualdad de los ángulos *cba* y CBA se sigue que las líneas *cb* y CB son paralelas, del paralelismo de estas líneas se sigue también que los ángulos A*cb* y ACB son iguales; que es lo que se quería demostrar.

XXXIX

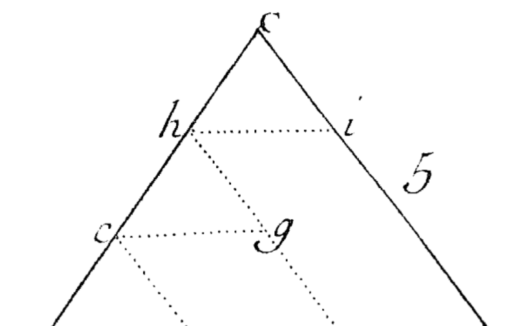
Demostremos ahora que los lados que se corresponden en dos triángulos *acb* y ACB, que tienen los mismos ángulos, son proporcionales.

Para fijar ideas supongamos que *ab* es la mitad de AB. Entonces, deberemos probar que *ac* también es la mitad de AC y que *bc* es la mitad de BC.



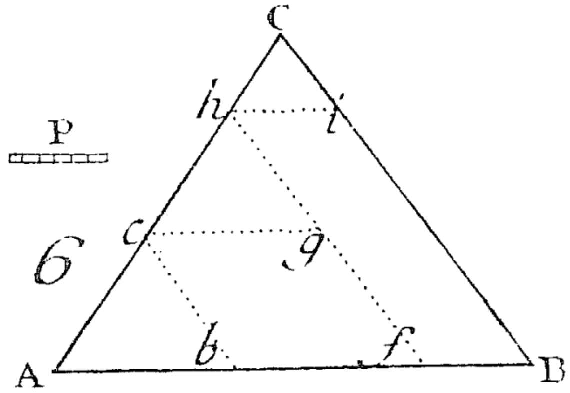
Admitamos que *acb*, tal como en el artículo precedente, tiene la posición A*cb*. Entonces, si se traza *cg* paralelamente a AB, está claro que esta línea será igual a *b*B o a A*b*, y que *g*B será igual a *cb*.

Así pues, como los ángulos C*gc* y C*cg* serán manifiestamente iguales a los ángulos *cb*A y *c*A*b*, el triángulo C*cg* será igual al triángulo *c*A*b* (Artículo XXX). Así se tendrá que C*c* es igual a A*c*, y C*g* igual a *cb*, o a *g*B. De modo que A*c* o *ac* será la mitad de AC; y *cb* la mitad de CB.



Si *ab* está contenido tres, cuatro, o cualquier otro número de veces en AB, será igualmente fácil demostrar que *ac* está contenido el mismo número de veces en AC, y *cb* en CB. Ya que, si desde los puntos de división *b, f* de la base AB se trazan *bc, fh*, etc. paralelas a BC, se podrían colocar a lo largo de AC tres, cuatro, etc. triángulos A*cb*, *cgh*, *h*C*i*, etc. iguales a los triángulos *acb* y A*cb*.

Y si *ab*, en lugar de estar contenido exactamente un cierto número de veces en AB, estuviese contenido dos veces y media, por ejemplo, entonces *ac* también estaría contenido dos veces y media en AC; y *bc*, dos veces y media en BC.



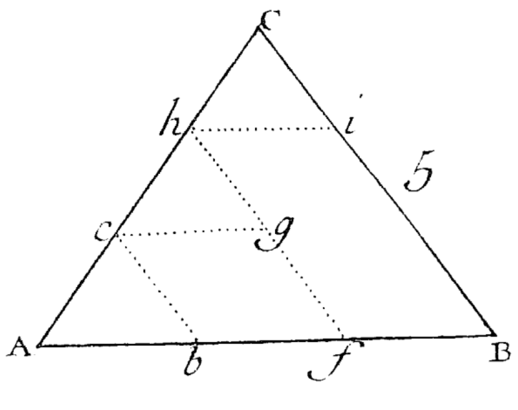
En efecto, cuando mediante las paralelas *bc* y *fh* se han colocado a lo largo de AC los triángulos A*cb* y *cgh*, iguales a *acb,* faltará colocar entre las paralelas *hf* y CB un triángulo C*hi* cuyos lados serán la mitad de los lados de *c*A*b*. Esto es evidente dado que, por la suposición, *f*B es la mitad de A*b* y la base *hi* del triángulo C*hi* es igual a *f*B, puesto que *hf* y CB son paralelas. Así, en general, cuando dos triángulos ABC y *abc* tienen los mismos ángulos, estos triángulos, llamados triángulos semejantes, tienen sus lados proporcionales.

En otras palabras: los lados AB, BC, AC del triángulo ABC contienen tantas partes P como partes *p* están contenidas en los lados *ab, bc, ac* del otro triángulo *abc* (siendo P el pie, la toesa, etc. o, en general, la escala con la que ha sido construido ABC, y *p* la escala utilizada para construir *abc*).

XL

De la proposición que acabamos de demostrar se obtiene, de forma natural, la solución de un problema que suele ser útil en la práctica.

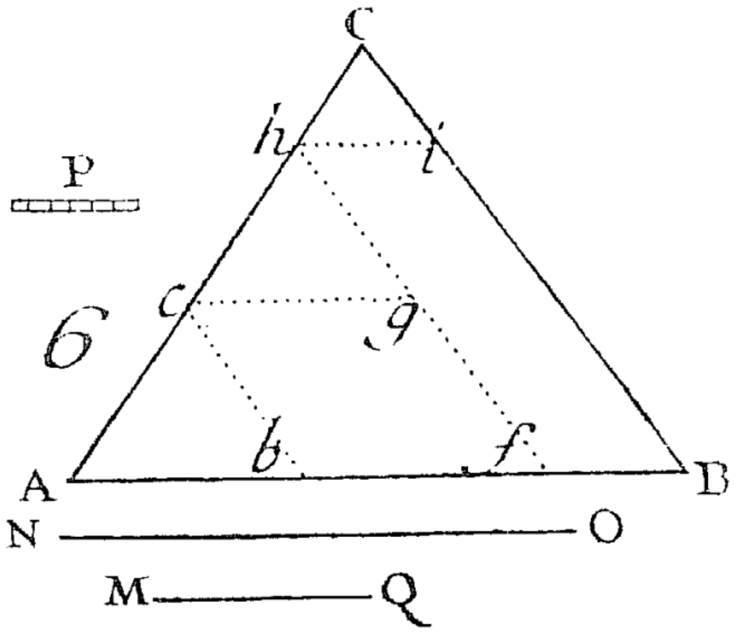
Se pide que se dividida una línea en un número dado de partes iguales. Esto se podría hacer por tanteo, pero nunca con esta seguridad que da la exactitud geométrica.



Supongamos, por ejemplo, que se quiere dividir AB en tres partes iguales. Se empieza trazando una línea indefinida AC que forme un ángulo cualquiera con AB. A continuación, se llevan sobre esta línea tres partes iguales A*c*, *ch*, *h*C con una abertura de compás arbitraria. Después, se traza CB y se dibujan las paralelas *cb* y *hf*. Con esto, la línea AB, cortada en los puntos *b* y *f*, se encuentra dividida en tres partes iguales, lo que queda claro por el artículo precedente.

XLI

Si se quiere dividir una línea en un número fraccionario de partes, como dos y media, tres y un cuarto, etc. o si, en general, se quiere dividir la línea AB por el punto *b*, de modo que AB sea a A*b* como la línea NO es a la línea MQ, también se ve que la solución del problema dependerá del artículo XXXIX.

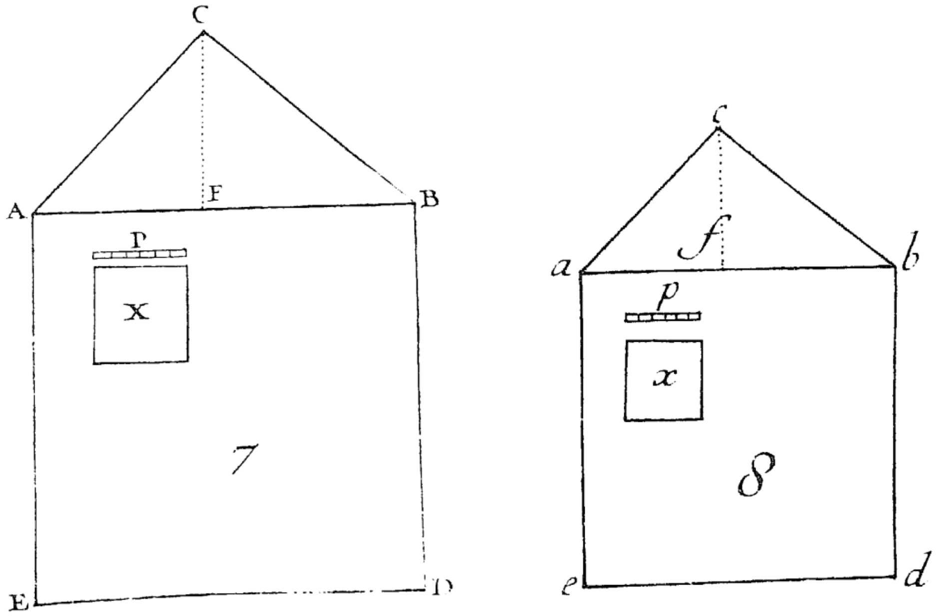


Bastará con trazar por A una recta cualquiera, tomar sobre esta recta A*c* y AC respectivamente iguales a MQ y NO y, a continuación, trazar *cb* paralela a CB. Entonces, el punto *b* será el punto buscado.

Los geómetras enuncian de esta otra manera el problema que acabamos de resolver: encontrar una cuarta proporcional a tres líneas NO, MQ y AB.

XLII

Es evidente que dos triángulos semejantes ABC y *abc* tienen no solamente sus lados proporcionales sino que las perpendiculares CF y *cf*, bajadas desde los vértices C y *c* sobre las bases AB y *ab*, también tienen la proporción de los lados. Esto es tan fácil de demostrar, en virtud de lo precedente, que no vamos a detenernos en ello.



XLIII

En cuanto a las áreas de los triángulos semejantes ABC y *abc*, se ve que la del primero contiene tantos cuadrados X hechos sobre la medida P, como el área del segundo contiene cuadrados *x* hechos sobre la medida *p*. En efecto, por el artículo precedente, CF y AB tienen tantas partes P como *cf* y *ab* tienen partes *p*. La mitad del producto de CF por AB, área de ABC (Artículo XIV), da el mismo número que el que resulta de la mitad del producto de *cf* por *ab*, área de *abc*; pero con esta diferencia: CF y AB se miden en partes P y su producto se expresa en cuadrados X; *cf* y *ab* se miden en partes *p* y su producto se expresa en cuadrados *x*.

XLIV

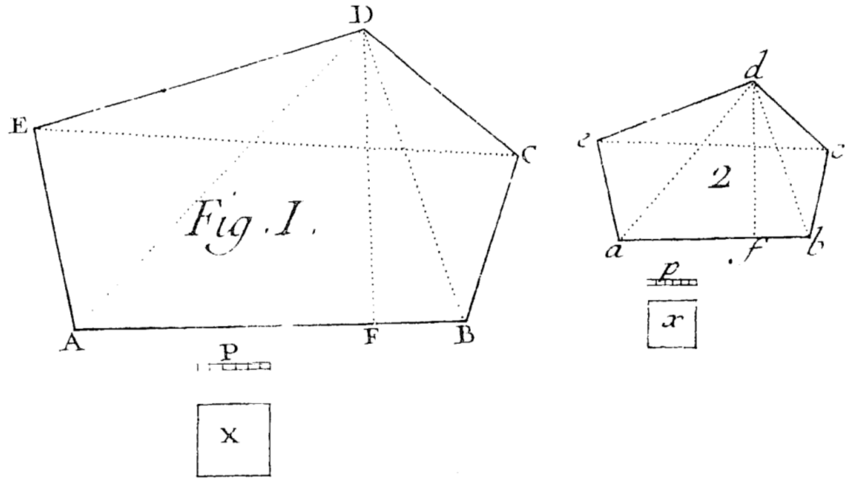
Lo que acabamos de decir sobre las áreas de triángulos semejantes sirve como demostración de una proposición que en los Elementos de Geometría se suele enunciar así: los triángulos semejantes ABC y *abc* son entre sí como los cuadrados ABDE y *abde* de sus lados homólogos o correspondientes AB y *ab*.

La demostración que confirma el artículo precedente conduce necesariamente a esta consecuencia. En efecto, como el cuadrado ABDE contiene tantos cuadrados X como cuadrados *x* están contenidos en *abde*, es evidente que los dos números de cuadrados X, que manifiestan la relación del área del triángulo ABC al área del cuadrado ABDE, son los mismos que los números de cuadrados *x* que dan la relación del área del triángulo *abc* al área del cuadrado *abde*. En otras palabras: el área del triángulo ABC es al área del cuadrado ABDE, como el área del triángulo *abc* es al área del cuadrado *abde*.

De ahí se sigue que si, por ejemplo, el lado AB es doble del lado *ab*, el triángulo ABC es cuádruple del triángulo *acb*. Si AB es triple de *ab*, el triángulo ACB es nueve veces más grande que el triángulo *acb*, etc. De otro modo: AB no puede ser doble de *ab*, si el cuadrado ABDE no es cuádruple del cuadrado *abde*, etc.

XLV

Para pasar ahora de los triángulos a otras figuras, supongamos que a cada uno de los triángulos semejantes ABD y *abd* se agregan otros dos triángulos ADE, BDC y *ade*, *bdc*, los dos primeros semejantes a los otros dos.



En las figuras totales ABCDE, *abcde* se tiene que:

1º. Los ángulos A, B, C, D, E son iguales a los ángulos *a, b, c, d, e*. Esto es claro dado que los unos y los otros son o dos ángulos correspondientes de triángulos semejantes o dos ángulos compuestos de estos ángulos correspondientes.

2º. La razón de los lados homólogos o correspondientes DE y *de*, BC y *bc*, etc., de las figuras ABCDE y *abcde*, es necesariamente la misma. Es decir, si P, por ejemplo, se encuentra un cierto número de veces en la base AB, y *p* se encuentra el mismo número de veces en *ab*, entonces P y *p* estarán también contenidos un mismo número de veces en dos lados homólogos cualesquiera DE y *de*.

En efecto, en virtud de la semejanza de los triángulos ABD y *abd*, el número de P que hay en AD es igual al número de *p* contenido en *ad*. Entonces, como estos lados son las bases de los triángulos semejantes ADE y *ade*, el número de partes P contenidas en DE es el mismo que el número de partes *p* que contiene el lado *de*.

3º Si en las dos figuras se trazan líneas que se corresponden, tales como CE y *ce*, o las perpendiculares DF, *df*, etc., estas líneas están entre ellas en la misma razón que los lados homólogos de las dos figuras.

Por consiguiente las figuras ABCDE, *abcde* son enteramente semejantes en todas sus partes.

XLVI

Es evidente que si se quiere dibujar de nuevo una figura igual a *abcde* y, por consiguiente, semejante a ABCDE, será inútil medir todos los lados y todos los ángulos de *abcde*. Bastará, por ejemplo, con tomar los tres lados *ab, ea, bc* y los cuatro ángulos *e, a, b, c* y, sólo con esto, se estará seguro de haber dibujado la misma figura *abcde* semejante a ABCDE. Esto es una demostración completa de lo que no se había hecho más que presumir (Artículo XXXVII).

Pero aún se puede ir más lejos, dado que siempre habrá formas diferentes de combinar el número de ángulos y de líneas que es necesario medir en una figura cualquiera para hacer otra que le sea proporcional. No obstante, entrar en más detalles sería fatigar al lector.

XLVII

Por razonamientos semejantes a los del artículo XLIII se podría demostrar que el número de cuadrados X que contiene la figura ABCDE es el mismo que el de cuadrados *x* encerrados en la figura *abcde*; y que, asimismo, las áreas de las figuras semejantes están entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.

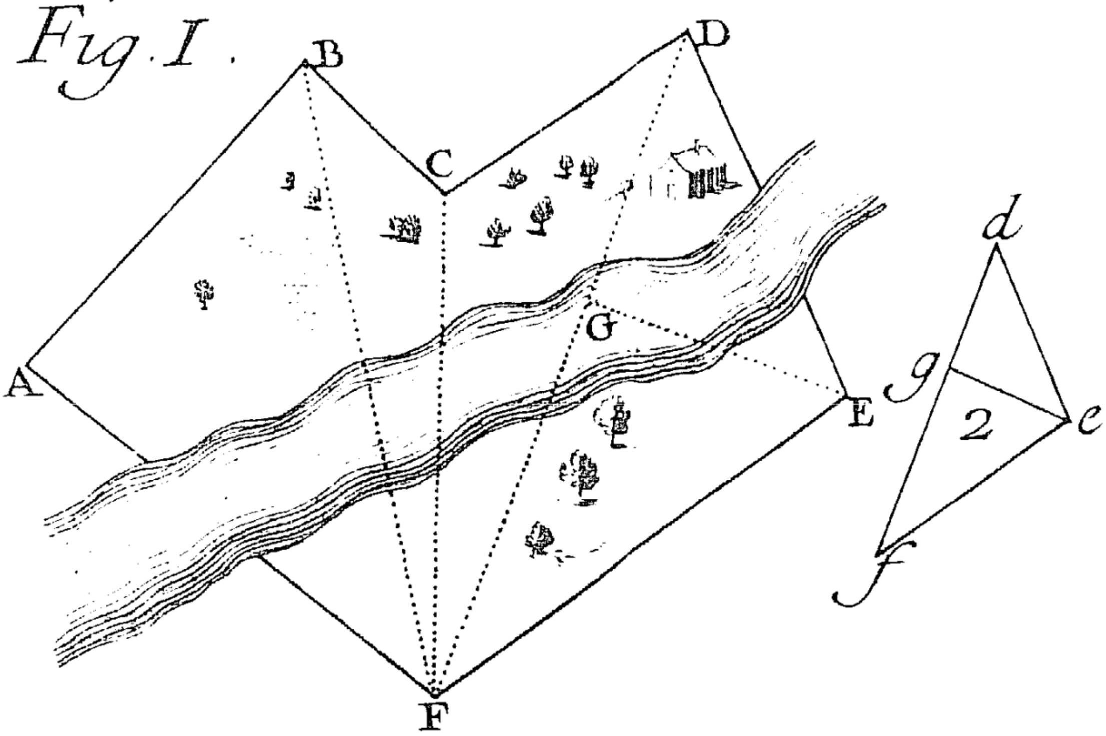
XLVIII

Todo lo que se acaba de decir sobre las figuras semejantes puede reducirse a este único principio: las figuras semejantes sólo se diferencian en las escalas con las que se han construido.

XLIX

Ahora, para conocer mejor el uso que debe hacerse de los triángulos semejantes y de las reducciones para obtener el área de terrenos sobre los que no se puede operar cómodamente, imaginémonos que ABCDEF representa el contorno de un parque, de un estanque, etc. del que se quiere determinar su extensión.

Fig. I.



En primer lugar se mide uno de los lados de la figura, por ejemplo el FE, y se determina cuántas toesas, perchas[5], etc. tiene dicho lado. A continuación, con la escala

[5] 1 percha = 3 toesas (Nota de los traductores).

que se quiera, se dibuja en un papel o cartón una línea *fe* que contenga tantas partes de la escala como indique el número de toesas, perchas, etc. que mide FE. Después, haciendo los ángulos *def* y *dfe* iguales a los ángulos DEF y DFE, se dibuja el triángulo *edf*, en el que se baja *eg* perpendicularmente a *df*.

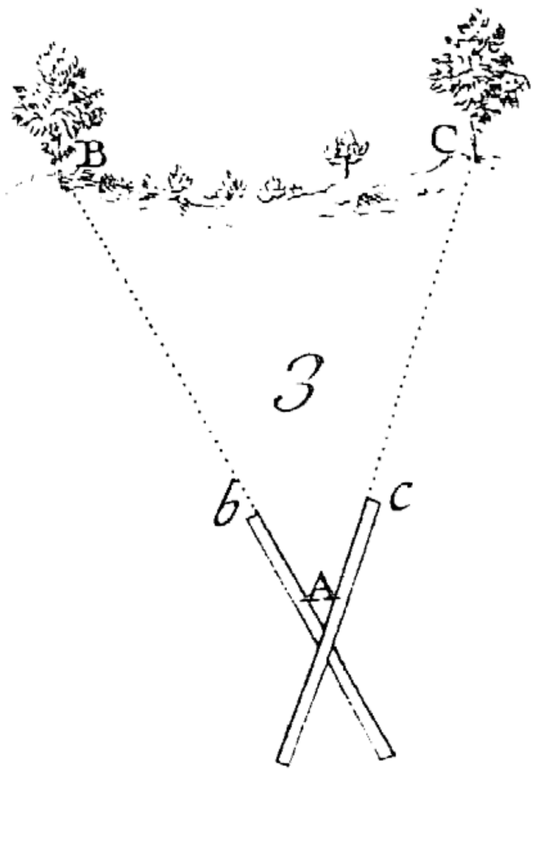
Hecho esto, y medidas las líneas *df* y *eg* por medio de la escala, se concluye que estas líneas contienen tantas partes de la escala como toesas, perchas, etc. contienen DF y EG respectivamente. Entonces, multiplicando DF por la mitad de EG se obtiene el área del triángulo EDF. Midiendo de la misma manera cada uno de los triángulos DCF, BCF y ABF se determinará el área de la figura entera.

L

Con frecuencia es necesario medir la distancia desde un lugar F, en el que se está situado, a otro lugar al que algún obstáculo nos impide llegar. Nuevo problema cuya solución ya se ha dado antes en el artículo que precede a éste. Dado que para medir DF sólo es necesaria la semejanza de los triángulos *def* y DEF, queda claro que si se mide una base cualquiera EF, y desde los puntos F y E se puede percibir el punto D, el problema quedará resuelto; es decir, se tendrá la distancia FD.

LI

El uso que se puede hacer de instrumentos particulares tales como el *bA*c, al que nos hemos referido antes (Artículo XXVIII), compuesto por dos varillas unidas en el punto A alrededor del cual pueden girar libremente, conduce con frecuencia a muchos errores.

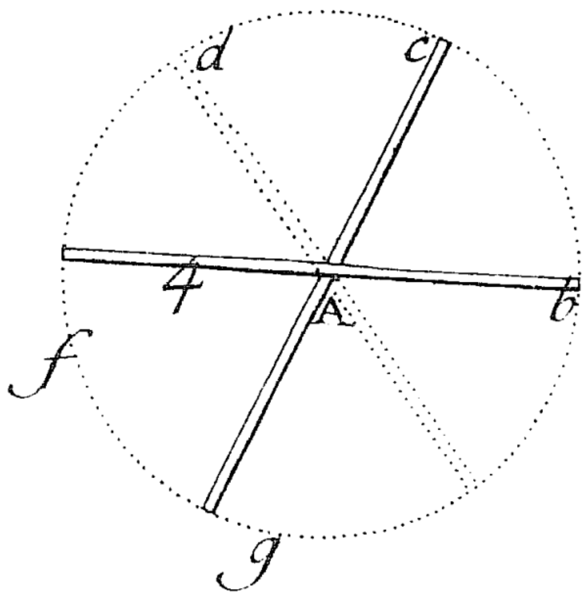


Unas veces la abertura del ángulo se altera durante el transporte; otras, la forma que se está obligado a dar al instrumento para facilitar el uso impide que se pueda aplicar sobre el plano donde debe hacerse la reducción.

Añadamos a todo esto que cada nuevo ángulo BAC que se toma de esta manera requiere que se transporte de nuevo el instrumento sobre el papel; y que el único recurso que se tiene para comparar dos ángulos es poner el uno sobre el otro sin que, por este medio, se pueda tener con exactitud ni su relación ni su magnitud total.

LII

Es pues necesario buscar una medida fija para los ángulos, tal como ya se ha hecho para las longitudes. Esta medida que es necesario tener es fácil de encontrar. En primer lugar, se fija A*b* y se le aplica el lado A*c*. A continuación, se hace girar este lado alrededor de A. Es obvio que si se adapta al extremo *c* de la rama móvil A*c* una pluma o una tiza como medio para hacer sensible la traza del punto *c,* esta traza formará un arco de círculo que dará exactamente la medida del ángulo para cada abertura particular de los lados A*b* y A*c*. Por tanto, debido a la uniformidad de la curvatura del círculo, se tendrá necesariamente que a una abertura doble, triple cuádruple de *c*A*b* corresponderá un arco doble, triple, cuádruple de *cb*.



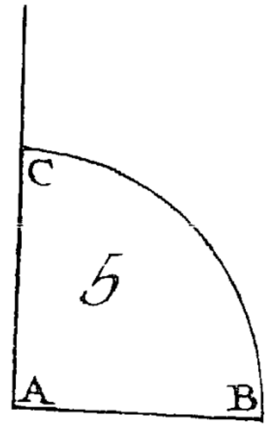
LIII

Admitiendo que la circunferencia *bcdfg*, descrita por un giro completo del punto *c*, se divide en un número cualquiera de partes iguales, el número de partes contenidas en el arco que interceptan las líneas A*c* y A*b* mide exactamente la abertura de estas líneas o el ángulo *c*A*b* que forman.

Los geómetras están de acuerdo en dividir el círculo en 360 partes que se llaman grados; cada grado, en 60 minutos; cada minuto, en 60 segundos, etc. Así, un ángulo *b*A*c*, por ejemplo, tendrá 70 grados y 20 minutos, si el arco *bc* que le sirve de medida tiene 70 de las 360 partes del círculo más 20 sexagésimas partes de un grado.

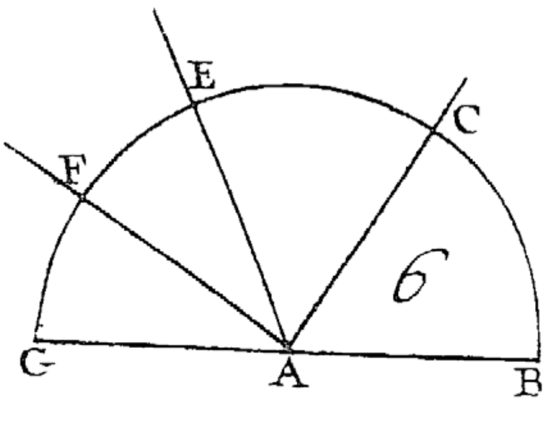
LIV

De todo ello se sigue que un ángulo CAB de 90 grados, llamado comúnmente ángulo recto, es aquél cuyos lados AC y AB interceptan el cuadrante BC de la circunferencia y son perpendiculares uno a otro.



LV

Se llama ángulo agudo a todo ángulo menor que un ángulo recto o que tiene menos de 90 grados. Tales son los ángulos CAB, FAG y EAG.



LVI

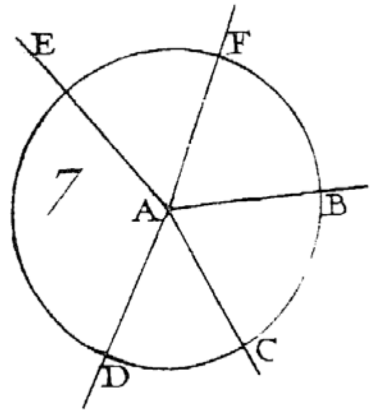
Por el contrario, se llama ángulo obtuso a aquel que tiene más de 90 grados, como el FAB

LVII

Es evidente que la suma de todos los ángulos que se pueden formar del mismo lado sobre una línea recta GB y que tienen el mismo vértice A, como los GAF, FAE, EAC y CAB es igual a 180 grados, o a dos ángulos rectos, medidos por la semicircunferencia.

LVIII

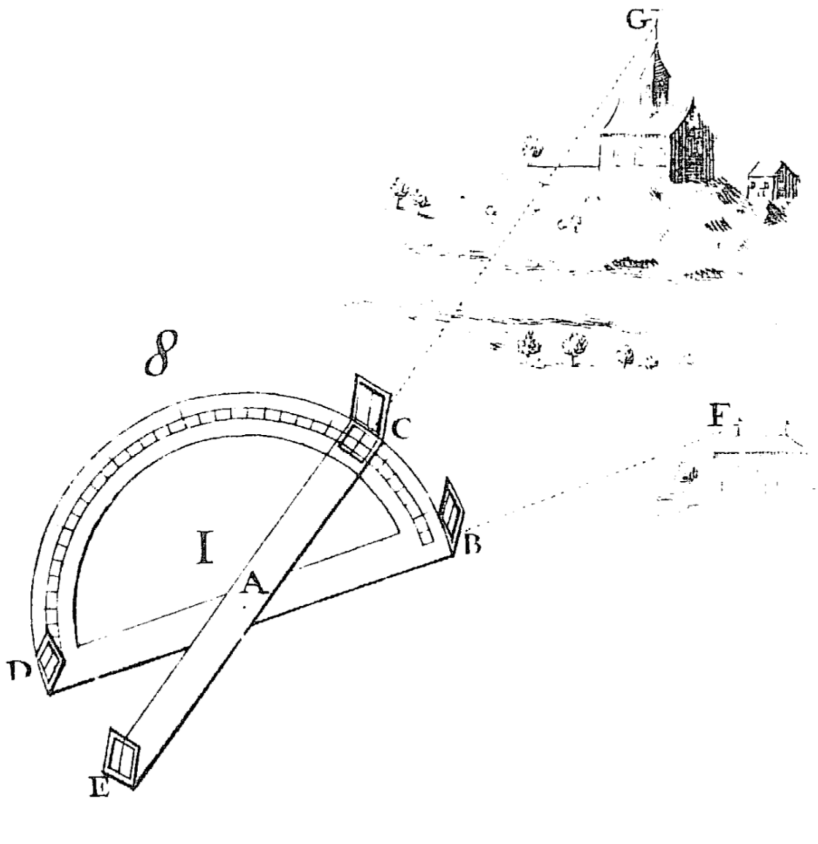
Igualmente, la suma de todos los ángulos EAF, FAB, BAC, CAD y DAE que se pueden formar alrededor del punto A, que es su vértice común, es igual a 360 grados o a cuatro ángulos rectos, medidos por la circunferencia completa BCDEF.



LIX

Después de haber encontrado que los ángulos tienen las partes del círculo por medida, veamos cómo se hace para determinar los grados que contiene un ángulo que se quiere medir.

Se utiliza un instrumento I, llamado semicírculo. Este instrumento está compuesto por dos reglas de la misma longitud, EAC y DAB, que se cortan en A y están provistas de pínulas en sus extremos.



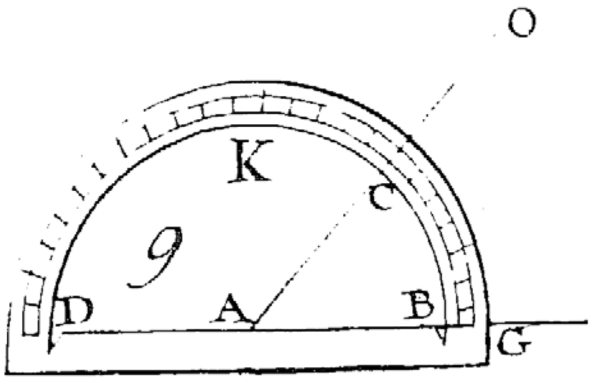
Una de estas reglas, EC, llamada alidada, se puede mover alrededor de A. La otra, DB, es fija y es el diámetro de un semicírculo DCB, dividido en 180 grados, etc.

Si se quiere determinar el ángulo que forman dos líneas rectas, trazadas desde el lugar donde estamos a dos objetos cualesquiera F y G, se coloca la regla fija DAB de manera que el ojo, colocado en D, vea el objeto F por las dos pínulas D y B.

A continuación, sin mover el instrumento, se gira la alidada hasta que el ojo colocado en E ve el objeto G, por las pínulas E y C. Entonces, la alidada marca sobre el semicírculo graduado el número de grados, minutos, etc. que contiene el ángulo propuesto GAF.

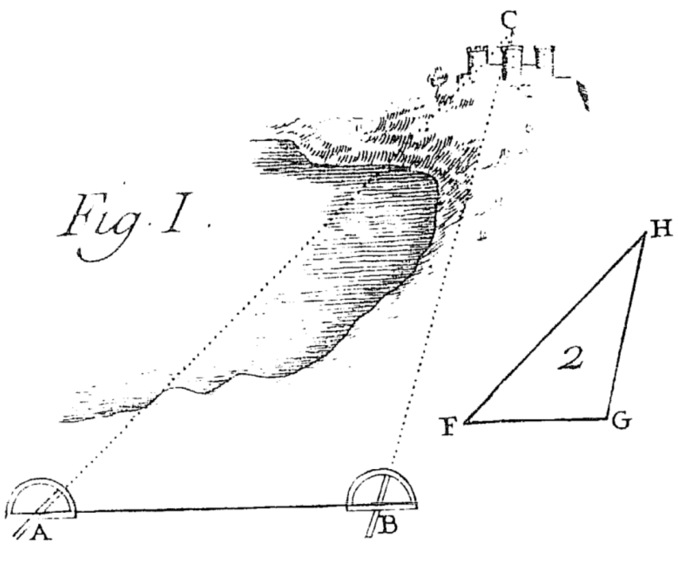
LX

Si se quiere dibujar sobre el papel un ángulo de un número determinado de grados, se utiliza un instrumento K dividido en 180 grados, llamado goniómetro o transportador.



Poniendo el centro A sobre el vértice del ángulo que se quiere trazar y la línea AB sobre la línea AG, que se toma por uno de los lados del ángulo, se marca el punto C que corresponde al número de grados que se quiere dar al ángulo propuesto. Por este punto y por el centro A se traza la línea ACO y se obtiene el ángulo OAG que contiene el número de grados pedido.

LXI



Supongamos ahora que, habiendo tomado una base FG sobre el papel, se quiere dibujar sobre esta base un triángulo FGH, semejante al triángulo ABC tomado sobre un terreno. Nos serviremos del semicírculo para saber los grados que contienen cada uno de los ángulos CAB y CBA. A continuación, por medio del transportador se harán los ángulos HFG y HGF, respectivamente iguales a los ángulos CAB y CBA. Entonces, el punto H, en el que se cortan los lados FH y GH, quedará necesariamente determinado y también el ángulo FHG. Con esto se tendrá el triángulo FGH semejante al triángulo ABC.

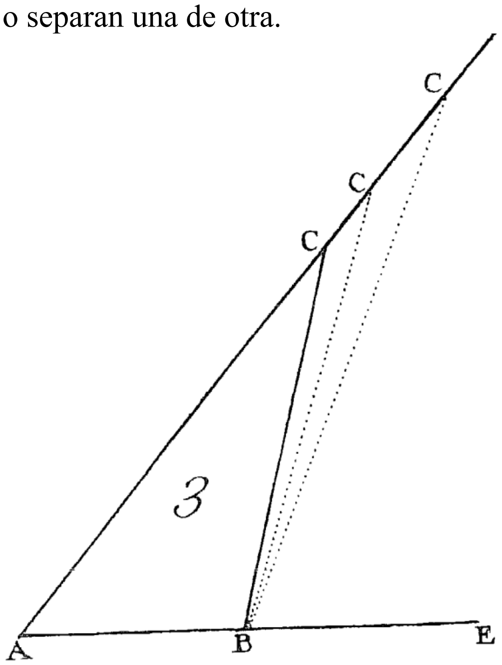
LXII

Tal como hemos dicho antes, dado que en la práctica interesa que los ángulos puedan medirse exactamente, no podemos contentarnos con tomarlos incluso con los instrumentos más perfectos. Además, es necesario encontrar un procedimiento para verificar sus medidas y hacer la corrección, si fuese necesario.

Este procedimiento es simple y fácil. Retomemos el triángulo ABC. Sabemos que la magnitud del ángulo C depende de la de los ángulos A y B; porque aumentando o disminuyendo estos ángulos cambia la posición de las líneas CA y BC y, por consiguiente, también el ángulo C que forman estas líneas.

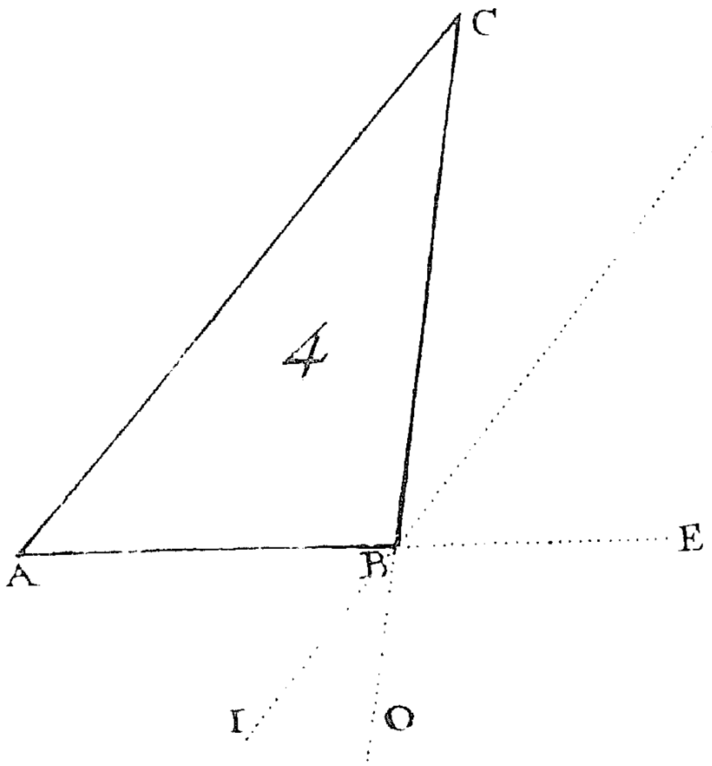
Entonces, si este ángulo depende de la magnitud de los ángulos A y B, se debe presumir que el número de grados que abarcan los ángulos A y B debe determinar el número de grados que debe abarcar el ángulo C. Por tanto, dicho ángulo puede servir para verificar las operaciones que se hayan hecho para determinar los ángulos A y B. Estaremos seguros de que se han medido bien los ángulos A y B, si midiendo el ángulo C se encuentra el número de grados correspondiente a la magnitud de los ángulos A y B.

Para hallar cómo se puede deducir la magnitud del ángulo C a partir de las magnitudes de los ángulos A y B, examinemos lo que ocurrirá a este ángulo si las líneas AC y BC se aproximan o separan una de otra.



Supongamos, por ejemplo, que BC, al girar alrededor del punto B, se separa de AB y se acerca a BE. Resulta claro que durante este giro de BC, el ángulo B se abre continuamente; y que, por el contrario, el ángulo C se cierra cada vez más. Este hecho puede hacer sospechar que, en este caso, la disminución del ángulo C iguala el aumento del ángulo B. De este modo, la suma de los ángulos A, B y C es siempre la misma, cualquiera que sea la inclinación de las líneas AC y BC sobre la línea AE.

LXIII



Esta inducción lleva con ella su demostración; porque si se traza ID paralelamente a AC se observa, en primer lugar, que los ángulos ACB y CBD, llamados ángulos alternos, son iguales. Esto es evidente puesto que las líneas AC e IB, al ser paralelas, están igualmente inclinadas sobre CBO. Con esto, el ángulo IBO es también igual al ACB. Pero el ángulo IBO también es igual al ángulo CBD, porque la línea ID no está más inclinada sobre CO de un lado que de otro. Por tanto, el ángulo DBC, igual al IBO, es igual al ángulo ACB, su alterno.

LXIV

En segundo lugar, se ve, que el ángulo CAE es igual al ángulo DBE, a causa de las paralelas CA y DB. Entonces, los tres ángulos del triángulo se pueden poner unos al lado de los otros, unidos por sus vértices en el punto B. Por tanto, los tres ángulos DBE, CBD y CBA, que son iguales a los tres ángulos CAB, ACB y CBA, son iguales a dos ángulos rectos (Artículo LVII). Todo lo que acabamos de decir se puede aplicar a cualquier triángulo. En consecuencia, está asegurada la siguiente propiedad general: la suma de los tres ángulos de un triángulo es constantemente la misma e igual a dos rectos o, lo que es lo mismo, a 180 grados.

LXV

Para concluir, el valor del tercer ángulo de un triangulo, cuando se conoce la medida de los otros dos, se halla restando de 180 grados el número de grados que los dos ángulos tienen en conjunto. Propiedad que proporciona una manera bien cómoda de verificar la medida de los ángulos de un triángulo y que, como veremos a medida que avancemos, tiene muchas utilidades más. Nos contentaremos aquí con mostrar las consecuencias más inmediatas.

LXVI

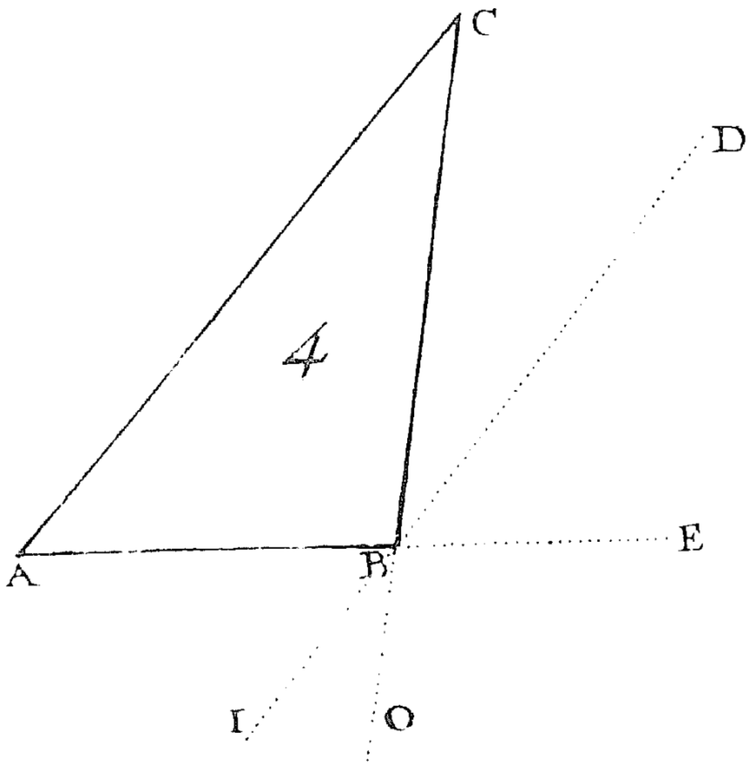
Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto, y con mayor razón no puede tener más de un ángulo obtuso.

LXVII

Si uno de los tres ángulos de un triángulo es recto, la suma de los otros dos ángulos siempre es igual a un recto.

Estas dos proposiciones son tan claras que no hay necesidad de demostrarlas.

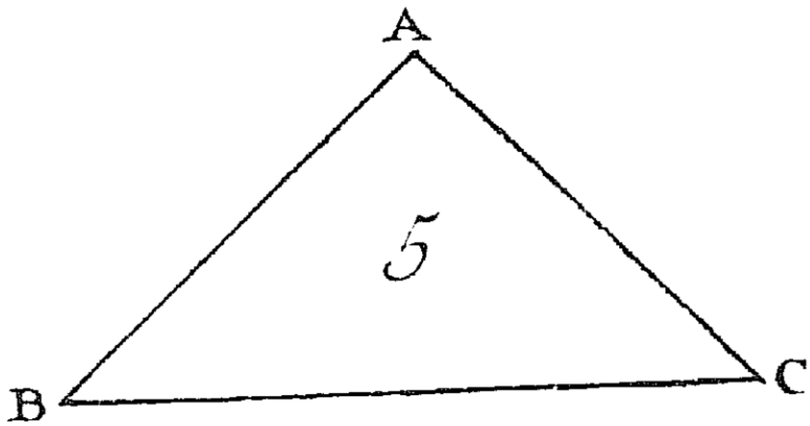
LXVIII



Si se prolonga uno de los lados del triángulo ABC, por ejemplo, el lado AB, el ángulo exterior CBE es igual a la suma de los dos ángulos interiores opuestos BCA y CAB. Puesto que si al ángulo CBA se añaden o los dos ángulos BCA y CAB, o el ángulo CBE, la suma será siempre igual a 180 grados o a dos ángulos rectos (Artículo LXIV).

LXIX

Conociendo uno de los ángulos de un triángulo isósceles ABC se conocen los otros dos.



Cuando se conoce el ángulo en el vértice A es claro que si se resta el número de grados que contiene este ángulo de los 180 grados que miden los tres ángulos del triángulo, la mitad de la diferencia será la medida de cada uno de los ángulos B y C, tomados sobre su base.

Si lo que se conoce es uno de los dos ángulos B o C tomados sobre la base, entonces el doble de su valor se resta de 180 grados. La diferencia es la medida del ángulo en el vértice A.

LXX

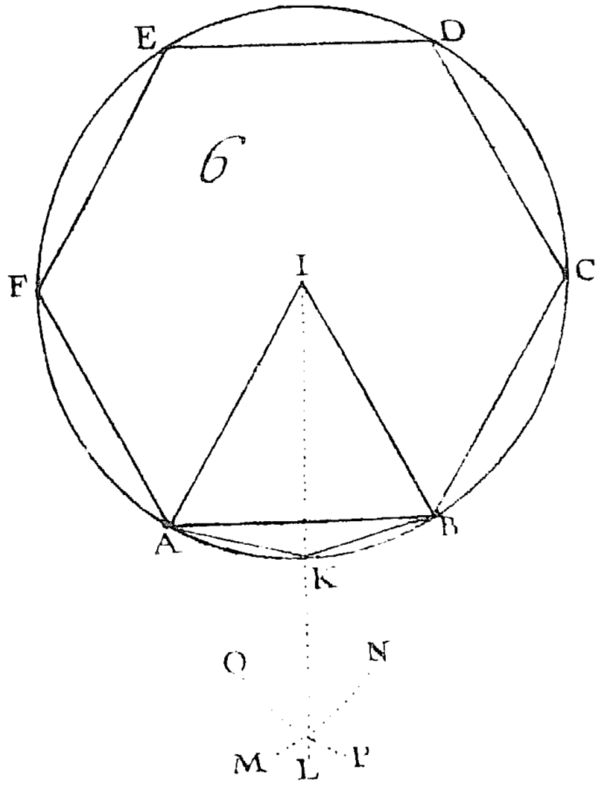
Como un triángulo equilátero no es otra cosa que un triángulo isósceles en el que cada uno de sus lados puede servir de base, es claro que sus tres ángulos son necesariamente iguales y que valen cada uno 60 grados, un tercio de 180 grados.

LXXI

De ello se deduce fácilmente la descripción del hexágono o polígono de seis lados que habíamos prometido (Artículo XXIV).

Para encontrar una línea que divida la circunferencia en seis partes iguales será necesario que esta línea sea la cuerda de un arco de 60 grados, sexta parte de 360 grados, valor de la circunferencia completa.

Supongamos pues que AB es esa cuerda. Entonces, si desde el centro I trazamos los radios AI e IB, el ángulo AIB vale 60 grados. Además, como los lados AI e IB son iguales, el triángulo AIB es isósceles. Por otro lado, como el ángulo en el vértice es de 60 grados, cada uno de los otros dos ángulos también mide 60 grados, la mitad de 120. Por tanto (Artículo LXX), el triángulo AIB es equilátero. Por consiguiente AB es igual al radio del círculo. De donde se sigue que para dibujar un hexágono es necesario abrir el compás con una abertura igual al radio y llevarlo seis veces seguidas sobre la circunferencia. Así se obtienen los seis lados del hexágono.



LXXII

A partir del hexágono ABCDEF dibujado, se puede describir fácilmente el dodecágono o polígono de doce lados.

Para ello, se divide el arco AKB, o el ángulo AIB en dos parte iguales, y AK, cuerda de la mitad del arco AKB, es uno de los lados del dodecágono.

LXXIII

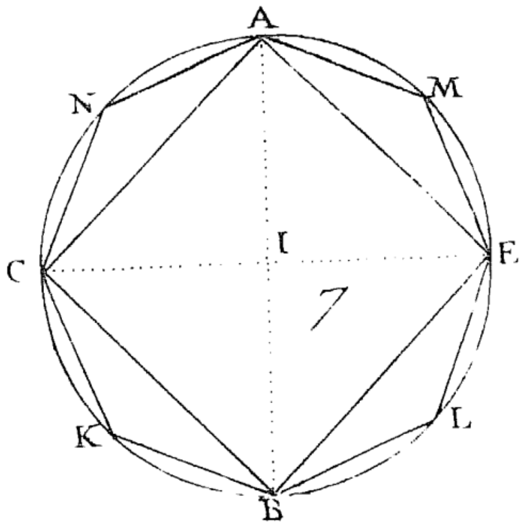
Para dividir el arco AKB en dos arcos iguales AK y KB se procede como si se tratara de cortar la cuerda AB en dos partes iguales. Es decir, desde los puntos A y B como centros, y con una abertura cualquiera, se describen los arcos MLN y OLP. A continuación, por el punto L, intersección de los dos arcos, y por el centro I se traza la línea LI que divide en dos partes iguales al arco AKB y a la cuerda AB.

LXXIV

Siguiendo el método precedente, si se divide el arco AK en dos arcos iguales, la cuerda de uno cualquiera de estos arcos es el lado del polígono de 24 lados. Del mismo modo se obtienen los polígonos de 48, 96, 192, etc. lados.

LXXV

Para describir un octógono, es decir, un polígono de 8 lados, se empieza trazando un cuadrado en el círculo. Esto se logra dibujando dos diámetros AIB y CIE perpendiculares y uniendo sus extremos por las líneas AC, CB, BE, y AE.



Dada la regularidad del círculo y la igualdad de los cuatro ángulos que forman las perpendiculares AIB y CIE, los cuatro lados AC, CB, BE y EA son necesariamente iguales y están igualmente inclinados los unos sobre los otros. Esto sólo puede darse en un cuadrado.

En el cuadrado así descrito, utilizando el método precedente, se divide cada uno de los arcos CKB, BLE, etc. en dos partes iguales. Esto da lugar al octógono CKBLEMAN.

Dividiendo cada uno de los arcos CK, KB, etc. en 2, en 4, en 8 etc. partes iguales se obtienen los polígonos de 16, 32, 64, etc. lados.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

SEGUNDA PARTE

Del método geométrico para comparar figuras rectilíneas

Si se presta atención a lo que hemos dicho para mostrar cómo se ha llegado a medir terrenos, habrá que reconocer que las posiciones de unas líneas con respecto a otras requieren advertencias dignas de atención por sí mismas, independientemente de la utilidad que puedan tener en la práctica.

Es presumible que estas observaciones obligaron a los primeros geómetras a avanzar más allá de sus descubrimientos; porque no son solamente las necesidades las que determinan a los hombres, también la curiosidad es frecuentemente un gran motivo para impulsar sus investigaciones.

Lo que ha debido contribuir también al progreso de la geometría es el gusto que se tiene naturalmente por su precisión rigurosa, sin la que el espíritu jamás queda satisfecho.

Así, dado que midiendo las figuras se percibe que en infinidad de casos las escalas y los semicírculos no dan más que valores aproximados de líneas o de ángulos, se han buscado métodos que suplan el defecto de estos instrumentos.

Aquí nosotros retomaremos las figuras rectilíneas; pero en las operaciones que haremos para descubrir sus justas relaciones sólo nos serviremos de la regla y el compás.

Ocurre con frecuencia que se tiene la necesidad de reunir en una misma figura varias figuras que son semejantes, o de descomponer una figura en otras figuras de la misma especie. De entrada, esto se puede hacer operando sobre los rectángulos puesto que todas las figuras rectilíneas no son más que reuniones de triángulos y que cada triangulo es la mitad de un rectángulo que tiene su misma altura y su misma base.

I

Para comparar los rectángulos es necesario saber transformar un rectángulo cualquiera en otro que tenga la misma área, pero cuya altura sea diferente. Porque cuando dos rectángulos se transforman en otros dos de la misma altura, sólo se distinguen en sus bases. El mayor es el que tiene la base más grande y contiene al menor, de la misma manera que su base contiene la del rectángulo más pequeño. Comúnmente esto se enuncia así: dos rectángulos que tienen la misma altura están en la misma razón que sus bases.

II

Para sumar estos dos rectángulos basta con poner uno al lado del otro.

III

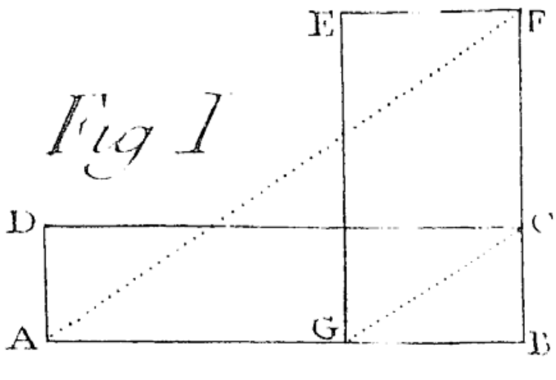
No resulta más difícil restar el más pequeño del más grande.

IV

Para dividir un rectángulo en un número determinado de rectángulos iguales, es necesario dividir su base en el mismo número de partes iguales. A continuación, se levantan perpendiculares desde los puntos de división.

V

Fig 1



Propongámonos transformar el rectángulo ABCD en otro BFEG, que tenga la misma área y cuya altura sea BF. Advirtamos que, puesto que su área es el producto de su altura por su base, será necesario que el rectángulo buscado BFEG, cuya altura es mayor que BC, tenga su base más pequeña que AB. Es decir, que si BF es, por ejemplo, el doble de BC entonces BG sólo debe ser la mitad de AB.

Si BF fuese el triple de BC, BG sólo sería el tercio de AB.

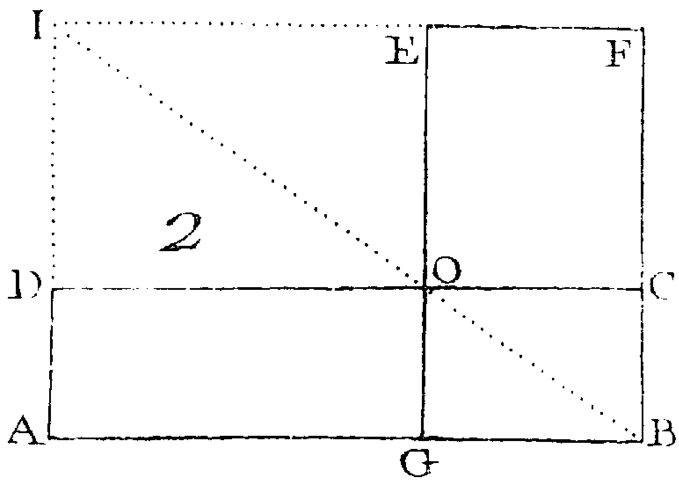
También se observa que si BF, en lugar de contener a BC un número exacto de veces, lo contuviese una fracción, como dos veces y un tercio, el rectángulo BFEG no podría tener la misma área que el rectángulo ABCD salvo que su base también estuviese contenida dos veces y un tercio en la base AB.

En general, se ve fácilmente que para que dos rectángulos ABCD y BFEG tengan la misma área es necesario que la base BG de uno esté contenida en la base AB del otro, como la altura BC en la altura BF.

Sólo se trata pues de dividir la línea AB, de modo que AB sea a GB como BF a BC. Esto se logra (1ª Parte. Artículo XLI) trazando la línea FA y, por el punto dado C, la paralela CG.

VI

Para transformar el rectángulo ABCD en otro rectángulo BFEG equivalente[1] que tenga una altura dada BF, se puede emplear un método menos natural que el precedente, pero más cómodo.



En primer lugar, se prolonga AD hasta que corte en el punto I a la recta FEI, trazada por el punto F paralelamente a AB. Acto seguido, se traza la diagonal BI y por el punto O, donde dicha diagonal corta al lado DC, se traza GOE paralelamente a FB. Con esto, el rectángulo BFEG es equivalente al rectángulo ABCD.

Para probarlo basta con observar que, sacando de los rectángulos ABCD y BFEG la parte común OCBG, el rectángulo ADOG es equivalente al rectángulo EOCF.

Si se presta atención a la igualdad de los dos triángulos IBF e IBA se observa que, quitando de estos triángulos dos figuras iguales, los restos también son iguales. Pero el triángulo IAB se convierte en el rectángulo ADOG si se eliminan los triángulos IDO y OGB. Del mismo modo, el triángulo IBF se transforma en el rectángulo EOCF, si se sustraen los triángulos IEO y OCB iguales a los dos primeros. Así pues, los dos

[1] Recordemos que dos figuras son equivalentes si tienen la misma área (Nota de los traductores).

rectángulos ADOG y EOCF, que sobran de los dos triángulos, son equivalentes, así como los rectángulos ABCD y BFEG.

VII

Este segundo procedimiento para transformar un rectángulo en otro confirma el principio que supone el primero, método que sólo parecía apoyarse en una simple inducción.

De la equivalencia de los rectángulos ABCD y BFEG se había concluido que es necesario que AB sea a BG como BF a BC. Esto es algo que se puede probar ahora por el artículo precedente.

Porque siendo manifiestamente semejantes los triángulos IAB y OGB, la base AB del grande es a la base GB del pequeño como la altura IA es a la altura OG; o como BF es a BC, sus iguales. Entonces, AB es a GB como BF es a BC, conforme al principio del artículo V.

VIII

Del mismo modo en que hemos demostrado que de la equivalencia de dos rectángulos ABCD y BFEG se sigue que la altura BF es a la altura BC, como la base AB es a la base BC, también se demuestra lo siguiente: si cuatro líneas BF, BC, AB y BG son tales que la primera es a la segunda como la tercera es a la cuarta, entonces el rectángulo que tiene por altura y por base la primera y la cuarta de estas líneas es equivalente al rectángulo que tiene por altura y por base la segunda y la tercera.

IX

Cuando cuatro cantidades, como las líneas precedentes BF, BC, AB y BG son tales que la primera es a la segunda como la tercera es a la cuarta, se dice que estas cuatro cantidades están en proporción o que forman una proporción. Así, 6, 9, 18 y 27 están en proporción porque 6 está contenido en 9 de la misma manera que 18 está contenido en 27. Lo mismo sucede con 15, 25, 75 y 125; etc.

X

De las cuatro cantidades de una proporción, la primera y la cuarta se llaman términos extremos, o simplemente extremos; la segunda y la tercera se llaman términos medios, o simplemente medios.

Sirviéndose de las definiciones precedentes queda claro que las proposiciones contenidas en los artículos VII y VIII se enuncian así:

XI

Si cuatro cantidades están en proporción, entonces el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

XII

Si cuatro cantidades son tales que el producto de los extremos es igual al producto de los medios, entonces estas cuatro cantidades están en proporción.

XIII

Conviene prestar mucha atención a los dos artículos precedentes porque tienen una gran utilidad. Se deduce, entre otras cosas, la demostración de la Regla que en Aritmética se denomina Regla de Tres. Para dar una idea de esta Regla estudiaremos un ejemplo, pues ésta es la forma más simple de entenderla.

Supongamos que 24 obreros han hecho 30 toesas de obra en un cierto tiempo. Se pregunta, ¿cuánto harán 64 obreros en el mismo tiempo?

Es evidente que para resolver la cuestión es necesario determinar un número que esté con 64 en la misma razón que 30 lo está con 24. Siguiendo lo que hemos visto, este número será tal que su producto por 24 iguale al producto de 30 por 64. El producto de 30 por 64 es 1.920; en consecuencia, el número buscado será aquél que multiplicado por 24 dé 1.920.

Por poca idea que se tenga de las operaciones de la Aritmética se percibe fácilmente que este número deberá ser el cociente de la división de 1.920 por 24; es decir, 80.

En general, para encontrar el cuarto término de una proporción, cuyos tres primeros son conocidos, es necesario multiplicar el segundo por el tercero y dividir este producto por el primer término de la proporción.

XIV

Un ejemplo tan simple como el que acabamos de escoger quizás no hace sentir la necesidad del método precedente. Sólo el sentido común bastaría para determinar el número pedido. Se ve que 30 excede a 24 en un cuarto[2]. Entonces es necesario que el número buscado exceda a 64 en un cuarto; lo que da 80 [3]. Sin embargo hay casos en los que se necesitaría mucho más tiempo para encontrar la relación entre los dos primeros números de la proporción.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere determinar un cuarto término proporcional a los tres números 259, 407 y 483.

Para encontrarlo por el método precedente es necesario multiplicar 483 por 407 y dividir 196.581, que es el producto, por 259; lo que da 759 para el cuarto término buscado.

También se podría obtener este término por tanteo. Se habría podido descubrir, por ejemplo, que 148, exceso de 407 sobre 259, contiene cuatro de las séptimas partes de 259; y que así sería necesario añadir a 483 el número 276, que contiene cuatro de sus séptimas partes. Pero la generalidad y la seguridad del método precedente nos salva siempre del inconveniente de los tanteos, que incluso se convertirán en inútiles en muchas ocasiones.

---

[2] Es decir: $30 = 24 + 6 = 24 + (24/4)$ (Nota de los traductores).

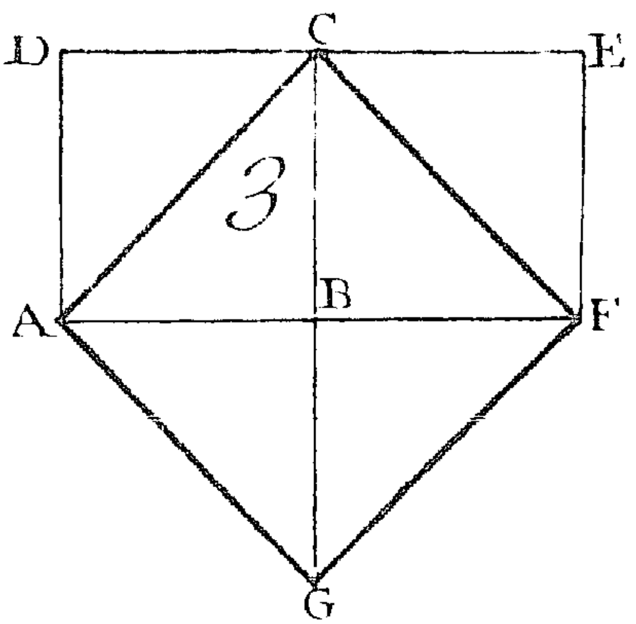
[3] Utilizando la notación algebraica, $x = 64 + (64/4) = 64 + 16 = 80$ (Nota de los traductores).

XV

Cuando se quieran sumar dos cuadrados, esta adición se hará como la de dos rectángulos, dado que los cuadrados son rectángulos cuya altura y cuya base son iguales. Se transformará pues uno de los cuadrados -el más pequeño, por ejemplo- en un rectángulo que tenga el lado del grande por altura. También se podría dar la altura del cuadrado pequeño a los dos, u otra altura cualquiera. Pero el problema que no se puede dejar de proponer es el de construir un cuadrado equivalente a otros dos. Problema para el que resulta fácil encontrar la siguiente solución.

XVI

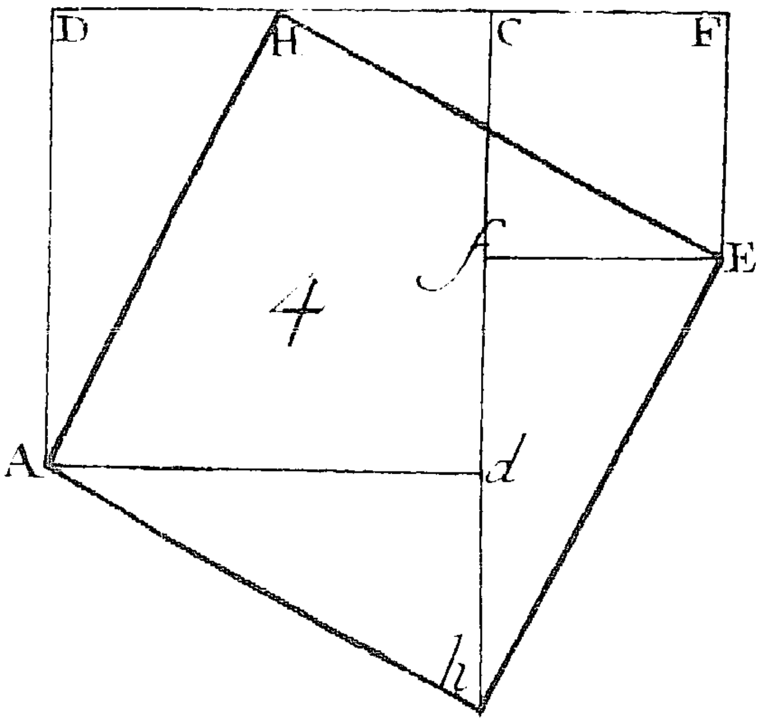
Supongamos, en primer lugar, que los dos cuadrados ABCD y CBFE, con los que se quiere hacer un solo cuadrado, sean iguales entre sí.



Se observa fácilmente que si se trazan las diagonales AC y CF, entonces los triángulos ABC y CBF equivalen a un cuadrado. Entonces, transportando por debajo de AF los otros dos triángulos DCA y CEF, se obtendrá el cuadrado ACFG cuyo lado AC será la diagonal del cuadrado ABCD y cuya área será igual a la de los dos cuadrados propuestos, lo que no necesita ser demostrado.

XVII

Supongamos ahora que se quiere construir un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados desiguales ADC*d* y CFE*f* o, lo que es lo mismo, transformar la figura ADFE*fd* en un cuadrado.



Siguiendo la línea del método precedente, se investigará si es posible encontrar algún punto H sobre la línea DF, tal que:

1º Dibujando las líneas AH y HE, y haciendo girar los triángulos ADH y EFH alrededor de los puntos A y E hasta que ocupen las posiciones A*dh* y E*fh*, los dos triángulos se unan en *h*.
2º Los cuatro lados AH, HE, E*h* y *h*A sean iguales y perpendiculares unos a otros.

Este punto H se encontrará haciendo DH igual al lado CF o EF. De la igualdad entre DH y CF se sigue, en primer lugar, que si se hace girar ADH alrededor de A hasta que llegue a la posición A*dh*, el punto H coincide con *h* que dista del punto C un intervalo igual a DF.

De la misma igualdad entre DH y CF también se sigue que HF es igual a DC, y que si el triángulo EFH gira alrededor de E hasta alcanzar la posición E*fh*, entonces H coincide con *h,* que dista de C un intervalo igual a DF.

Entonces, la figura ADFE*fd* se convertirá en una figura AHE*h* con cuatro lados.

Ahora se trata de ver si estos cuatro lados son iguales y perpendiculares unos a otros.

La igualdad de estos cuatro lados es evidente dado que A*h* y *h*E serán los mismos que AH y HE y la igualdad de estos dos últimos se deducirá de que, siendo DH igual a CF, o a FE, los dos triángulos ADH y HEF serán equivalentes y semejantes.

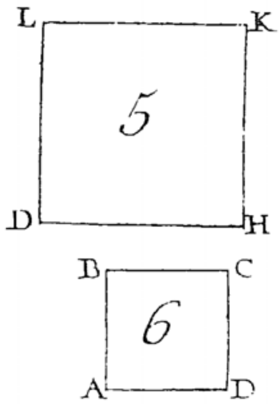
Entonces sólo falta ver si los lados de la figura AHE*h* determinan ángulos rectos. Esto es fácil de asegurar si se observa que, mientras HAD gira alrededor de A para llegar a *h*A*d*, el lado AH gira lo mismo que el AD. Entonces, el lado AD describirá el ángulo recto DA*d* al transformarse en A*d*. Por consiguiente, el lado AH también describirá el ángulo recto HA*h* al convertirse en A*h*.

Por lo que se refiere a los otros ángulo H, E y *h* es evidente que necesariamente serán rectos, dado que no es posible que una figura limitada por cuatro lados iguales tenga un ángulo recto sin que los otros tres también lo sean.

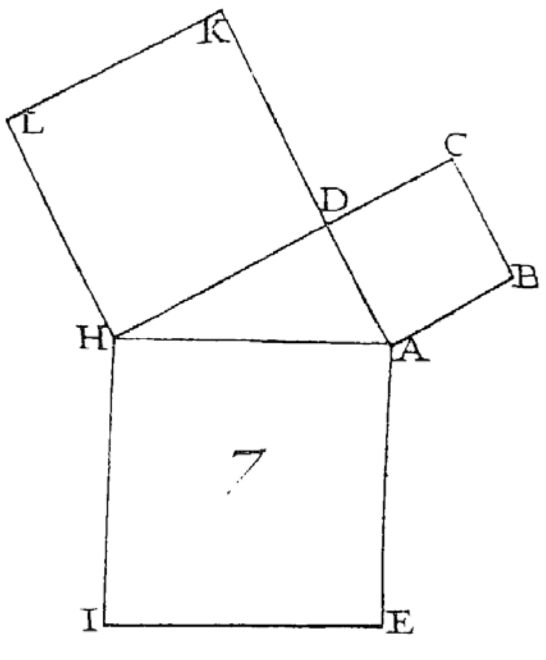
XVIII

Si se considera que los dos cuadrados ADC*d* y CFE*f* están construidos uno sobre AD, lado mediano del triángulo ADH, y el otro sobre EF, igual a DH, lado menor del mismo triángulo ADH; y que el cuadrado AHE*h*, equivalente a la suma de los otros dos, está descrito sobre el lado mayor AH, que se llama hipotenusa del triángulo rectángulo, se descubrirá la famosa propiedad de los triángulos rectángulos: el cuadrado de la hipotenusa es equivalente a la suma de los cuadrados construidos sobre los otros dos lados.

XIX

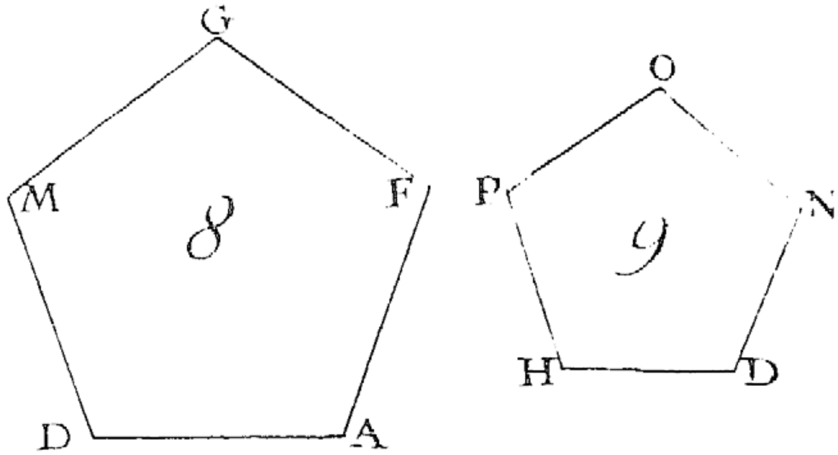


De modo que, cuando de dos cuadrados HDLK y ABCD no se quiera hacer más que uno solo, será inútil ponerlos uno al lado de otro y descomponerlos, como se ha hecho en el artículo XVII.

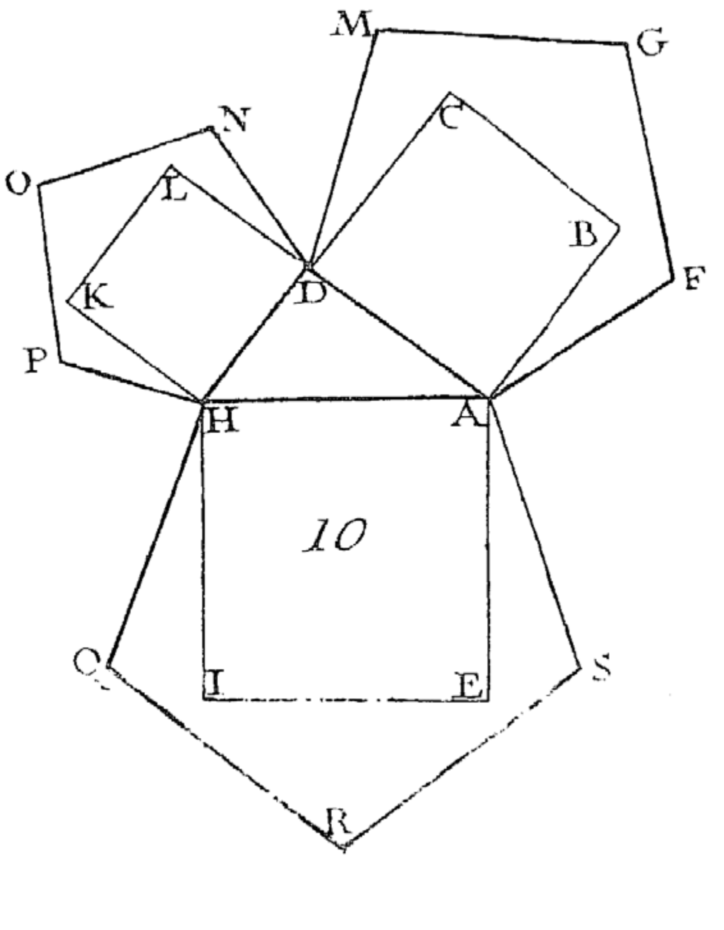


Será suficiente colocar los lados AD y DH de manera que formen un ángulo recto y trazar la línea AH, puesto que entonces esta línea será el lado del cuadrado buscado AHIE.

XX



Si se tienen dos figuras semejantes, DAFGM y DHPON, y se quiere construir una tercera figura equivalente a la suma de las otras dos y semejante a cada una de ellas, bastará con poner las bases AD y HD de estas figuras sobre los dos lados de un ángulo recto ADH, y la hipotenusa AH del triángulo ADH será la base de la figura solicitada.



En efecto, supongamos que los cuadrados ABCD, DHKL y AHIE se han dibujado sobre las bases de tres figuras semejantes. Por el artículo XVIII, resulta que el cuadrado AHIE es equivalente a la suma de los cuadrados ABCD y DHKL. Además (1ª Parte. Artículo XLVII), las áreas de las figuras semejantes están entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos. Por tanto, los tres cuadrados ABCD, DHKL y AHIE son las mismas partes de las figuras DAFGM, DHPON y AHQRS.

De aquí se concluye fácilmente que la figura AHQRS es equivalente a la suma de las otras dos. Supongamos, por ejemplo, que cada uno de estos cuadrados es la mitad de la figura en la que está contenido. En esta situación, nadie pondrá en duda que la figura AHQRS es equivalente a la suma de las otros dos, puesto que su mitad equivale a la suma de las mitades de las dos figuras DHPON y DAFGM. Sería lo mismo si los cuadrados ABCD, DHKL y AHIE fuesen los dos tercios, los tres cuartos, etc. de las figuras DAFGM, DHPON y AHQRS.

XXI

Si se propusiese sumar tres, cuatro, etc. figuras semejantes o, lo que viene a ser lo mismo, tres, cuatro, etc. cuadrados, el método sería siempre el mismo. Cuando, por ejemplo, se sumasen tres, en primer lugar se construiría un cuadrado igual a los dos primeros; a continuación, a este nuevo cuadrado se añadiría el tercero y se obtendría un cuarto cuadrado equivalente a los tres propuestos.

XXII

De ello se sigue que si se quiere construir un cuadrado cinco, seis, etc. veces mayor que otro, bastará con seguir el método precedente para resolver el problema y también su inverso; es decir, dibujar un cuadrado que sea la quinta, la sexta, etc. parte de un cuadrado dado. Esto sólo exigirá que se recuerde el procedimiento para encontrar una cuarta proporcional a tres líneas dadas. En la tercera parte de esta obra daremos un método más directo y más cómodo para resolver este tipo de problemas.

XXIII

La adición de figuras semejantes proporciona una prueba definitiva de la necesidad de abandonar las escalas, cuando se quieren hacer las operaciones de una manera que se pueda demostrar rigurosamente.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere dibujar un cuadrado doble de otro. Aquellos que desconozcan el procedimiento dado en el artículo XVI, presumiblemente adoptarán el siguiente método.

Dividirán el lado del cuadrado dado en un gran número de partes, en 100, por ejemplo; a continuación, multiplicando 100 por 100, obtendrán 10.000 para el valor del área del cuadrado; lo que dará 20.000 para el área del cuadrado pedido.

Sin embargo, a partir de este valor no obtendrán la manera de describirlo. Para ello sería necesario que el lado del cuadrado estuviese expresado por un número, y que este número fuese tal que multiplicándolo por sí mismo (es decir, cuadrándolo) el producto diese 20.000.

Resultaría infructuoso buscar este número sobre una escala cuyas partes son centésimas del lado del primer cuadrado. Dado que el producto de 141 por sí mismo es 19.881, y el cuadrado de 142 es 20.164, los números 141 y 142 se desvían por defecto y por exceso del número que se pretende determinar.

Podría pensarse que dividiendo el lado del cuadrado dado en más de 100 partes se pudiese llegar a encontrar un número determinado de estas partes para el lado del cuadrado doble del primero. Sin embargo, por muchos ensayos que se pudieran hacer, nunca se encontrarían dos números, uno de los cuales expresase el lado o, siguiendo el lenguaje ordinario, la raíz de un cuadrado; y el otro, el lado o la raíz del cuadrado doble.

XXIV

En efecto, se demuestra en Aritmética que si dos números no son múltiplos uno del otro, es decir, si uno no contiene al otro un número exacto de veces, el cuadrado del mayor no es múltiplo del cuadrado del menor. Por ejemplo, como 5 no es divisible por 4, su cuadrado, 25, no será divisible por 16, cuadrado de 4.

Entonces, si se elevan al cuadrado dos números, de los que uno es mayor que el otro y menor que el doble, se obtienen dos números de los cuales uno es menor que el cuádruplo del otro, pero sin poder ser ni el doble ni el triple. De modo que cuando se divide el lado de un cuadrado en un número cualquiera de partes, el lado del cuadrado doble, como quedó demostrado en el artículo XVI, es la diagonal de este cuadrado y no contiene un número exacto de estas mismas partes. En el lenguaje de los geómetras esto se manifiesta diciendo que el lado de un cuadrado y su diagonal son inconmensurables.

XXV

Hagamos notar que hay gran cantidad de otras líneas que no tienen ninguna medida común.

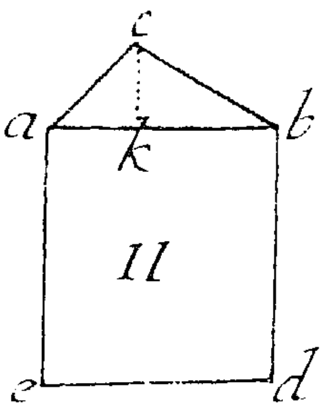
Cuando se escriben las dos sucesiones, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, etc.; y 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, etc., donde la primera contiene los números naturales y la otra sus cuadrados, se observa que, como los números que hay entre 4 y 9, entre 9 y 16, entre 16 y 25, etc. no tienen ninguna raíz, los lados de dos cuadrados, de los que uno sea el triple o quíntuple o séxtuple, etc. del otro, serán inconmensurables entre sí.

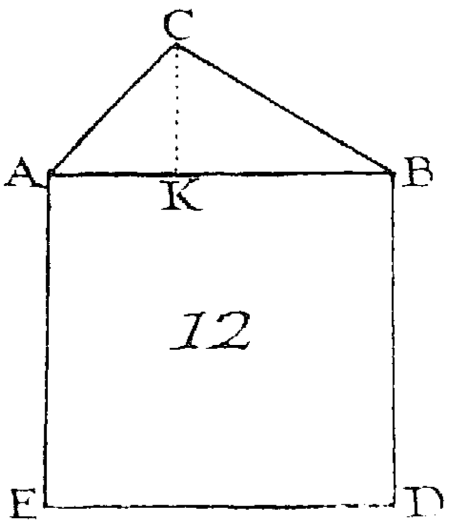
XXVI

Del hecho de que muchas líneas sean inconmensurables con otras quizás podría nacer cierta sospecha sobre la exactitud de las proposiciones que nos han servido para constatar la proporcionalidad de las figuras semejantes. Al comparar estas figuras (1ª Parte. Artículo XXXIV y sig.) siempre hemos supuesto que tenían una escala que podía servir igualmente para medir todas las partes; suposición que, a causa de lo que se acaba de decir, debería limitarse. Es preciso pues que volvamos sobre nuestros pasos y examinemos si nuestras proposiciones, para que sean verdaderas, deben someterse a ciertas modificaciones.

XXVII

Retomemos primeramente lo que se ha dicho en el artículo XXXIX de la primera parte y veamos si es verdad que triángulos tales como *abc* y ABC, cuyos ángulos son los mismos, tienen sus lados proporcionales. Supongamos, por ejemplo, que *ab* es la base del primero y la base del segundo es la recta AB, igual a la diagonal de un cuadrado del que *ab* es el lado. Con esta suposición investiguemos si la relación de AC a *ac* es la misma que la de AB a *ab*.





Teniendo en cuenta lo que ya hemos visto, por muy grande que sea el número de partes que se tomen arbitrariamente en *ab*, AB nunca contendrá un número exacto de estas partes; no obstante, es fácil darse cuenta de que, cuanto más grande sea este número, más se aproximará AB a ser medido exactamente con las partes de *ab*.

Supongamos que *ab* se divide en 100 partes. Entonces, AB contiene un número de estas partes que está comprendido entre 141 y 142 (Artículo XXIII). Tomemos 141 y despreciemos el pequeño resto; queda claro (1ª Parte. Artículo XXXIX) que AC contendrá también 141 partes de *ac*.

A continuación, supongamos que *ab* se divide en 1.000 partes. Por tanto, AB contiene un número de estas partes que está comprendido entre 1.414 y 1.415. Tomemos 1.414 y despreciemos también el resto; es obvio que AC también contendrá 1.414 milésimas partes de *ac* y que, en general, AC siempre contendrá tantas partes de *ac*, con un resto, como partes de *ab*, con un resto, contenga AB.

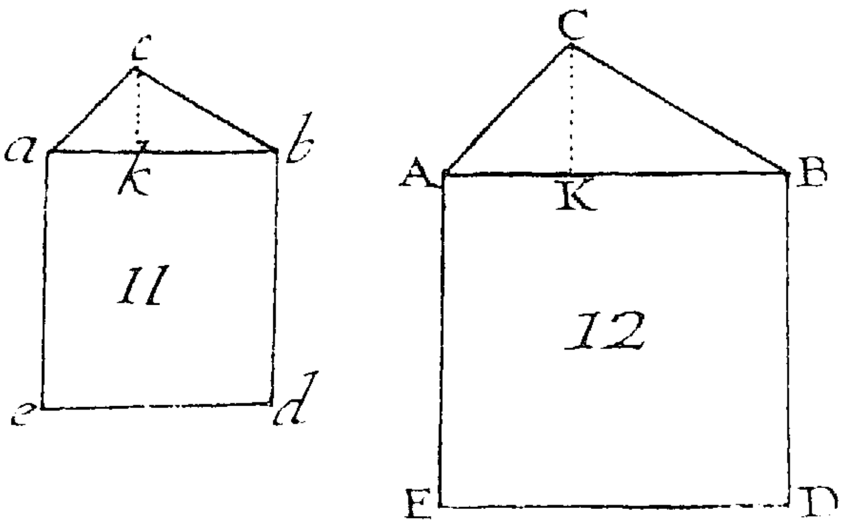
Además, estos restos serán tanto más pequeños cuanto mayor sea el número de partes de *ab*. De modo que pueden despreciarse si se imagina que el número de divisiones de *ab* se hace infinito. Podremos decir entonces que el número de partes de *ac* que contiene AC es igual al número de partes de *ab* que contiene AB, y que así AC es a AC como AB es a *ab*.

Por tanto, hemos demostrado rigurosamente que cuando dos triángulos tienen los mismos ángulos, sus lados son proporcionales, tengan sus lados una medida común o no.

La proposición (1ª Parte. Artículo XLV) de la que se obtiene la proporcionalidad de las líneas que se corresponden en las figuras semejantes se justificaría de la misma manera.

XXVIII

Con razonamientos similares puede verse que las proposiciones explicadas en los artículos XLIV y XLVII de la primera parte, en las que se ha demostrado que las áreas de los triángulos y de las figuras semejantes tienen entre sí la misma razón que los cuadrados de sus lados homólogos, son siempre verdaderas, incluso cuando los lados de estas figuras son inconmensurables.



Tomemos, por ejemplo, los triángulos semejantes ABC y *abc* en los que suponemos que las alturas son inconmensurables con sus bases. En este caso, no hay cuadrado alguno, por pequeño que sea, que pueda servir de medida común a estos triángulos y a los cuadrados construidos sobre sus bases; es decir, que las áreas de *abc* y *abde* son inconmensurables entre sí, así como las áreas de ABC y ABDE. Pero también es cierto que el triángulo ABC es al cuadrado ABDE, como el triangulo *abc* es al cuadrado *abde*.

Esto se demuestra observando que, cuanto más pequeñas sean las partes de la escala utilizada para medir AB y KC, más nos aproximaremos al número que expresa la razón de ABC a ABDE. Entonces, dividiendo siempre la escala del triángulo *abc* en el mismo número de partes, y despreciando los restos, veremos que los mismos números sirven siempre para expresar la razón del triángulo ABC al cuadrado ABDE, y la del triángulo *abc* al cuadrado *abde*.

Si la división de las escalas aumenta hasta el infinito, los restos llegarán a ser absolutamente nulos; y se podrá decir que los números que expresan la razón del triángulo *abc* al cuadrado *abde* también expresan la razón del triángulo ABC al cuadrado ABDE. Y, por tanto, el triángulo *abc* es al cuadrado *abde* como el triángulo ABC al cuadrado ABDE.

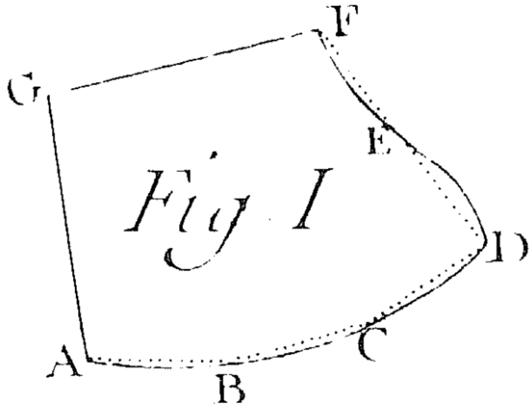
Sucederá lo mismo en todas las figuras semejantes.

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

TERCERA PARTE

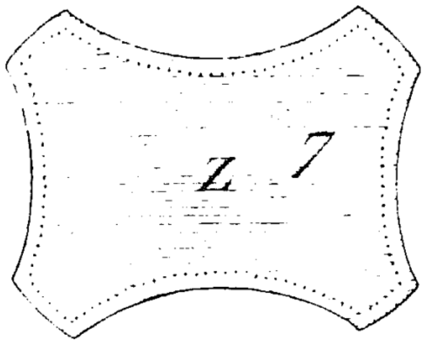
De la medida de las figuras circulares y de sus propiedades

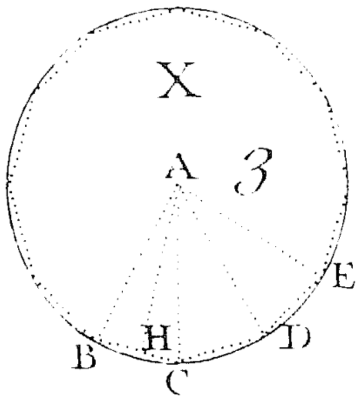
Después de haber medido toda clase de figuras rectilíneas, pretendemos medir aquellas figuras limitadas por líneas curvas. Los terrenos, y en general los espacios cuya medida se trata de averiguar, no siempre están limitados por líneas rectas.



Frecuentemente las figuras curvilíneas y las figuras mixtas, es decir, aquellas que están limitadas por líneas rectas y líneas curvas, pueden reducirse a figuras enteramente rectilíneas, como ya hemos dicho. Cuando se quiere medir una figura tal como la ABCDEFG, se puede tomar el lado AD como un conjunto de dos, de tres, etc. líneas rectas. Sustituyendo a continuación la curva FED por la recta FD se tiene la figura rectilínea ABCDFG, que difiere tan poco de la figura mixta que una puede ser tomada por la otra sin error sensible.

Sobre estas figuras se opera siguiendo los métodos precedentes. Sin embargo, los geómetras se acomodan muy poco a este tipo de operaciones; pues prefieren las que son rigurosas. Además, puede darse el caso en que la transformación de una figura curvilínea o mixta en una figura enteramente rectilínea exija que su contorno se divida en un número de partes tan grande que entonces el método común sea impracticable.

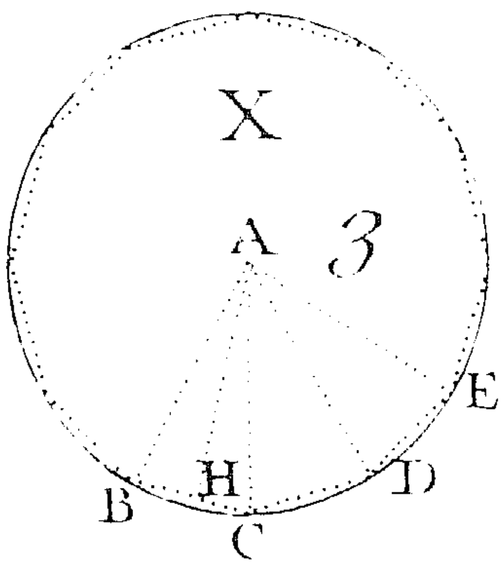




Tampoco conviene utilizar dicho procedimiento si se tiene que medir un espacio tal como el Z (fig. 7) o un círculo entero X (fig. 3). En estos casos será necesario seguir otro camino para determinar la medida de dichos espacios. Nos limitaremos a estudiar aquellos cuyos contornos contienen arcos de círculo.

I

Supongamos, en primer lugar, que se tiene que medir el área del círculo X.

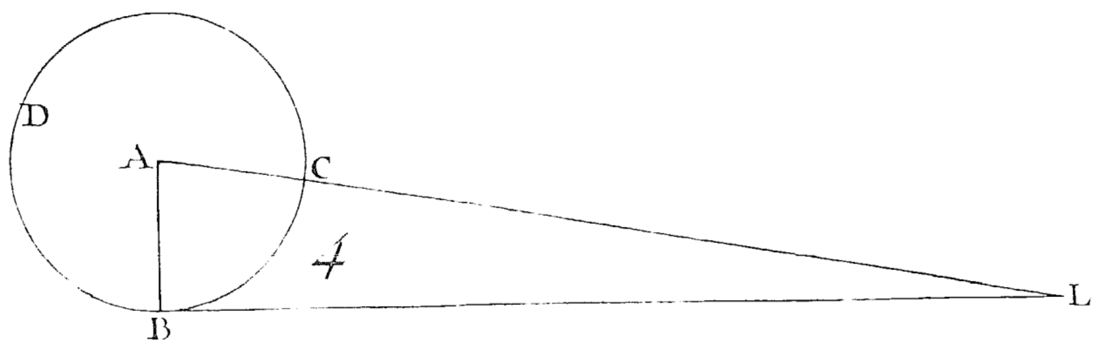


Se observa que, inscribiendo en él un polígono regular BCDE…, cuantos más lados tenga este polígono más se aproximará al círculo. Hemos visto que el área de un polígono regular (1ª Parte. Artículo XXII) es igual a tantas veces el producto del lado BC por la mitad de la apotema AH, como lados tiene el polígono; o, lo que viene a ser lo mismo, el área tiene por medida el producto del contorno entero BCDE… por la mitad de la apotema.

Entonces, como al aumentar hasta el infinito el número de lados del polígono, su área, su contorno y su apotema son iguales al área, contorno y radio del círculo, el área del círculo es igual al producto de su circunferencia por la mitad de su radio.

II

De esto se deduce que el área del círculo BCD es igual a la del triángulo ABL cuya altura es el radio AB del círculo, y cuya base es la recta BL cuya longitud es igual a la de la circunferencia.



III

Sólo se trata pues de saber la longitud del radio y de la circunferencia. Por lo que se refiere al radio, su medida es fácil; pero no ocurre lo mismo con la circunferencia. Para tener su medida, se puede rodear el círculo con un hilo, lo que a menudo es suficiente en la práctica.

Pero, hasta el momento, no se ha logrado medir geométricamente la circunferencia del círculo; es decir, no se ha conseguido determinar exactamente la razón que tiene con el radio. Se aproxima esta razón hasta las cienmilésimas, las millonésimas e incluso tanto como se quiera sin que aun así se pueda determinar rigurosamente.

IV

La aproximación más simple que se ha encontrado es la que intentó Arquímedes. Si el diámetro tiene 7 partes, entonces el número de estas partes que contiene la circunferencia está entre 21 y 22; y de hecho se aproxima mucho más a 22 que a 21.

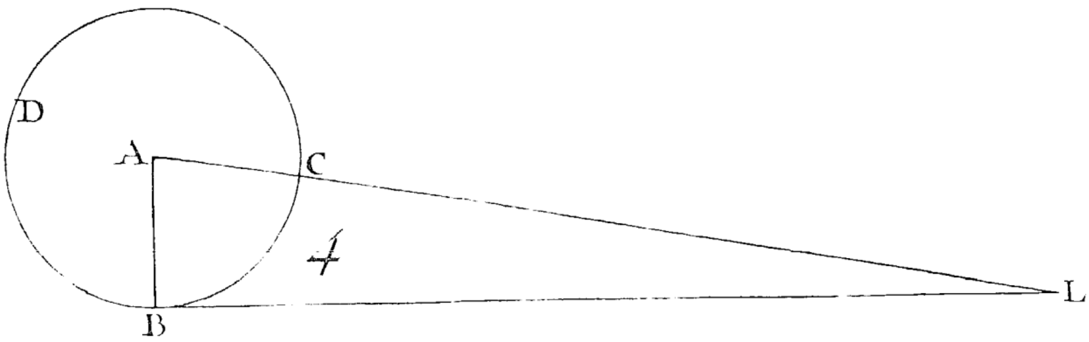
V

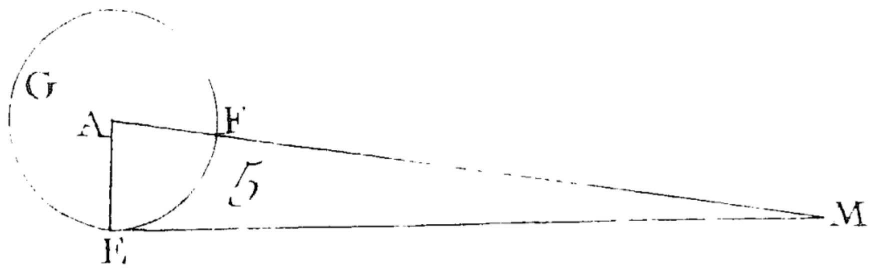
Por lo demás, queda claro que si se sabe exactamente la razón de una sola circunferencia a su radio, se sabrá la de todas las circunferencias a sus radios; debiendo ser esta razón la misma en todos los círculos. Esta proposición puede parecer tan simple que no necesite ser demostrada, dado que, cualesquiera que fuesen las operaciones para medir una circunferencia, sirviéndose de partes de su radio, serían las mismas que se harían para medir cualquier otra circunferencia; y así se encontraría el mismo número de partes de su radio.

VI

Es evidente que los círculos satisfacen la propiedad general de todas las figuras semejantes (1ª Parte. Artículo XLVII); quiero decir, que sus áreas tienen la misma razón que los cuadrados de sus lados homólogos; pero, como para aplicar esta proposición a los círculos no se pueden tomar sus lados, será necesario servirse de los radios. Entonces se verá que los círculos tienen sus áreas proporcionales a los cuadrados de sus radios.

Si de entrada no nos parece que esta proposición se pueda deducir de lo que hemos dicho en el artículo XLVII de la primera parte, deberemos comparar las áreas de los círculos BCD y EFG, o las de los triángulos ABL y AEM equivalentes a ellos (Artículo II), suponiendo que sus bases BL y EM son los desarrollos de las circunferencias BCD y EFH, y que sus alturas son los radios AB y AE.





De acuerdo con el artículo precedente estos triángulos son semejantes, luego sus áreas están en la misma razón que los cuadrados de sus lados homólogos AB y AE, radios de los círculos BCD y EFG. Entonces, etc.

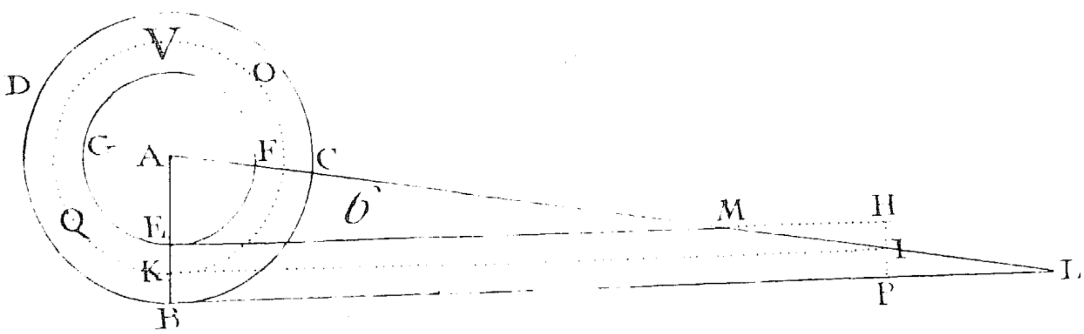
VII

Los círculos, como todas las figuras semejantes, tienen la siguiente propiedad: si se toman los tres lados de un triángulo rectángulo como radios y se describen tres círculos, aquél cuyo radio sea la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

Así, siempre se puede encontrar un círculo equivalente a dos círculos dados, y esto sin tomarse la molestia de medir cada uno de estos círculos. Si, por ejemplo, se quiere hacer una fuente que contenga tanta agua como otras dos, teniendo las tres la misma profundidad, o si se quiere determinar la abertura de una cañería por la que corra tanta agua como por dos cañerías dadas, el problema se resolverá fácilmente siguiendo el camino que acabamos de indicar.

VIII

Si se quiere medir el área de la corona circular V, figura encerrada entre dos círculos concéntricos EFG y BCD (es decir, entre dos círculos que tengan un centro común), lo primero que se debe hacer es medir separadamente las áreas de los dos círculos y después restar la menor de la mayor. Pero es fácil darse cuenta de que en la práctica el problema se puede resolver de una manera más cómoda.



Imaginemos un triángulo ABL que tiene el radio AB como altura y cuya base es la recta BL igual a la circunferencia BCD. Si por el punto E se traza la recta EM paralela a BL, entonces esta recta es igual a la circunferencia EFG.

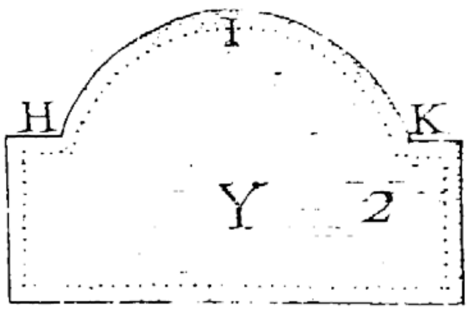
En efecto, debido a la semejanza de los triángulos AEM y ABL, hay la misma proporción entre AB y BL que entre AE y EM. Además, por hipótesis, BL es igual a la circunferencia cuyo radio es AB; por tanto, EM es igual a la circunferencia que tiene por radio la línea AE, contenida en AB. Lo mismo sucederá con cualquier otra línea KI paralela a BL; a saber, siempre será igual a la circunferencia en la que AK sería el radio.

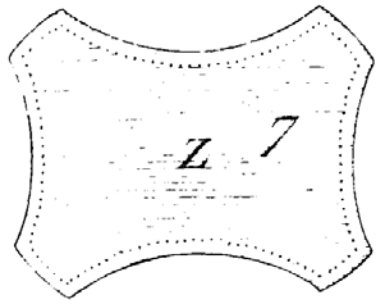
De la supuesta igualdad entre la circunferencia EFG y la recta EM, sigue necesariamente la equivalencia del triángulo AEM con el círculo EFG. Entonces, el espacio rectilíneo EBLM es equivalente a la corona propuesta V. Este espacio EBLM se puede transformar fácilmente en un rectángulo EBPH, dividiendo ML en dos partes iguales MI e IL, y trazando por I la perpendicular HIP a BL. Así se obtiene el triángulo MHI igual al triángulo PLI.

Si por el punto I se traza la paralela IK a BL, dicha paralela divide a EB en dos partes iguales. La corona propuesta, equivalente al espacio EBLM o al rectángulo EBPH, tiene por área el producto de EB por KI, circunferencia de radio AK.

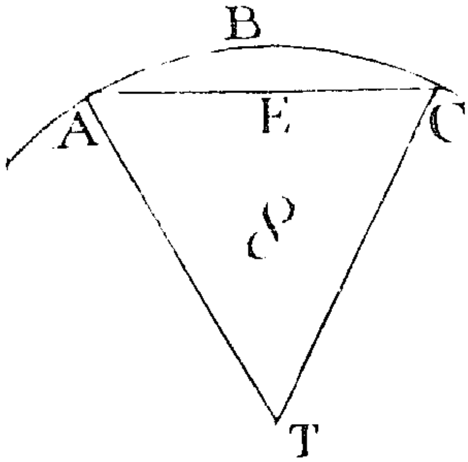
Entonces, para medir una corona V es necesario multiplicar su anchura EB por la longitud de la circunferencia KOQ, llamada circunferencia media entre las circunferencias BCD y EFG porque sobrepasa a la circunferencia menor EFG, o la recta EM, en una cantidad MH igual a PL, cantidad en la que es sobrepasada por la circunferencia mayor BCD, o por la recta BL.

IX





Cuando se trate de medir una figura Y, compuesta por arcos de círculos y por líneas rectas, o una figura Z, compuesta únicamente por arcos de círculos, toda la dificultad se reducirá a medir los segmentos de círculo; es decir, espacios tales como ABCE limitados por un arco ABC y por una cuerda AC.



Ello se debe a que las figuras enteramente compuestas por arcos de círculos o por arcos y líneas rectas, se pueden considerar como figuras rectilíneas a las que se añaden o quitan ciertos segmentos.

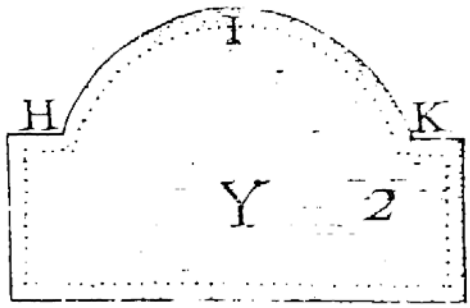
X

El área de un segmento cualquiera ABCE es fácil de calcular cuando se tiene la del círculo; porque cuando se trazan las líneas AT y CT al punto T, centro del arco, se forma la figura ABCT llamada sector, cuya área es a la del círculo como el arco ABC es a la circunferencia entera. Por consiguiente, el área del sector es igual al producto de la mitad del radio AT por el arco ABC.

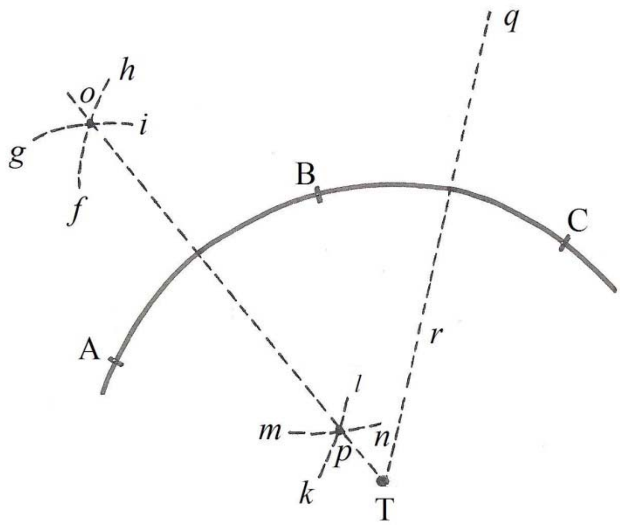
Así pues, una vez determinada el área del sector, bastará con restarle el área triángulo ACT para obtener la del segmento ABCE.

XI

Ocurre con frecuencia que, cuando se pretende medir una figura tal como la Y, se desconoce el centro del arco HIK. Sin este centro no se puede medir la figura, puesto que el método precedente exige el conocimiento del radio.



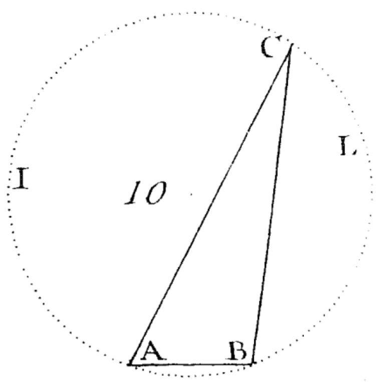
Es necesario que sepamos encontrar el centro de un arco cualquiera del círculo.



Sea ABC el arco del círculo propuesto. Si sobre este arco se toman dos puntos cualesquiera A y B y, con centro en dichos puntos, se describen los arcos *goi, foh, lpk* y *mpn* -los dos primeros con un radio cualquiera y los otros dos con este mismo radio o con otro cualquiera- es claro que el centro del arco ABC está sobre la línea *op* que une los puntos de intersección *o* y *p*.

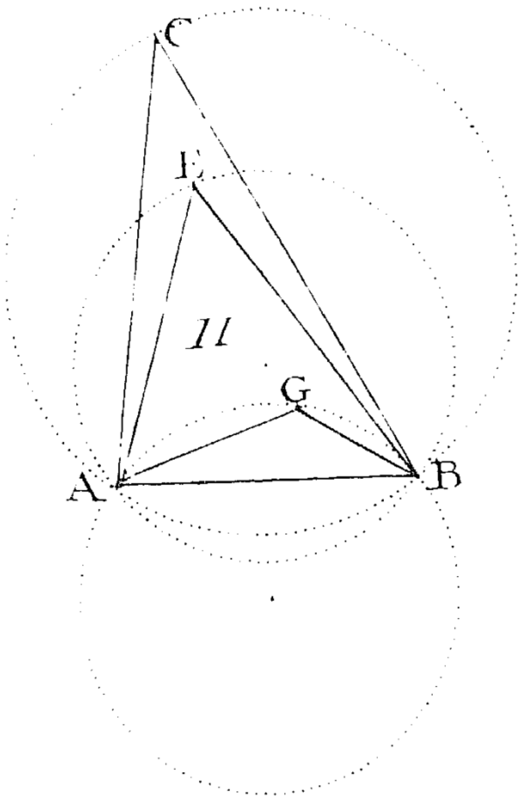
Tomando a continuación un tercer punto C sobre el arco ABC, y sirviéndose de B y de C de la misma manera que nos hemos servido de A y de B, se trazará una recta *qr* sobre la que también deberá encontrarse el centro pedido. Por tanto, ese centro es el punto T, intersección de las líneas *op* y *qr*.

XII



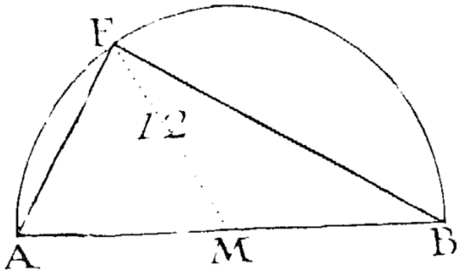
Así, para cualquier distribución de tres puntos, con tal que no estén en línea recta, siempre se pueden unir por un arco de circulo; o, lo que viene a ser lo mismo, cualquiera que sea la proporción de los lados AC y BC de un triángulo ABC con su base, siempre se puede circunscribir un círculo a este triángulo.

XIII



Con el método que acabamos de describir para circunscribir un círculo a un triángulo, aplicado sucesivamente a diferentes triángulos ABC, AEB y AGB más o menos elevados respecto de su base AB, se observa que -pasando de un triángulo ACB, cuyo ángulo en el vértice es muy agudo, a otros triángulos AEB y AGB cuyos ángulos en el vértice son más abiertos- el centro del círculo circunscrito se aproxima continuamente a AB.

Después, cuando el ángulo en el vértice AGB ha alcanzado una cierta abertura, este centro pasa por debajo de AB. Viendo pasar este centro por debajo de AB después de haberlo visto por encima, me parece que debe venir al espíritu investigar de qué tipo será el triángulo AFB, cuando el círculo circunscrito tenga su centro sobre AB.



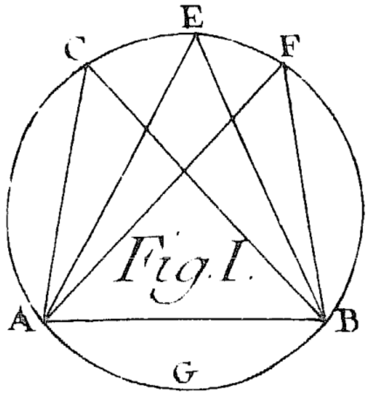
Para descubrir este triángulo AFB, empecemos por notar que, en este caso particular, la porción del círculo circunscrito al triángulo debe ser exactamente un semicírculo. En efecto, si el centro del círculo debe encontrarse sobre la base AB, cuyos extremos están en la circunferencia, entonces el centro M sólo podrá estar situado en el punto medio de AB. Por tanto, AB será necesariamente un diámetro.

A continuación se observa que, si desde cualquier punto F del semicírculo se trazan las líneas FA y FB, entonces el ángulo AFB es recto. En efecto, si se traza FM los triángulos AFM y MFB son isósceles; dado que los ángulos AFM y MFB son respectivamente iguales a los ángulos FAM y FBM. En otras palabras, el ángulo total AFB es igual a la suma de los ángulos FAM y FBM. Además, la suma de los tres ángulos AFB, FAM y FBM es igual a dos rectos. En consecuencia, el ángulo AFB es recto.

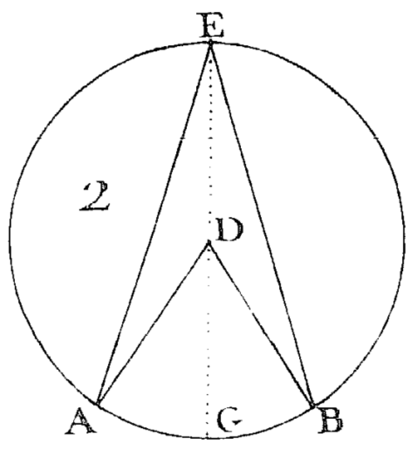
Por tanto, si se describe sobre la base AB un triángulo rectángulo cualquiera, este triángulo tiene la propiedad de estar inscrito en el círculo cuyo centro está sobre la base.

XIV

Esta propiedad del círculo -el ángulo que tiene su vértice en la semicircunferencia y que se apoya sobre el diámetro, es siempre recto- nos lleva a investigar si las otras partes del círculo tienen alguna propiedad similar. Por ejemplo, los ángulos ACB, AEB y AFB tomados en un segmento ACEFB, no serán todos iguales entre sí, como lo son los del semicírculo.



Para aclarar esta cuestión, empezaremos por determinar la amplitud de uno de estos ángulos y veremos inmediatamente que los otros tienen el mismo valor. Tomemos, por ejemplo, el ángulo AEB cuyo vértice E está situado en la mitad del arco AEB.



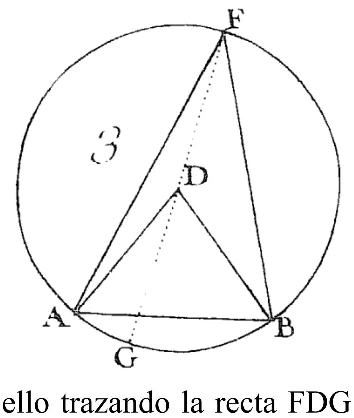
Como la línea EDG que pasa por el centro D divide a este ángulo en dos partes iguales, será suficiente medir el ángulo AEG, su mitad, o lo que es lo mismo, bastará con saber qué parte de un ángulo ADG ya medido es el ángulo AEG. Digo que el ángulo ADG ya está medido porque sabemos que el arco AG es su medida. (1ª Parte. Artículo LII).

Si se presta atención a que el triángulo AED es isósceles, se ve fácilmente que el ángulo AEG es la mitad del ángulo ADG. En efecto, los ángulos AED y EAD son iguales (1ª Parte. Artículo XXXI). Además, la suma de estos dos ángulos es igual al ángulo exterior ADG (1ª Parte. Artículo LXVIII). Entonces, el ángulo AED o AEG es la mitad del ángulo ADG.

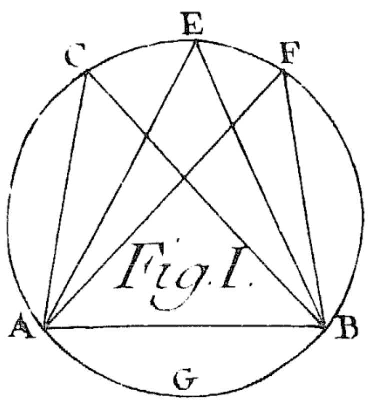
Por la misma razón, el ángulo DEB será la mitad del ángulo GDB. Por tanto, el ángulo total AEB será igual a la mitad del ángulo ADB. En consecuencia, su medida será la mitad del arco AGB.

XV

Una vez medido el ángulo AEB, para saber si es igual a cada uno de los ángulos que tienen su vértice en el mismo segmento, es necesario examinar si uno cualquiera de dichos ángulos, por ejemplo el AFB, también es la mitad del ángulo con centro en ADB.



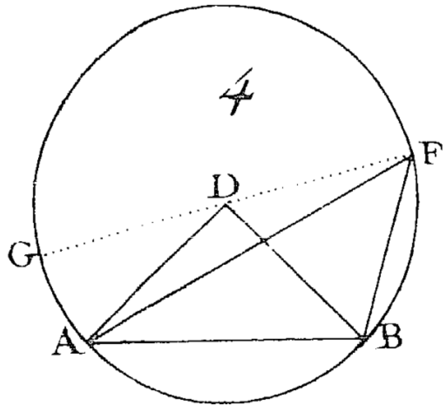
Nos aseguraremos de ello trazando la recta FDG por el centro del círculo. Con esto se ve que el ángulo AFB está compuesto por otros dos, el AFD y el DFB, que (en virtud del artículo precedente) son las mitades de los ángulos ADG y GDB, respectivamente. De ahí se concluye que el ángulo total AFB es la mitad del ángulo ADB.



Aplicando el mismo razonamiento a los ángulos ACB, AEB y AFB, que tienen sus vértices en la circunferencia y que se apoyan sobre el mismo arco AGB, se puede concluir que estos ángulos son iguales entre sí, tal como habíamos supuesto en el artículo anterior.

XVI

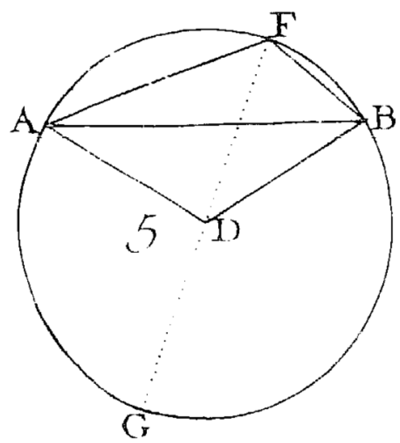
Entre los diferentes ángulos que tienen su vértice en el arco ACEFB los hay que inicialmente parece que no están incluidos en la demostración precedente. Éstos son los ángulos AFB, tales que la recta FDG trazada por el centro pasa fuera del ángulo ADB.



Sin embargo, teniendo presente que el ángulo GFA es la mitad del ángulo GDA y que el ángulo DFB es la mitad del ángulo GDB, se ve que el ángulo AFB, exceso del ángulo DFB sobre el ángulo DFA, es la mitad del ángulo ADB, exceso del ángulo GDB sobre GDA.

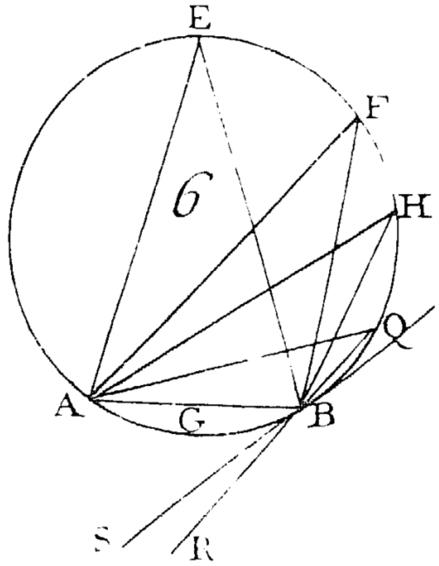
XVII

Por las figuras de que nos hemos servido, podría parecer también que la demostración precedente sólo incluye a los segmentos mayores que un semicírculo.



Sin embargo, es fácil comprobar que un ángulo cualquiera, tal como el AFB, que tiene su vértice en un segmento más pequeño que un semicírculo, está compuesto por otros dos, el DFB y el DFA, mitades de los ángulos BDG y ADG. Por consiguiente, el ángulo AFB tiene como medida la mitad de los arcos BG y AG; es decir, la mitad del arco AGB.

XVIII



Después de haber visto que en un mismo segmento los ángulos AEB, AFB y AHB son iguales, se está tentado de buscar lo que ocurre con el ángulo AQB cuando su vértice se confunde con el punto B, extremo de la base AB. ¿Se desvanece entonces dicho ángulo? No parece posible que sin ser reducido gradualmente llegue a desvanecerse de repente. Tampoco se ve cuál sería el punto a partir del cual este ángulo dejaría de existir. ¿Cómo, pues, se puede determinar su medida?

Esta dificultad no se puede resolver sin recurrir a la geometría del infinito, de la que todos tienen al menos una idea imperfecta, que conviene aclarar.

En primer lugar, observemos que, cuando el punto E se aproxima a B, convirtiéndose en F, H, Q, etc., la recta EB se acorta continuamente y el ángulo EBA que forma con la recta AB se abre cada vez más. Pero, por mucho que se acorte la línea QB, el ángulo QBA siempre será un ángulo que se hace sensible sin más que prolongar la línea QB hacia R.

¿Sucede lo mismo cuando la línea QB, a fuerza de disminuir, se reduce a cero? ¿Qué ha ocurrido entonces con su posición? ¿Adónde ha llegado su prolongación?

Es evidente que en esta situación la recta BS toca el círculo en un solo punto B, sin cortarlo en ningún otro punto, y por esta razón se llama tangente.

Además es claro que mientras la línea EB disminuye continuamente hasta anularse, la recta AE que se transforma sucesivamente en AF, AH y AQ, etc. se aproxima a AB y al final se confunde con ella. Entonces, el ángulo AEB, después de convertirse en AFB, AHB, y AQB se convierte finalmente en el ángulo ABS, formado por la cuerda AB y la tangente BS. Este ángulo, llamado ángulo semiinscrito[1], siempre debe conservar la propiedad de tener por medida la mitad del arco AGB.

Por más que esta demostración sea un poco abstracta para los principiantes, he creído conveniente exponerla aquí porque, para los que quieran llevar sus estudios a la geometría del infinito, será muy útil acostumbrarse desde el principio a semejantes consideraciones.

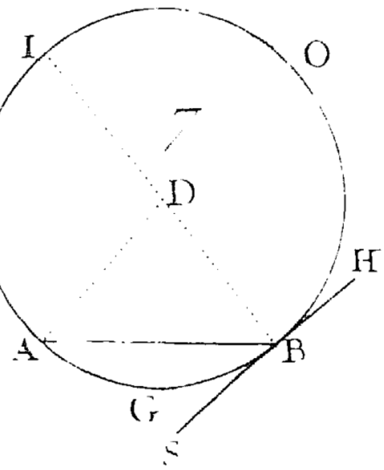
---

[1] Clairaut utiliza el término *angle au segment* para referirse al ángulo semiinscrito (Nota de los traductores).

No obstante, si los principiantes la encuentran demasiado difícil, se les puede llevar al descubrimiento de otra explicándoles la principal propiedad de las tangentes.

XIX

Esta propiedad dice así: una tangente al círculo en un punto B cualquiera es perpendicular al diámetro IDB que pasa por este punto.



Dado que la curvatura del círculo es tan uniforme que un diámetro cualquiera IDB lo divide en dos semicírculos IAB e IOB, iguales e igualmente situados respecto de este diámetro, es necesario que las dos partes BS y BH de la tangente, comunes a estos dos semicírculos, también estén igualmente situadas respecto de ese diámetro. Esto no puede ser sin que IDB sea perpendicular a la tangente HBS.

XX

De aquí se ve fácilmente por qué el ángulo semiinscrito ABS tiene por medida la mitad del arco AGB.

El ángulo ADB más los dos ángulos iguales DAB y DBA es igual a dos rectos (1ª Parte. Artículo LXIV). Entonces, la mitad del ángulo ADB más el ángulo DBA es igual a un recto. Pero el ángulo DBA más el ángulo ABS también es igual a un recto. Por tanto, el ángulo ABS es igual a la mitad del ángulo ADB. En consecuencia, la medida de ABS será la mitad del arco AGB.

XXI

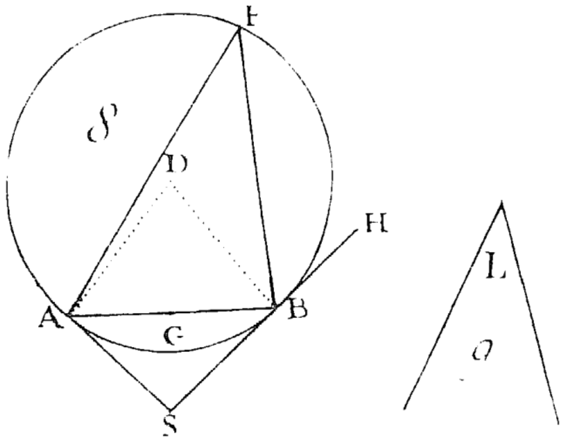
La segunda demostración que acabamos de dar de esta propiedad del círculo (el ángulo ABS tiene por medida la mitad del arco AGB) proporciona la solución del problema siguiente:

Describir sobre AB el arco capaz del ángulo L; es decir, describir sobre AB un segmento circular AFB en el que todos los ángulos AFB sean iguales al ángulo L.

Para resolver este problema, es necesario dibujar, en A y en B, los ángulos BAS y ABS iguales al ángulo L y levantar sobre AS y sobre BS las perpendiculares AD y BD. La intersección D de dichas perpendiculares es el centro del arco AFB buscado.

En efecto, en virtud del artículo XIX, las rectas BS y AS son tangentes al círculo cuyo centro es D y cuyo radio es AD, o BD, puesto que BD o AD son perpendiculares a BS y a AS.

Además por el artículo precedente, el ángulo ABS tiene como medida la mitad de AGB, y por el artículo XV los ángulos tales como AFB también miden la mitad de AGB. Además estos ángulos AFB serán iguales a ABS; es decir, al ángulo L, tal como se pedía.

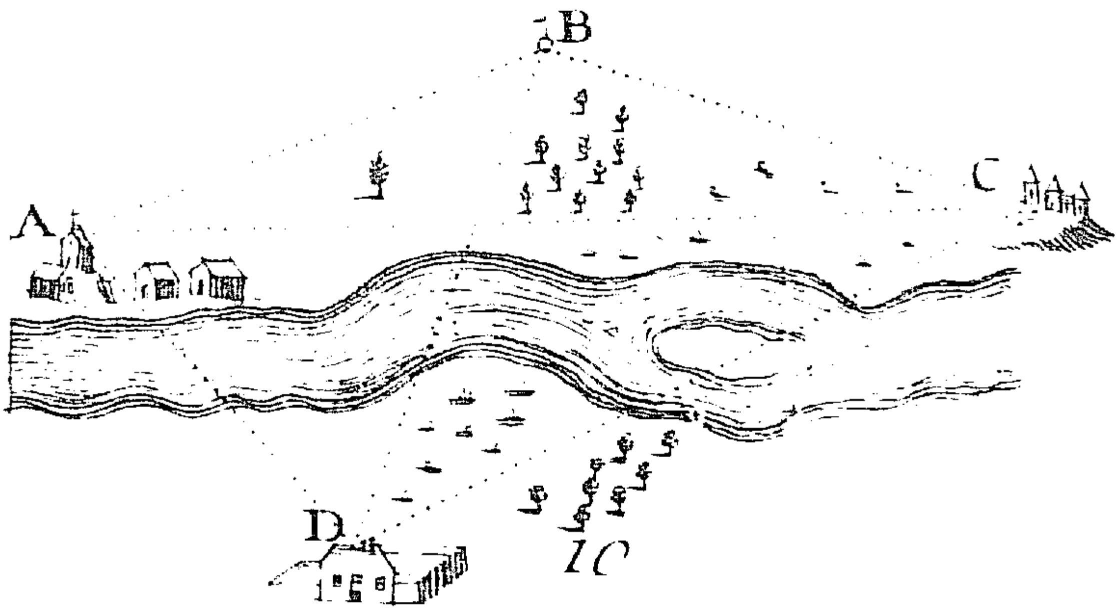


XXII

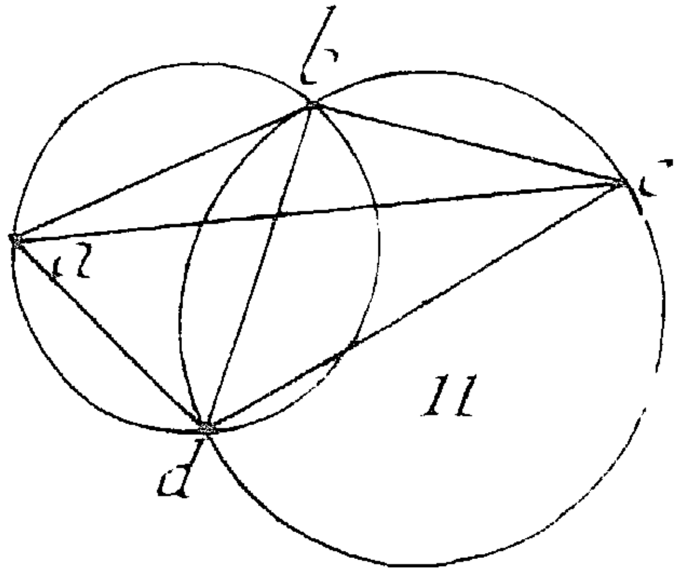
El descubrimiento de las propiedades de los segmentos del círculo que acabamos de explicar se debe ciertamente a la simple curiosidad de los geómetras. Ha ocurrido con este descubrimiento como suele ocurrir con otros muchos: lo que no se creía útil en un principio, lo es posteriormente.

Hay en la práctica aplicaciones satisfactorias de las propiedades del círculo que acabamos de demostrar. Sólo presentaré una de estas aplicaciones que se encuentra en la solución del problema siguiente, muy necesario en geografía.

Sean A, B y C tres lugares de los que se conocen las distancias respectivas AB, BC y AC. Se trata de saber a qué distancia de estos lugares se encuentra un punto D desde el que se pueden ver los otros tres, pero desde el que no se puede acceder a ninguno de ellos.



Primero se dibujan en un papel tres puntos, *a, b* y *c*, que estén dispuestos entre sí del mismo modo que los puntos A, B y C. Dicho en lenguaje geométrico: se dibuja el triángulo *abc* semejante al triángulo ABC.

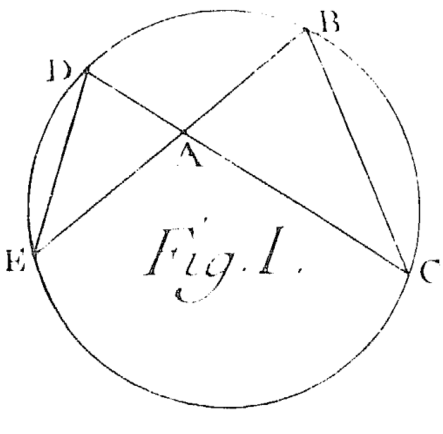


Después, se miden las amplitudes de los ángulos ADB y BDC con el semicírculo. A continuación, sobre *ab* se describe el arco capaz *adb* del ángulo ADB y, sobre *bc*, el arco capaz *bdc* del ángulo BDC. La intersección *d* de dichos arcos designará, sobre el papel, la posición del lugar D. Es decir, las líneas *da, db* y *dc* están en la misma proporción con respecto a *ab, bc* y *ac* que las distancias buscadas DA, DB y DC, con respecto a las distancias dadas AB, BC y AC. Después de lo que se ha visto sobre las figuras semejantes, no hay necesidad de demostrar lo que acabamos de decir.

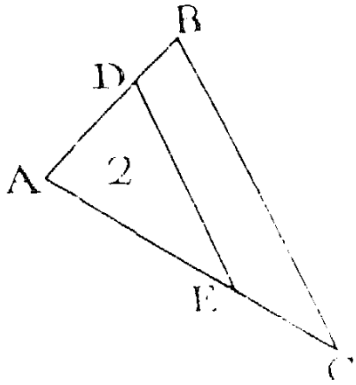
XXIII

Se puede hacer ver fácilmente que la práctica ha dado algunas aplicaciones a las propiedades del círculo como se acaba de demostrar; pero parece más apropiado prestar atención a otras propiedades del círculo que se obtienen de las precedentes y son igualmente útiles.

Para proceder por orden en el descubrimiento de estas propiedades, comenzamos por señalar que como dos ángulos cualesquiera EDC y EBC, que se apoyan sobre el mismo arco EC, son iguales, entonces los triángulos DAE y BAC tienen los ángulos iguales; es decir (1ª Parte. Artículo XXXIX), los dos triángulos son semejantes.



Por la misma razón que el ángulo EDC es igual al ángulo EBC, el ángulo DEB es igual al ángulo DCB. Por otro lado, los ángulos DAE y BAC son visiblemente iguales: sea porque están hechos con las mismas líneas; sea porque dos triángulos, uno de los cuales tiene dos ángulos respectivamente iguales a dos ángulos del otro, también tienen el tercer triángulo igual (1ª Parte. Artículo XXXVIII).



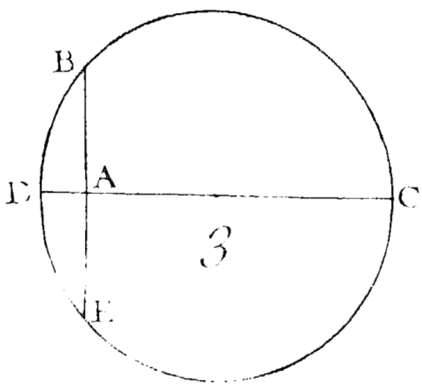
Para reconocer más fácilmente las propiedades generales de los triángulos semejantes en los triángulos ADE y ABC, apliquemos el triángulo DAE sobre el triángulo BAC, poniendo AD sobre AB y AE sobre AC, a fin de que DE sea paralela a BC. Recordaremos entonces:

1º. Que si dos triángulos ADE y ABC son semejantes, los cuatro lados AC, AE, AB y AD son proporcionales. (1ª Parte. Artículo XXXIX).

2º. Que en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios (2ª Parte. Artículo VIII). De ello se concluye que el rectángulo, o el producto de AC por AD, es equivalente al rectángulo AE por AB. Es ésta una propiedad muy notable del círculo, que se puede enunciar así: si en un círculo se trazan dos rectas cualesquiera que se corten, entonces el producto de las dos partes de la primera es igual al producto de las dos partes de la segunda.

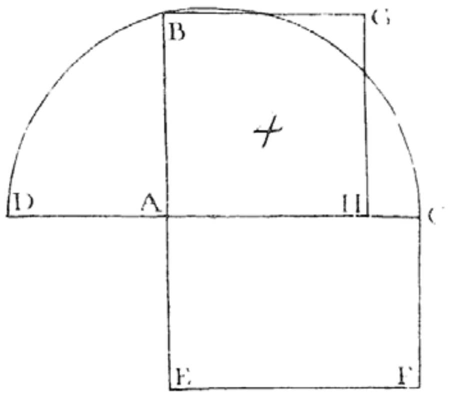
XXIV

Si las dos rectas BE y DC se cortaran perpendicularmente, y una de ellas fuese un diámetro DC, queda claro que las dos partes AB y AE de la recta BE serían iguales entre sí. Consecuentemente, en este caso particular, la propiedad anterior se enunciaría así: si sobre el diámetro DC de un círculo, se levanta una perpendicular cualquiera AB, el cuadrado de esta perpendicular es igual al producto de AD por AC.



XXV

Ocurre frecuentemente que hay necesidad de transformar un rectángulo en un cuadrado. El artículo precedente ofrece un procedimiento sencillo.



Sea ACFE el rectángulo propuesto. Se prolonga AC hasta D, de forma que AD sea igual a AE, y se describe el semicírculo DBC cuyo diámetro es DC. A continuación, se prolonga el lado EA hasta que corte al semicírculo. Con esto se obtiene el lado AB del cuadrado buscado ABGH, equivalente al rectángulo ACFE.

XXVI

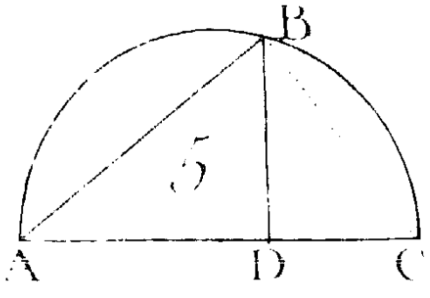
Se propone frecuentemente un problema que es el mismo que acabamos de resolver, presentado de otra manera. Es el problema de encontrar una línea que sea media proporcional entre dos líneas dadas. Se entiende por la media proporcional aquella línea que es tan grande en relación a la menor de las dos líneas dadas como ella es pequeña en relación a la mayor.

Es decir, que si AB, por ejemplo, es media proporcional entre AD y AC, se podrá decir que AD es a AB como AB es a AC. Es bien fácil ver que este problema es el mismo que el precedente, puesto que (2ª Parte. Artículo VIII) el producto de AD por AC, es decir el rectángulo de estas dos líneas, es igual al producto de AB por AB, o sea, el cuadrado de AB.

De modo que, cuando se quiera encontrar una media proporcional entre dos líneas dadas, se transformará el rectángulo de estas dos líneas en un cuadrado equivalente cuyo lado será la línea buscada.

XXVII

También se puede encontrar una media proporcional entre dos líneas de otra manera que se sigue de la propiedad del círculo explicada en el artículo XIII.



Supongamos que AC es la mayor de dos líneas dadas y AD la menor. Se levanta DB perpendicularmente a AC y el punto B en el que ésta corta al semicírculo ABC, trazado sobre el diámetro AC, determina la línea AB, media proporcional entre AD y AC. Porque, trazando BC, queda claro que el triángulo ABC es rectángulo en B.

Entonces (1ª Parte. Artículo XXXVIII), este triángulo será semejante al triángulo ABD, puesto que estos dos triángulos rectángulos tienen el ángulo A común; pero si los triángulos ADB y ABC son semejantes, tienen sus lados proporcionales. De modo que AD es a AB como AB es a AC. Por tanto, AB es media proporcional entre AD y AC.

XXVIII

Si se quiere transformar una figura rectilínea cualquiera en un cuadrado, sólo será necesario transformar esta figura en un rectángulo y resolver el problema aplicando el artículo XXV. Esto resulta muy fácil, dado que las figuras rectilíneas sólo son agregados de triángulos, cada triángulo es la mitad de un rectángulo que tiene su misma base y su misma altura; y todos los rectángulos provenientes de triángulos no son más que un solo rectángulo, si se les da a todos una altura común. (2ª Parte. Artículo VI).

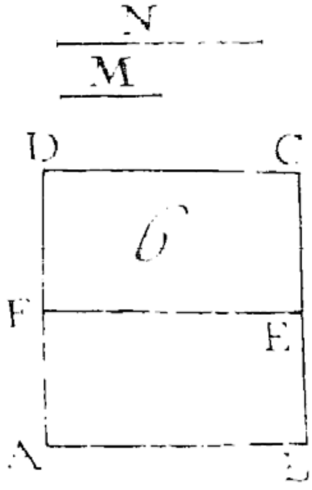
XXIX

Las figuras cuyos contornos incluyen arcos de círculo también se pueden transformar en cuadrados, cuando se mida la longitud de los arcos que las forman. Entonces se pueden transformar estas figuras, así como las rectilíneas, en rectángulos. Los recursos para esto se encuentran en los artículos IX y X, donde se ha aprendido a medir cualquier tipo de figuras circulares.

XXX

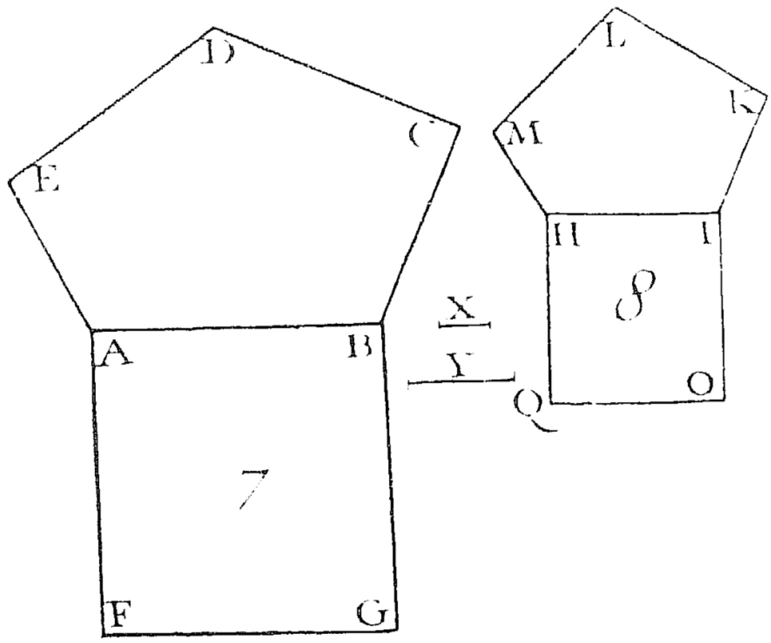
De la propiedad del círculo explicada en el artículo XXIV, se obtiene también un método bien fácil para construir un cuadrado que sea a un cuadrado dado en una razón dada. Problema que habíamos prometido en el artículo XXII de la segunda parte.

Supongamos, por ejemplo, que se quiere dibujar un cuadrado que sea al cuadrado ABCD, como la línea M es a la línea N.



Se divide el lado CB por el punto E (1ª Parte. Artículo XLI), de manera que CB es a BE como la línea N es a la línea M. A continuación, se traza la paralela EF a AB. Entonces, el rectángulo ABEF tiene la misma área que el cuadrado pedido. Por tanto, sólo hace falta transformar este rectángulo en un cuadrado.

XXXI



Si se quiere dibujar un polígono HIKLM que sea a un polígono semejante ABCDE, como la línea X es a la línea Y, se empieza por construir sobre el lado AB del polígono dado ABCDE, el cuadrado ABGF. A continuación, se busca otro cuadrado HIOQ, que sea al cuadrado ABGF, como la línea X es a la línea Y. Entonces, si sobre el lado HI de este cuadrado se describe un polígono HIKLM semejante al primero ABCD, este nuevo polígono es el que se pide. La razón es bien fácil de encontrar si se recuerda (1ª Parte. Artículo XLVIII) que las figuras semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos.

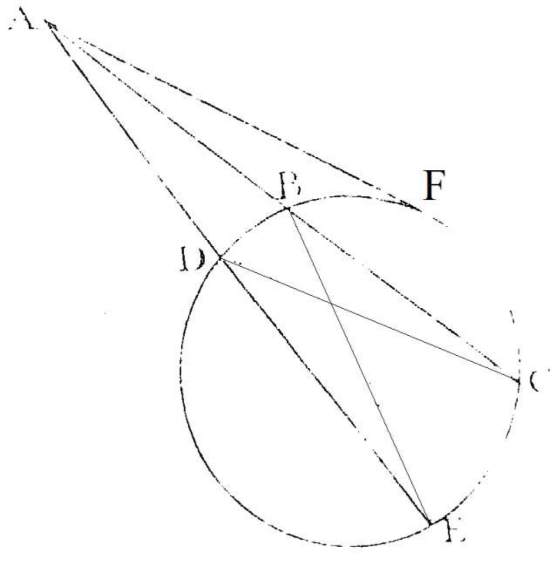
XXXII

Si se quiere trazar un círculo cuya área sea a la de un círculo dado como X es a Y, será necesario construir un cuadrado que sea al cuadrado del radio de este primer círculo como X es a Y. El lado de este nuevo cuadrado será el radio del círculo pedido.

XXXIII

He aquí otra propiedad del círculo obtenida a partir de aquellas que han facilitado los problemas precedentes.

Si desde un punto A, exterior a un círculo, se trazan dos rectas cualesquiera ABC y ADE tales que cada una de ellas corta a la circunferencia en dos puntos, y a continuación se trazan las rectas CD y BE, entonces los triángulos ACD y AEB son semejantes, puesto que el ángulo A es común a los dos triángulos, y además tienen los ángulos C y E iguales.



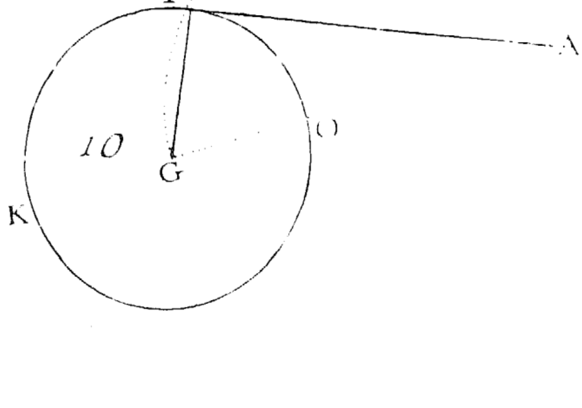
De que los triángulos ACD y AEB sean semejantes se sigue que las cuatro líneas AB, AD, AE y AC están en proporción y, por consiguiente, que el rectángulo de las dos rectas AB y AC es equivalente al rectángulo de las dos rectas AD y AE. Esto se puede expresar así: si desde un punto cualquiera A, exterior a un círculo, se trazan dos líneas rectas cualesquiera AC y AE que atraviesan ese círculo, entonces el rectángulo de la recta AC por su parte exterior AB es equivalente al rectángulo de la recta AE por su parte exterior AD.

XXXIV

Cuando la recta que parte del punto A en lugar de cortar el círculo sólo lo toca, como AF, la propiedad precedente se convierte en ésta: el cuadrado de la tangente AF es equivalente al rectángulo producido por una secante cualquiera AE y por su parte exterior AD. Esto es fácil de demostrar dado que si se considera la recta AF, que toca al círculo, como una línea que lo corta en dos puntos infinitamente próximos, entonces las líneas AB y AC son una misma línea AF y, en lugar del rectángulo de AB por AC, se tiene el cuadrado de AF.

XXXV

La proposición demostrada en el artículo precedente, mostrándonos el valor del cuadrado de la tangente AF, no nos enseña a trazarla desde el punto dado A. Para trazarla se recordará (Artículo XIX) que el radio FG es perpendicular a la tangente FA.



Por tanto, sólo se trata de encontrar sobre el círculo dado, el punto F tal que el ángulo AFG sea recto. Entonces, describiendo un semicírculo sobre AG, el punto en el que corte al círculo FKO es (Artículo XIII) el punto buscado F [2].

[2] Dado que dicho semicírculo corta al círculo en dos puntos, el procedimiento descrito por Clairaut determina las dos tangentes a una circunferencia desde un punto exterior a ella (Nota de los traductores).

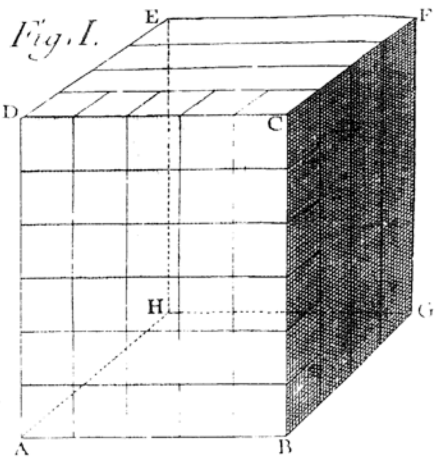
ELEMENTOS DE GEOMETRÍA

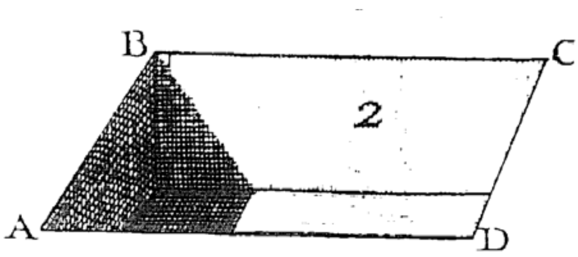
CUARTA PARTE

De la manera de medir los sólidos y sus superficies.

Los principios que hemos establecido en las tres primeras partes de esta obra puede que sean suficientes para resolver problemas más difíciles que los que vamos a proponer. Pero está más en la línea que hemos seguido anteriormente pasar ahora a la medida de sólidos; es decir, extensiones limitadas que tienen tres dimensiones, longitud, anchura y profundidad.

Esta investigación fue, sin duda, uno de los primeros objetos que pudo llamar la atención de los geómetras. Se debió investigar, por ejemplo, cuántos bloques de piedra hay en un muro de altura AD, anchura AB y profundidad BG, conocidas. Pudo interesar el problema de calcular la cantidad de agua que contiene un foso, o un depósito ABCD. Debió estudiarse también la cuestión de determinar el volumen de una torre, de un obelisco, de una casa, de un campanario, etc.

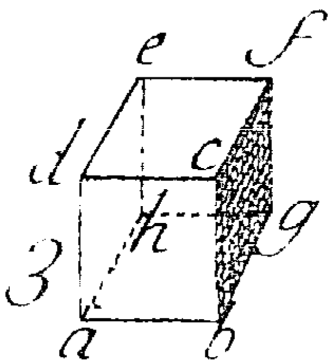




Para tratar las figuras que tienen tres dimensiones, del mismo modo que hemos tratado las que sólo tienen dos, comenzaremos por examinar los sólidos que están limitados por planos. Tendremos, pues, la necesidad de estudiar la forma de medir las superficies de estos cuerpos, que no son más que conjuntos de figuras rectilíneas. Por tanto, su medida depende de lo que se ha dicho en la primera parte de esta obra.

I

Para calcular los volúmenes de los cuerpos es natural compararlos con el del sólido más simple, así como para medir las áreas se comparan todas con la del cuadrado. El sólido más simple es el cubo que es en sólido lo que el cuadrado es en superficie. Es decir, es un espacio tal como *abcdefgh*, cuya anchura, longitud y profundidad son iguales. O lo que viene a ser lo mismo, es una figura limitada por seis caras cuadradas iguales.

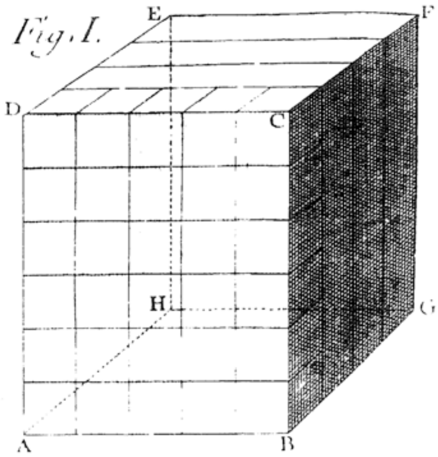


Se llama lado del cubo al lado de los cuadrados que le sirven de caras.

Por pie cúbico se entiende un cubo cuyo lado es de un pie. Del mismo modo, una pulgada cúbica es un cubo cuyo lado es de una pulgada, etc.

II

Los sólidos que se miden con más frecuencia son las figuras ABCDEFGH limitadas por seis caras rectangulares ABCD, CBGF, CFED, DEHA, GFEH y ABGH.



Estos sólidos se llaman paralelepípedos porque sus caras opuestas, al conservar siempre entre ellas la misma distancia, son paralelas; del mismo modo que las líneas son paralelas cuando conservan siempre la misma distancia.

III

Si se pretenden medir los sólidos de esta especie, la analogía de este problema con el de medir superficies rectangulares proporciona un medio fácil para resolverlo.

Se empieza por medir separadamente la longitud AD, la anchura AB y la profundidad BG de la figura propuesta, sea en pies, sea en pulgadas, etc. A continuación, se multiplican los tres números que se han encontrado y el producto obtenido es el número de pies cúbicos, o de pulgadas cúbicas, etc. que contiene el paralelepípedo cuando las dimensiones han sido medidas en pies o en pulgadas, etc.

Para enseñar mejor cómo se hace esta operación vamos a dar un ejemplo.

Supongamos que la longitud AD es de 6 pies, la anchura AB de 5 y la profundidad BG de 4. El rectángulo ABCD (1ª Parte. Artículo XI) tendrá 6 veces 5, o 30, pies cuadrados. Si suponemos que las líneas BG, CF, DE y AH, que miden la profundidad del sólido, se dividen en cuatro partes iguales, y que por los puntos de división correspondientes se trazan otros tantos planos paralelos unos a otros, estos planos dividen al paralelepípedo propuesto en cuatro paralelepípedos iguales y semejantes, que tienen cada uno un pie de profundidad.

La simple inspección de la figura hace ver que el primero de estos paralelepípedos contiene 30 pies cúbicos, puesto que la cara exterior ABCD contiene 30 pies cuadrados. De modo que el sólido total ABCDEFGH contendrá 4 veces 30, o 120, pies cúbicos.

IV

No nos detenemos aquí en explicar los diferentes métodos que se pueden emplear en la práctica para construir paralelepípedos, porque estos medios son, en su mayor parte, tan fáciles de encontrar que no hay nadie que no los pueda imaginar. Sin embargo, presentamos la siguiente construcción de un paralelepípedo, que es más útil que todas las demás.

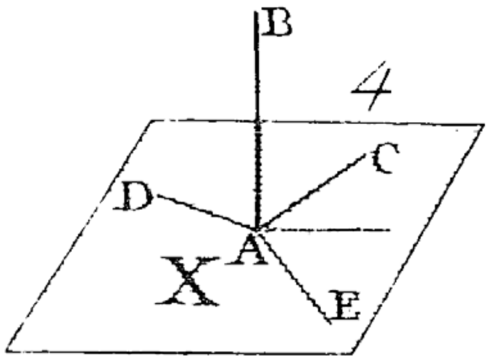
Supongamos que un cuadrado o rectángulo ABGH se mueve paralelamente a sí mismo, de modo que sus cuatro ángulos A, B, G y H se desplazan sobre una de las cuatro líneas AD, BC, GF y HE, perpendiculares al plano del rectángulo ABGH. Este rectángulo, por el movimiento que acabamos de describir, generará el paralelepípedo ABCDEFGH.

V

Es casi inútil advertir que por línea perpendicular a un plano entendemos una línea que no se inclina de ningún lado sobre este plano. Del mismo modo, un plano que no se inclina más de un lado que de otro sobre un segundo plano, se llama perpendicular a este segundo plano. Estas dos definiciones son análogas a la de línea perpendicular a otra que ya hemos visto en la primera parte de esta obra.

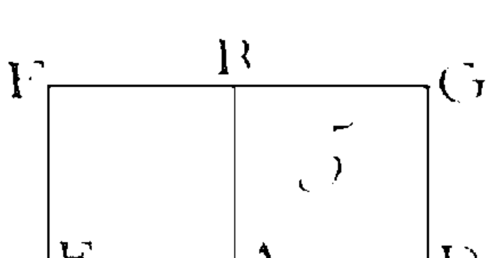
VI

De ello se sigue que la línea AB, perpendicular al plano X, debe ser perpendicular a todas las líneas AC, AD, AE etc. que parten del pie A de esta línea y están contenidas en dicho plano. En efecto, si AB se inclinase sobre una de estas líneas, entonces se inclinaría hacia algún lado del plano, por lo que no sería perpendicular a él.



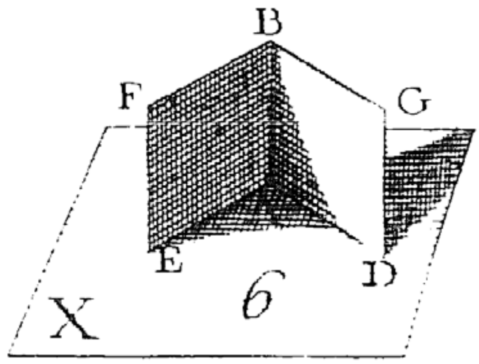
VII

Para representar de una forma sensible cómo la línea AB puede ser perpendicular a todas las líneas que parten de su extremo A basta con hacer una figura en relieve de la manera siguiente:



Con alguna materia lisa y fácil de plegar, como cartón, se construye un rectángulo FGDE dividido en dos partes iguales por la recta AB perpendicular a los lados ED y FG.

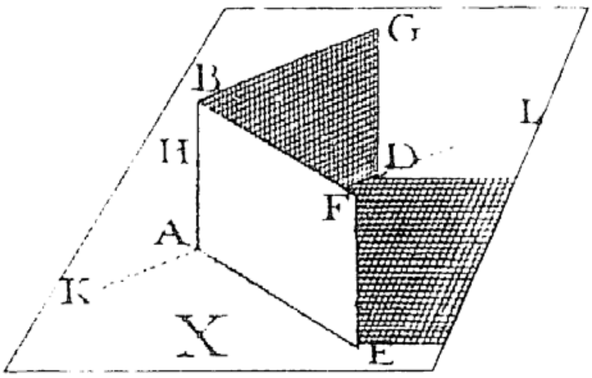
A continuación, se pliega este rectángulo a lo largo de la línea AB, y se coloca el rectángulo doblado sobre el plano X.



Es evidente que, cualquiera que sea la abertura que se dé a las dos partes FBAE y GBAD del rectángulo plegado EADGBF, estas dos partes siempre permanecerán pegadas al plano X sin que la línea AB cambie de posición en relación a dicho plano. Por tanto, la recta AB será perpendicular a todas las líneas que parten de su pie y están contenidas en el plano X, dado que los lados AE y AD del rectángulo plegado se apoyan sucesivamente sobre cada una de dichas líneas, durante el movimiento que acabamos de describir.

VIII

De la construcción anterior se deduce un procedimiento muy cómodo para levantar desde un punto dado de un plano una línea perpendicular a dicho plano, o para bajar desde un punto dado exterior a un plano una perpendicular a este plano.



Si el punto dado está en el plano, por ejemplo en A, o fuera de él, como en H, siempre se podrá desplazar el rectángulo EFBGDA sobre el plano X, hasta que el pliegue AB toque el punto dado. En los dos casos, AB será la perpendicular pedida.

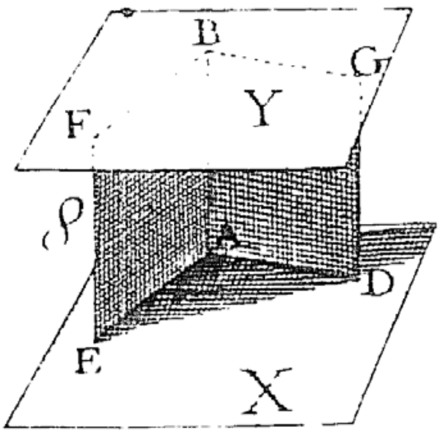
IX

También se sigue de ello que una línea AB es perpendicular a un plano X siempre que lo sea a dos líneas AE y AD de dicho plano. Porque entonces AB puede considerarse como el pliegue de un rectángulo, uno de cuyos lados plegados se aplica sobre AE y el otro sobre AD. De modo que este pliegue no puede dejar de ser perpendicular al plano X.

X

Si se quiere levantar un plano perpendicular a X sobre una línea cualquiera KL, contenida en el plano X, también se puede hacer uso del rectángulo plegado GBFEAD. Para ello basta con poner el lado AD de una de las partes ADGB de este rectángulo plegado sobre la línea KL. Con esto, ADGB es el plano que se pide.

XI

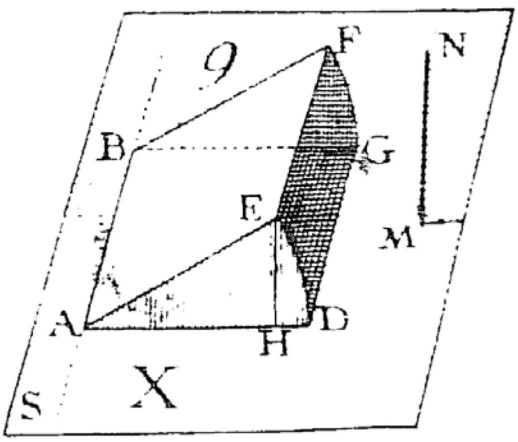


También se ve fácilmente que si se coloca un tercer plano Y sobre los lados FB y BG del mismo rectángulo plegado, entonces el plano Y es perpendicular a la línea AB y, por consiguiente, paralelo al plano X.

Entonces, si en un plano X se levantan tres perpendiculares EF, AB y DG de la misma longitud y que no estén situadas en línea recta, el plano Y, que pasa por los puntos F, B y G es paralelo al plano X.

XII

Cuando dos planos no son paralelos es fácil determinar el ángulo que forman haciendo uso de nuestro rectángulo plegado.

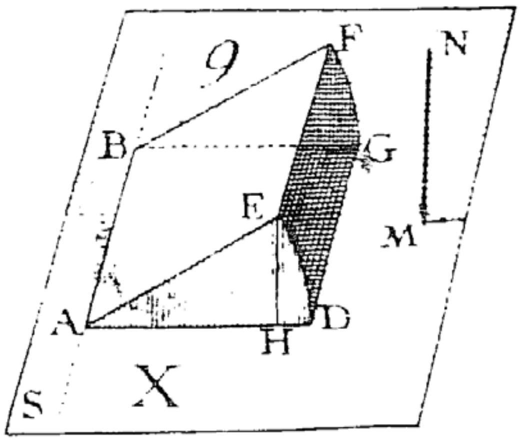


Para ello se aplica una de las dos partes ABGD de este rectángulo sobre el plano X. Es evidente que el ángulo EAD, o el FBG, mide la inclinación del plano EABF sobre el plano DABG. Si se advierte que AB es la intersección de estos planos, y que EA y AD son perpendiculares a AB, se deduce fácilmente la regla siguiente:

Si se dan dos planos que no son paralelos es necesario, en primer lugar, determinar su recta de intersección. A continuación, desde un punto cualquiera de esta línea, se trazan dos perpendiculares, cada una en uno de dichos planos. El ángulo que forman las dos rectas mide el ángulo que forman los dos planos dados.

XIII

Se percibe fácilmente que, durante el movimiento de ABFE alrededor del pliegue AB, la recta AE, cuyo extremo E describe un arco de círculo ED, no sale nunca del plano EAHD perpendicular al plano X. Además, la inclinación de la recta EA sobre el plano X no es otra cosa que el ángulo EAD. También se descubre muy fácilmente que la inclinación de una recta cualquiera EA sobre el plano X se mide por el ángulo EAH formado por la línea EA y la línea AD. Ésta pasa por A y por el punto H del plano X donde cae la perpendicular EH bajada desde un punto cualquiera E de la recta AE a dicho plano.



XIV

La simple inspección de la figura de la que nos hemos servido en el artículo precedente proporciona un nuevo método para bajar desde un punto E, exterior al plano X, una línea EH perpendicular a dicho plano.

Después de trazar una línea cualquiera BAS en el plano X, se baja desde el punto dado E la perpendicular EA a dicha línea. Hecho esto, desde el punto A, pie de la antedicha perpendicular, se levanta en el plano X la perpendicular AD a AB. A continuación, desde el punto E se baja la perpendicular EH a la recta AD. Esta línea es la perpendicular al plano X.

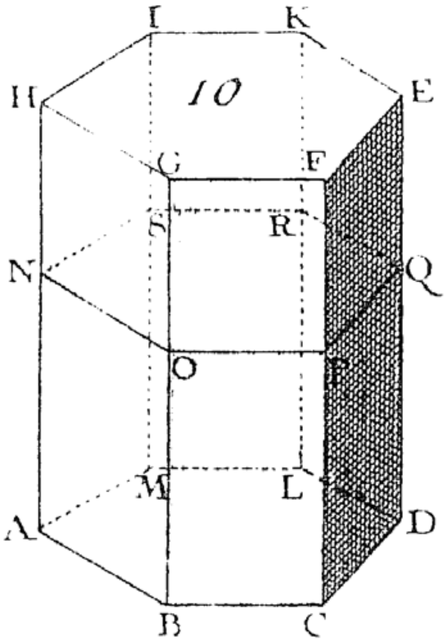
XV

De ello se obtiene un segundo procedimiento para levantar una perpendicular MN desde un punto dado M del plano X.

Habiendo bajado desde un punto cualquiera E, exterior al plano X, la perpendicular EH a dicho plano, se trazará por el punto dado M la recta MN paralela a HE. Ella será la perpendicular al plano X.

XVI

Después del paralelepípedo, el sólido más simple es el prisma recto.



Es una figura ABCDEFGHIKLM en la que dos bases opuestas y paralelas son dos polígonos iguales situados de tal modo que los lados GF, FE, etc. del uno son paralelos a los lados BC, CD, etc. del otro. Las otras caras son los rectángulos ABGH, BGFC, etc.

XVII

Los geómetras piensan que estas figuras, igual que los paralelepípedos, se generan por una base ABCDLM que se mueve paralelamente a sí misma, de modo que los ángulos A, B, etc. recorren líneas perpendiculares al plano de la base.

XVIII

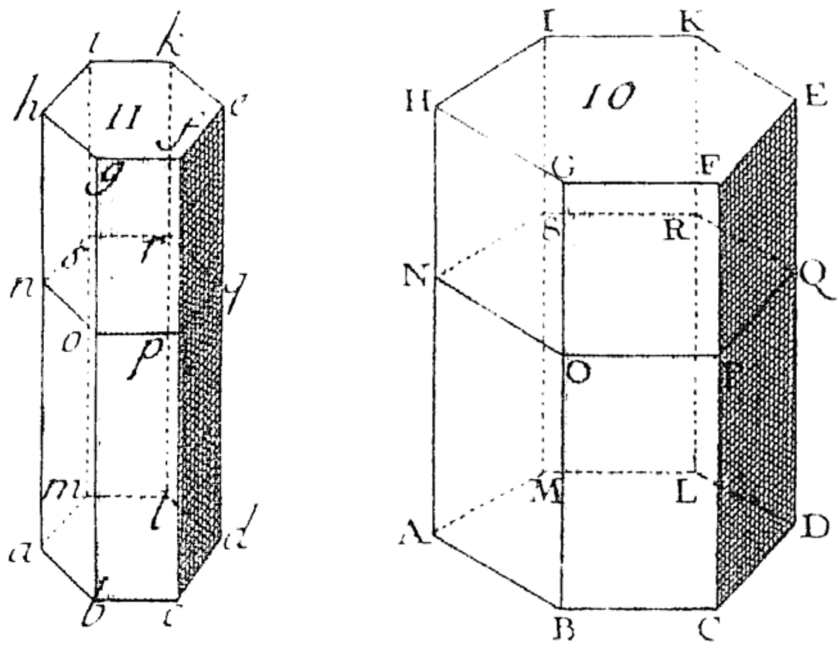
Para distinguir las diferentes especies de prismas rectos, se recurre al nombre del polígono que les sirve de base. El prisma hexagonal, por ejemplo, es aquél cuya base es un hexágono.

XIX

Para hallar la forma de medir todo tipo de prismas rectos se observará de entrada que de dos prismas rectos cuyas bases sean iguales, el que tenga una altura mayor tendrá mayor volumen, en la misma razón en que su altura sea más grande.

XX

Se notará a continuación que dos prismas rectos que tengan la misma altura, pero tales que una base contenga un cierto número de veces la base del otro, estarán entre ellos en la misma razón que sus bases. La verdad de esta proposición se percibe fácilmente prestando atención a la formación de los prismas rectos explicada en el artículo XVII.



Sean *abcdefghiklm* y ABCDEFGHIKLM dos prismas con la misma altura y tales que la base *abcdlm* del menor es, por ejemplo, la cuarta parte de la base ABCDLM del mayor. Dado que los dos prismas se generan por los movimientos de estas dos bases, resulta claro que un plano cualquiera, paralelo al plano en el que están las dos bases, cortará a los dos prismas según polígonos iguales a la bases de los prismas correspondientes. Es decir, que la sección del prisma grande siempre será cuádruple de la del pequeño. Por tanto, se puede suponer que el prisma ABCDEFGHIKLM está compuesto por láminas, todas cuádruples de las del prisma *abcdefghiklm*. En consecuencia, el volumen del primer prisma será cuádruple del volumen del segundo.

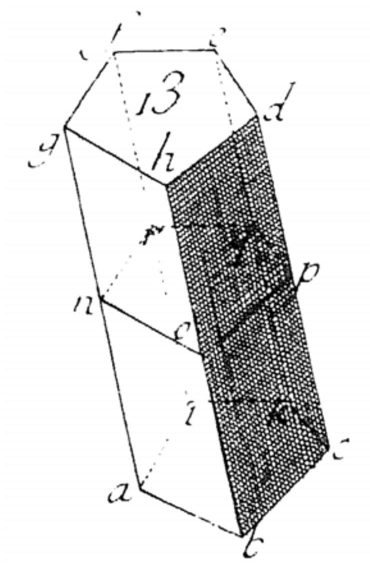
XXI

Después de estas dos observaciones, no resulta difícil formular la siguiente regla para medir los prismas rectos.

En primer lugar, se mide el área de la base del prisma propuesto en pies cuadrados o en pulgadas cuadradas, etc. Después, se multiplica el número obtenido para el área de dicha base por el número de pies o de pulgadas, etc. que tenga la altura del prisma. El producto resultante es igual al número de pies cúbicos, de pulgadas cúbicas, etc. contenidos en el prisma propuesto y, en consecuencia, es su volumen.

XXII

El nombre de prisma se da también a los sólidos (Fig. 13) que tienen dos bases poligonales iguales, como los precedentes, pero cuyas otras caras son paralelogramos, en lugar de ser rectángulos. Para distinguir estos nuevos prismas de aquellos de los que acabamos de hablar se les llama prismas oblicuos, por oposición a los otros que se han llamado prismas rectos.

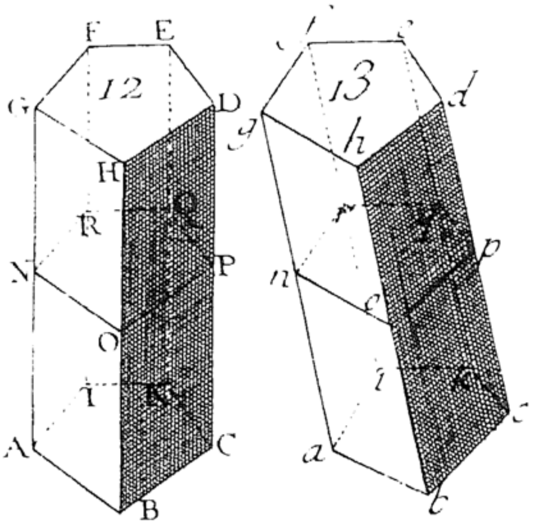


XXIII

Los prismas oblicuos se generan por una base *abcki* que se mueve paralelamente a sí misma de modo que sus ángulos recorren las líneas paralelas *ag, bh, cd*, etc. que se elevan fuera del plano de la base y no son perpendiculares a él.

XXIV

La analogía entre esta generación y la formación de los prismas rectos de que hemos hablado (Artículo XVII), da fácilmente el volumen de los prismas oblicuos.



Imaginemos, junto a un prisma oblicuo *abcdefghik*, un prisma recto ABCDEFGHIK que tiene su misma base. Supongamos también que estos dos prismas están encerrados entre dos planos paralelos. Vamos a ver que el volumen de estos dos cuerpos es el mismo.

En efecto, si por un punto cualquiera P de la altura se traza un plano paralelo a la base, las secciones NOPQR y *nopqr* que este plano determina en cada uno de los dos prismas se pueden considerar como las bases iguales ABCKI y *abcki* cuando llegan a

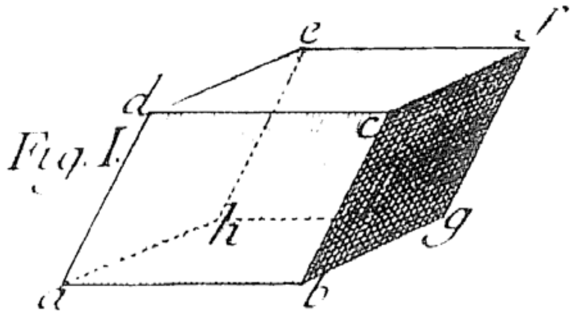
NOPQR y *nopqr* durante los movimientos que generan estos dos prismas. Por tanto, estas dos secciones son polígonos iguales.

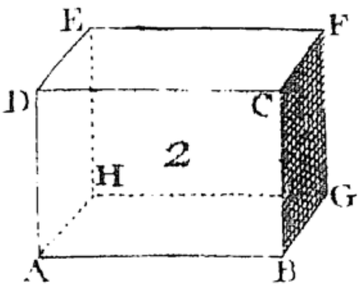
Si todas las secciones imaginables que se pueden formar en estos dos prismas por los mismos planos secantes son iguales, entonces los conjuntos de estas secciones, es decir, los prismas, también son iguales.

Esta proposición se enuncia ordinariamente así: los prismas oblicuos son iguales a los prismas rectos que tienen su misma base y su misma altura. Se llama altura del prisma a la perpendicular bajada desde el plano superior al inferior o a su prolongación.

XXV

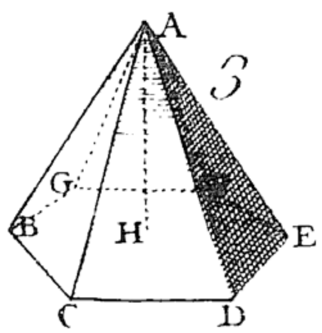
Dado que los paralelepípedos son tipos especiales de prismas, aplicaremos lo que acaba de decirse de los prismas a los paralelepípedos oblicuos; es decir, a las figuras *abcdefgh* que se generan haciendo mover un cuadrado, un rectángulo o incluso un paralelogramo, de modo que sus cuatro ángulos sigan líneas paralelas que se elevan oblicuamente desde la base. Así, el paralelepípedo oblicuo *abcdefgh* tiene el mismo volumen que el paralelepípedo recto ABCDEFGH, si la base *agbh* es la misma, o tiene la misma área que la base ABGH, y si la perpendicular bajada desde el plano *dcfe* al plano *abgh* es igual a la perpendicular bajada desde el plano DCFE al plano ABGH.





XXVI

Habiendo visto lo que concierne a los paralelepípedos y los prismas examinemos ahora las pirámides; es decir, los cuerpos tales como ABCDEFG, limitados por un cierto número de triángulos que parten todos de un mismo vértice A y que acaban en una base poligonal cualquiera BCDEFG. Es necesario considerar esa especie de sólidos, no solamente porque se les encuentra en edificios y en otras obras de construcción, sino porque todos los sólidos limitados por dos planos, son agregados de pirámides, así como las figuras rectilíneas son conjuntos de triángulos. Para cerciorarse de ello, basta con trazar, desde un punto cualquiera del interior del cuerpo propuesto, líneas a todos sus ángulos.

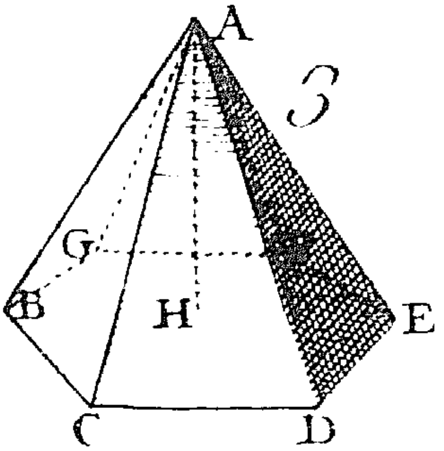


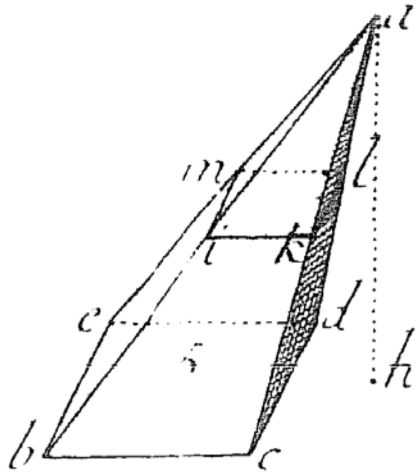
XXVII

Se distinguen unas pirámides de otras, así como los prismas, por el nombre de la figura que les sirve de base.

XXVIII

Cuando la pirámide tiene por base una figura regular y su vértice cae perpendicularmente en el centro de la base, así como en la figura 3, la pirámide se llama pirámide recta; por el contrario, se llama pirámide oblicua cuando el vértice no cae perpendicularmente sobre el centro de la base, así como en la figura 5.





XXIX

Para descubrir la manera de medir todos los tipos de pirámides, tanto rectas como oblicuas, comenzaremos por hacer algunas reflexiones generales sobre estas figuras a las que se llega por el conocimiento de las propiedades de los prismas.

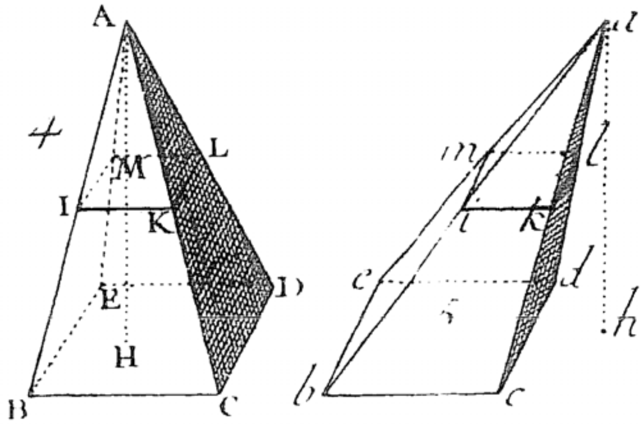
Cuando se presta atención a la igualdad[1] de los prismas que tienen la misma base y la misma altura, es natural que se recuerde que los paralelogramos también son equivalentes cuando cumplen estas mismas condiciones; lo mismo sucede con los triángulos. Estas tres verdades se presentan simultáneamente al espíritu. La analogía debe llevarnos a pensar que las propiedades que son comunes a los paralelogramos y a los triángulos pueden serlo también a los prismas y a las pirámides. Se debe, pues, conjeturar que las pirámides que tienen la misma base y la misma altura tienen también el mismo volumen.

XXX

Las reflexiones siguientes confirmarán este supuesto.

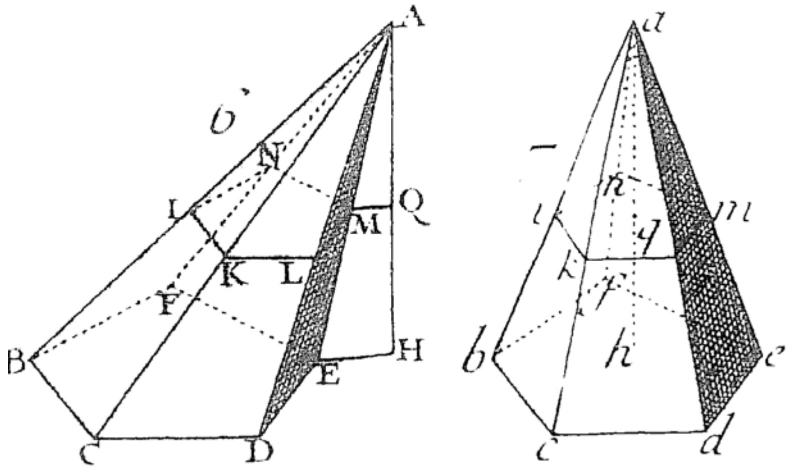
Sean ABCDE y *abcde* dos pirámides cuyas alturas AH y *ah* sean las mismas y cuyas bases sean dos figuras iguales, por ejemplo dos cuadrados iguales BCDE y *bcde*.

[1] Con el término "igualdad", referido a cuerpos geométricos, Clairaut quiere expresar la igualdad de sus volúmenes (Nota de los traductores).



Si estas dos pirámides se cortan por infinitos planos paralelos a sus bases se comprende fácilmente que dichos planos cortan a las pirámides según dos cuadrados iguales IKLM e *iklm*. En consecuencia, las dos pirámides se pueden considerar como conjuntos de un mismo número de láminas, cada una igual a su correspondiente. Entonces, la suma de las láminas es la misma en una y otra parte; es decir: las dos pirámides tienen el mismo volumen.

Si las bases de las dos pirámides fuesen otros polígonos regulares o irregulares BCDEF y *bcdef* iguales entre sí, no hay nadie que ponga en duda que todas las láminas IKLMN e *iklmn* de una y otra de estas dos pirámides deben ser iguales entre sí y que, por consiguiente, las dos pirámides siempre tendrán el mismo volumen, cuando tengan la misma base y la misma altura.



XXXI

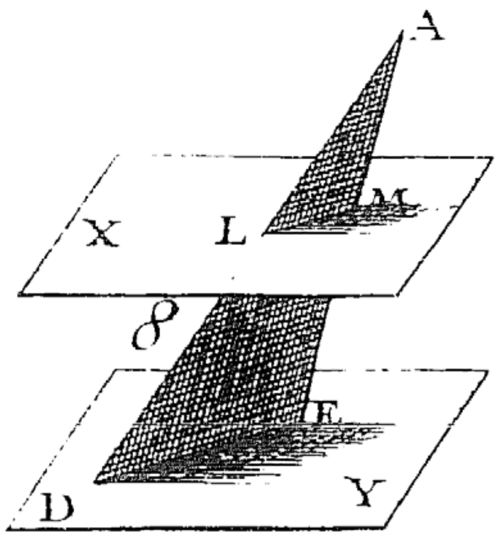
Todo esto es fácil de imaginar en virtud de la demostración que hemos dado sobre la igualdad de los prismas que tienen la misma altura. Sin embargo, la semejanza entre cualquier lámina IKLMN de una pirámide y la base BCDEF, y la igualdad de las láminas IKLMN e *iklmn* son de esas proposiciones que, si bien son sensibles para todo el mundo, precisan de una demostración. Para encontrar esta demostración estaremos obligados a entrar en muchas consideraciones sobre la semejanza de figuras sólidas.

XXXII

Retomemos la pirámide ABCDEF y supongamos que se corta por un plano IKLMN paralelo a la base. Vamos a demostrar que la sección que este plano determina en la pirámide es un polígono perfectamente semejante al polígono BCDEF, y que la pirámide AIKLMN es enteramente semejante a la pirámide ABCDEF. Es decir, que los ángulos que forman todas las líneas de estas dos figuras son respectivamente iguales y que todos los lados de la pirámide menor están en la misma razón que los de la mayor.

XXXIII

Empecemos por observar que si los planos X e Y son paralelos y que si dos líneas cualesquiera ALD y AME, saliendo desde un mismo punto A, cortan a dichos planos, entonces las rectas LM y DE que unen los puntos L, M, D y E son paralelas.

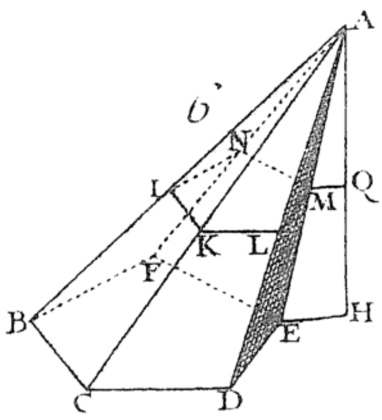


La razón es que si las dos líneas no fuesen paralelas, entonces al prolongarse se cortarían en algún punto. Pero si se cortasen, los planos que las contienen también se cortarían al prolongarse tanto como fuese necesario. Entonces los dos planos no serían paralelos como se había supuesto.

XXXIV

Si suponemos que el plano IKLMN es paralelo al BCDEF, se sigue que las líneas ML, LK, KI, IN y NM son paralelas a las líneas ED, DC, CB, BF y FE y, por consiguiente, que los triángulos ALM, AKL, AIK, etc. son semejantes a los triángulos ADE, ACD, ABC, etc. Si se toma uno de los lados de estos triángulos, AM por ejemplo, como escala o unidad de medida para todos los lados de la pirámide menor, el lado correspondiente AE servirá de escala a los lados de la mayor. Puede verse sin dificultad que los lados ML, LK, KI, etc. del polígono IKLMN son proporcionales a los lados ED, DC, CB, etc. del polígono BCDEF.

También se ve fácilmente que todos los ángulos IKL, KLM, etc. son respectivamente iguales a los ángulos BCD, CDE, etc. dado que los primeros están formados por líneas paralelas a los lados de los segundos. Entonces, los polígonos IKLMN y BCDEF son semejantes.



XXXV

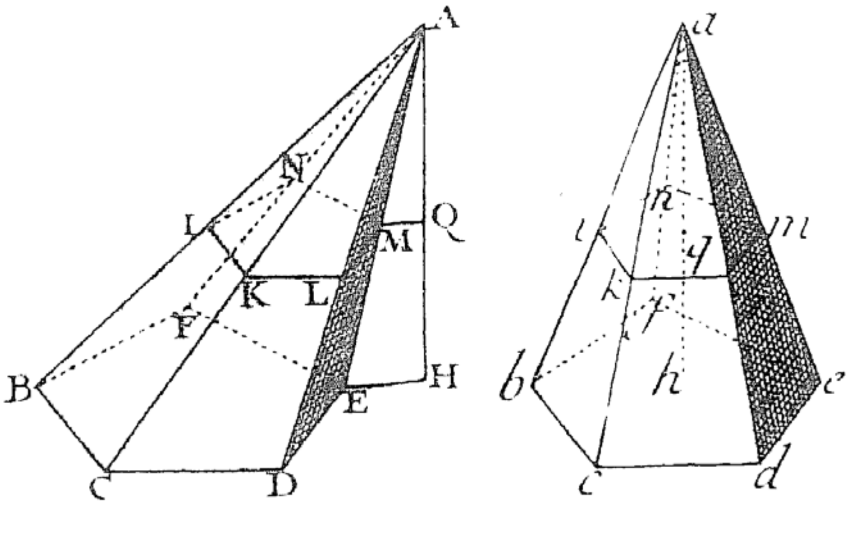
Como los lados AM, AL, AK, etc. son proporcionales a los lados AE, AD, AC, etc., y los ángulos ALM, ALK, etc. respectivamente iguales a los ángulos ADE, ADC, etc., entonces, debido a la semejanza de los triángulos ALM, ADE, ALK, ADC, etc. las dos pirámides AIKLMN y ABCDEF son semejantes.

XXXVI

En definitiva, si desde el punto A se traza AH perpendicularmente al plano sobre el que está construido el polígono BCDEF, y si Q es el punto en el que esta perpendicular corta al plano del polígono IKLMN, resulta evidente que las rectas AQ y AH, alturas de las pirámides AIKLMN y ABCDEF, están entre sí en la misma razón que los lados homólogos AM y AE, AL y AD, etc. O que, si se toman las alturas AQ y AH como escalas de las dos pirámides, entonces los lados AM, AL, etc. contendrán tantas partes de AQ como los lados AE, AD, etc. contienen partes de AH.

XXXVII

Consideremos las pirámides ABCDEF y *abcdef*.

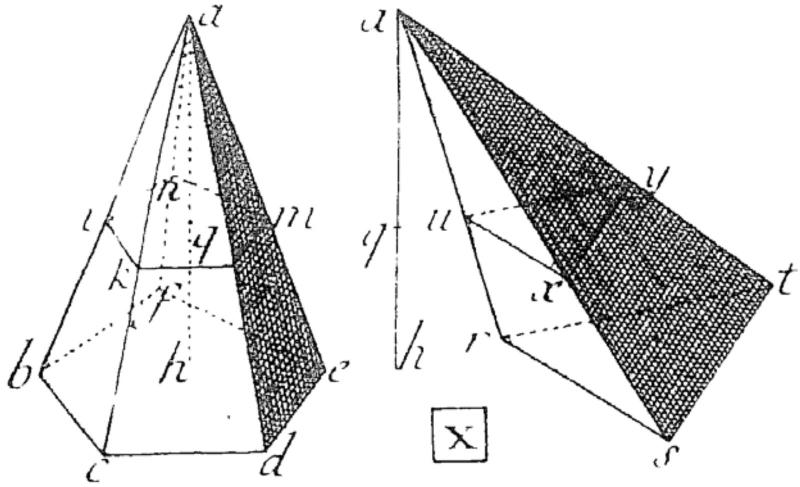


Se observa que las dos láminas IKLMN e *iklmn*, siendo semejantes a las bases BCDEF y *bcdef*, que son las mismas, también son semejantes entre sí. Además, las dos láminas son iguales dado que las escalas de las dos figuras son las rectas iguales AQ y *aq*, alturas de las pirámides AIKLMN y *aiklmn*.

Entonces, aunque se desconozca el volumen de las dos pirámides, ya se sabe con certeza que si tienen la misma altura y la misma base también tienen el mismo volumen, como habíamos supuesto (Artículo XXIX).

XXXVIII

Si las bases de las dos pirámides en lugar de ser las mismas fuesen solamente iguales en superficie, las pirámides también tendrían el mismo volumen.



Ya que, siendo *abcdef* y *arst* dos pirámides con la misma altura *ah*, si se cortan por un plano cualquiera paralelo a la base, es evidente que habrá la misma razón entre las áreas de *iklmn* y *bcdef* que entre las áreas de *uxy* y *rst*, dado que, siendo *iklmn* y *bcdef* semejantes (Artículo XXXIV), sólo difieren (1ª Parte. Artículo XLVIII) en sus escalas *aq*, *ah* y siendo semejantes las figuras *uxy* y *rst* sólo difieren en sus escalas que también son *aq* y *ah*.

Pero si las bases *rst* y *bcdef* tienen la misma área, entonces sus partes proporcionales *uxy* e *iklmn* serán equivalentes; y todas las láminas de las pirámides *arst* y *abcdef* tendrán la misma extensión. Por tanto, su unión, es decir, las pirámides mismas, tendrán el mismo volumen.

XXXIX

Si la base *bcdef* de la primera pirámide contiene un cierto número de veces la base *rst*, el volumen de la primera pirámide *abcdef* contendrá el mismo número de veces al volumen de la segunda pirámide *arst*.

Puesto que, estando la base *bcdef* dividida en varias partes iguales a la base *rst*, se puede considerar la pirámide *abcdef* como compuesta por otras pirámides cuyas bases son las partes de *bcdef*. Entonces, cada una de estas nuevas pirámides sería igual a la segunda pirámide *arst*, en virtud de lo que hemos demostrado en el artículo precedente.

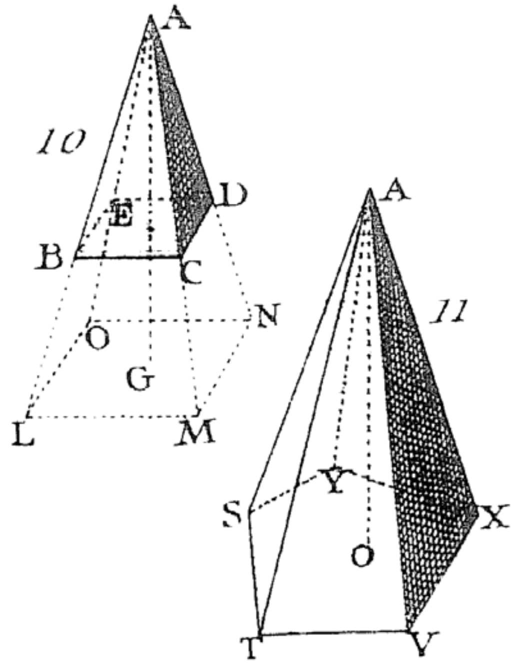
Por otra parte, si la base *rst* no estuviese contenida exactamente en la base *bcdef*, pero esas dos base tuviesen una medida común X, entonces se dividiría cada una de las dos bases *bcdef* y *rst* en partes iguales a X; y se vería que las dos pirámides *abcdef* y *arst* están compuestas por tantas pirámides nuevas, iguales entre sí, como veces contengan las dos bases a la medida común X. Entonces, las pirámides *abcdef* y *arst* serían entre ellas como sus bases.

Y si las bases fuesen inconmensurables, también se podría ver que las pirámides tendrían entre sí la misma razón que sus bases, sirviéndonos de una inducción semejante a la que hemos empleado en un caso similar (2ª Parte. Artículo XXVIII) cuando se trataba de comparar las figuras cuyos lados eran inconmensurables. Es decir, se disminuiría hasta el infinito la medida X, de modo que pudiese ser considerada medida común, tanto de la base *rst* como de la base *bcdef*.

XL

Habiendo descubierto que las pirámides que tienen la misma altura están en la misma razón que sus bases, se debe advertir que la medida de su volumen sólo encierra una pequeña dificultad.

Sólo se trata de saber medir el volumen de una sola pirámide para poder medir el de todas las demás.



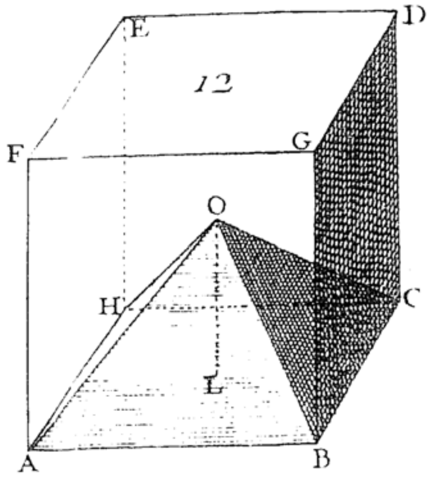
Supongamos, por ejemplo, que supiésemos medir la pirámide ABCDE y que se nos pide la medida de la pirámide ASTVXY que no tiene ni la misma base ni la misma altura que la primera. Empezamos construyendo una pirámide semejante a la pirámide ABCDE cuya altura coincida con la de la pirámide ASTVXY. Esto es bien fácil dado que basta (Artículo XXXV) con prolongar los lados, AB, AC, AD y AE y cortarlos por el plano LMNO cuya distancia AG al vértice A sea igual a la altura AO.

Hecho esto, como se supone que sabemos medir la pirámide ABCDE, es evidente que también sabemos medir la pirámide ALMNO que es semejante a la anterior; porque cualesquiera que sean las operaciones por las que se mida la pirámide ABCDE se podrán hacer siempre las mismas operaciones para medir la pirámide semejante ALMNO, aunque con una escala diferente.

Supongamos que la pirámide ALMNO ha sido medida. Esta medida también determinará la medida de la pirámide ASTVXY porque, según el artículo precedente, esas dos pirámides son entre sí como sus bases LMNO y STVXY; y en la segunda parte ya hemos enseñado a encontrar la razón de estas dos bases.

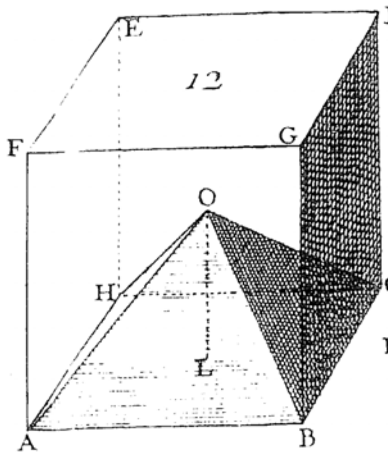
XLI

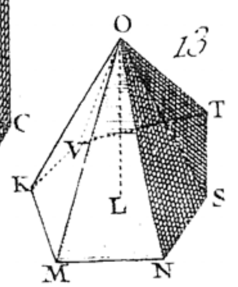
Como sólo se necesita saber medir una sola pirámide para saber medir todas las demás, proponemos la medida de una pirámide muy simple, que se puede formar trazando desde los cuatro vértices A, B, C y H de una de las caras de un cubo ABCDEFGH cuatro líneas al punto O, centro de este cubo; es decir, el punto que equidista de A, D, B, E, etc.



Resulta evidente que esta pirámide es la sexta parte del cubo, puesto que éste se puede descomponer en seis pirámides semejantes, tomando cada una de sus caras como base. Como el volumen del cubo es el producto de la altura AF por la base ABCH; entonces, para obtener el volumen de la pirámide será necesario dividir el producto de AF por ABCH en seis partes iguales. O, lo que viene a ser lo mismo, se deberá multiplicar la sexta parte de la altura AF por la base ABCH. Como la sexta parte de la altura AF es la tercera parte de la altura OL de la pirámide OABCH, dado que la altura OL es la mitad del lado del cubo, se sigue que el volumen de la pirámide OABCH es el producto del tercio de su altura por su base.

XLII





Supongamos ahora que se quiere medir una pirámide cualquiera OKMNSTV.

Para ello se considera un cubo cuyo lado AB o AF es el doble de la altura OL de la pirámide propuesta y, en dicho cubo, una pirámide OABCH cuyo vértice O es su centro y cuya base es una de las caras ABCH del cubo. Esta nueva pirámide tiene la misma altura que la primera y, por consiguiente (Artículo XXXIX), el volumen de OABCH es al de OKMNSTV como la base ABCH es a la base KMNSTV. Como por el artículo precedente, el producto del tercio de la altura común OL por la base ABCH es el volumen de la pirámide OABCH, entonces, el producto del tercio de la altura común OL por la base KMNSTV es el volumen de la pirámide propuesta OKMNSTV.

Por tanto, hemos descubierto el teorema general que dice que una pirámide tiene por volumen el producto de su base por el tercio de su altura.

XLIII

Como hemos visto (Artículo XXI) que el volumen de un prisma es el producto de su base por su altura, queda claro, por el artículo precedente, que las pirámides siempre serán el tercio de los prismas que tengan su misma base y su misma altura.

XLIV

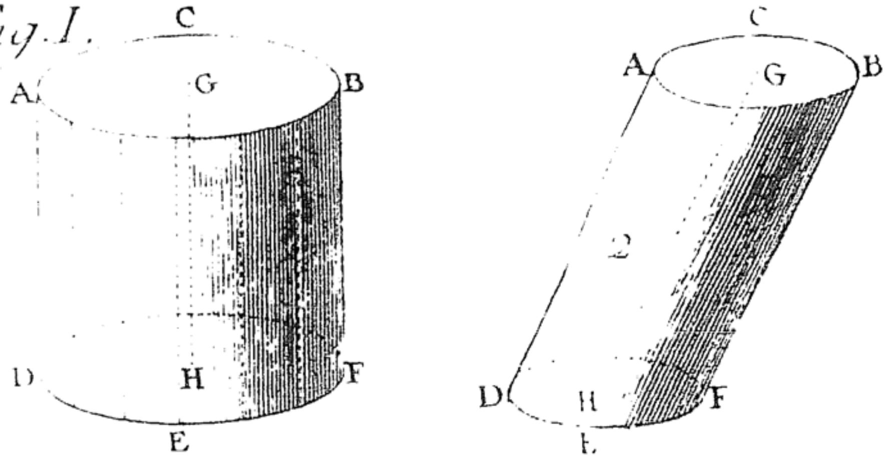
Después de haber medido todos los sólidos limitados por planos, vamos a buscar el procedimiento que se puede seguir para medir los sólidos cuyas superficies son curvas. Tal como hemos hecho en la tercera parte de esta obra, en la que hemos estudiado las figuras cuyos contornos no contienen otras curvas que el círculo, aquí sólo estudiaremos los cuerpos cuyas curvas son circulares.

En el examen de estos cuerpos tendremos dos objetivos: la medida de sus superficies y la de sus volúmenes; porque, siendo estas superficies o enteramente curvas o en parte planas y en parte curvas, no podemos remitir su medida a la primera parte de esta obra, tal como hemos hecho con los cuerpos limitados por planos.

XLV

El más simple de todos los cuerpos sólidos curvos es el cilindro. Es un cuerpo como el ABCDEF, cuyas dos bases ABC y DEF son dos círculos iguales y paralelos, unidos por una superficie curva que se puede imaginar formada por un plano plegado alrededor de sus circunferencias.

Fig. I.



Cuando los dos círculos se colocan de manera que el centro G del primero cae perpendicularmente sobre el centro H del segundo, el cilindro se llama recto.

Por el contrario, el cilindro se llama oblicuo cuando la línea trazada por los dos centros G y H es oblicua respecto a los planos ABC y DEF.

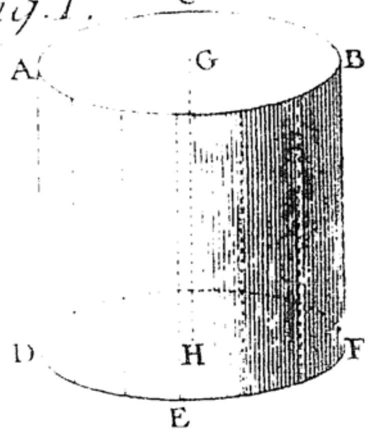
XLVI

La formación geométrica de estos sólidos, análoga a la de los prismas y paralelepípedos, de la que ya hemos hablado (Artículo XVII), consiste en hacer mover un círculo paralelamente a sí mismo de manera que todos sus puntos describan líneas rectas paralelas que se elevan fuera del plano de este círculo.

XLVII

La medida de un cilindro recto, algo que es frecuente en la práctica, se puede realizar de la manera siguiente.

Fig. I.



Si se dividen las dos circunferencias ABC y DEF en un mismo número de partes iguales, correspondiéndose los puntos de división de arriba con los de abajo, cuando se trazan las líneas rectas que unen los vértices correspondientes de los dos polígonos regulares que se obtienen en esta operación, queda claro que entonces se formará un prisma cuya superficie[2] estará compuesta por tantos rectángulos contenidos en la superficie del cilindro como lados hay encerrados en cada una de las circunferencias ABC y DEF.

El área de todos estos rectángulos, cuya altura común es AD, será el producto de la altura AD por la suma de todas las bases; es decir, por el contorno del polígono regular encerrado o inscrito en el círculo DEF o ABC.

Pero, como a medida que aumente el número de los lados de este polígono, el contorno del polígono se aproximará cada vez más a la circunferencia y la superficie del prisma a la del cilindro, se sigue que si el número de lados del antedicho polígono es infinito, entonces el prisma no diferirá del cilindro. La superficie curva del cilindro recto es pues igual a un rectángulo cuya altura es AD y cuya base es una línea recta igual a la circunferencia DEF.

Esta proposición puede servir para calcular, por ejemplo, el tejido que sería necesario para envolver un pilar cilíndrico o para tapizar el interior de una torre redonda.

[2] Clairaut se refiere obviamente a la superficie lateral del prisma (Nota de los traductores).

XLVIII

La superficie del cilindro oblicuo no se puede medir de la misma manera porque en lugar de rectángulos se tendrían paralelogramos de alturas diferentes. Solamente por métodos muy complicados y difíciles se ha llegado a conocer el valor aproximado de esta superficie. Los problemas de este género no atañen a los Elementos.

XLIX

Por lo que respecta al volumen de los cilindros, sean rectos u oblicuos, nada es más fácil de encontrar. Es evidente que todo lo que hemos dicho de los prismas convendrá a los cilindros, si éstos se consideran como los últimos prismas que se les pueden inscribir.

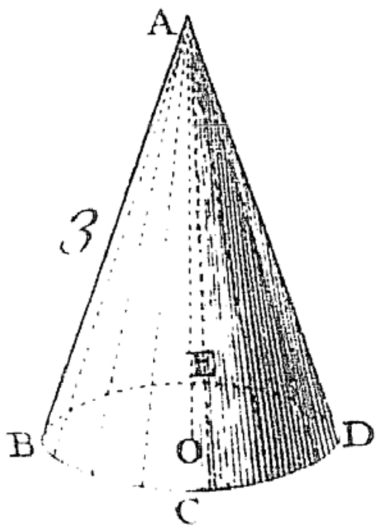
Así, los cilindros que tienen la misma base y la misma altura, también tienen el mismo volumen.

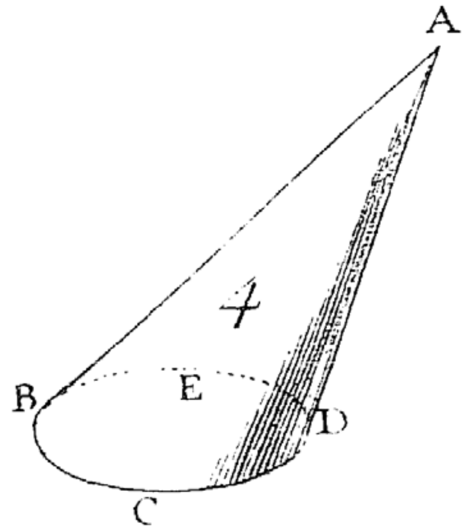
L

El volumen de un cilindro cualquiera es igual al producto de su base por su altura.

LI

El cono es el sólido curvo más simple, después del cilindro. Es una figura como la ABCDE cuya base es un círculo y cuya superficie está compuesta por una infinidad de líneas rectas que salen del vértice A hacia la circunferencia BCDE de este círculo. Se puede considerar este sólido como una pirámide cuya base es un círculo.





LII

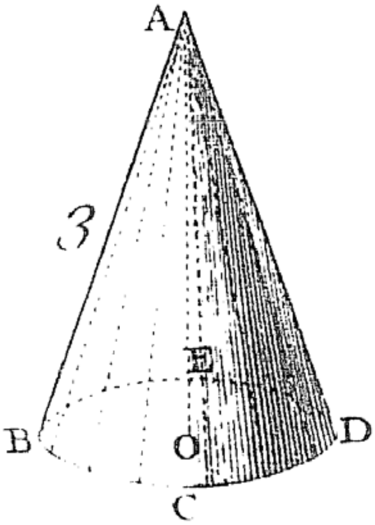
Si, como en la figura 3, el punto o vértice A del cono cae perpendicularmente sobre el centro O de la base, entonces el cono se llama recto. El cono se llama oblicuo si, como en la figura 4, no cae perpendicularmente sobre el centro de la base.

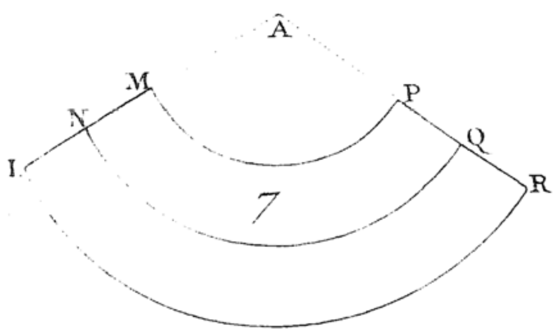
LIII

Para medir la superficie de un cono recto ABCDE se le considerará como la última de las pirámides que se le puede inscribir; es decir, se dividirá la circunferencia de su base BCDE, tal como se ha hecho en la circunferencia del cilindro, en una infinidad de pequeños lados. Trazando líneas desde todos los ángulos al vértice A del cono, se observará que la superficie cónica es un conjunto de una infinidad de pequeños triángulos isósceles, cuya altura es igual a la generatriz[3] AB del cono y cuyas bases, consideradas en su conjunto, son iguales a la circunferencia BCDE. De aquí se deduce fácilmente que el área de esta superficie se calcula multiplicando la mitad de AB por la circunferencia BCDE.

LIV

Si se recuerda ahora que el área de un sector circular es (3ª Parte. Artículo X) igual al producto del arco de este sector por la mitad del radio del círculo se verá que, para envolver el cono recto ABCDE con una superficie plegable, como de cartón, etc., es necesario tomar un sector de círculo ALR cuyo radio sea igual a AB y cuyo arco sea igual a la circunferencia BCDE.





LV

Cuando el cono es oblicuo la medida de su superficie, tal como ocurría con el cilindro oblicuo, es muy difícil de calcular, incluso de una manera aproximada. Por tanto, es un problema ajeno a los Elementos.

LVI

En cuando al volumen de los conos, sean rectos u oblicuos, se les considerará como las últimas de las pirámides que se pueden inscribir en ellos; y se podrá aplicar lo que se ha dicho de las pirámides en general.

Así, los conos que tienen la misma base y la misma altura también tienen el mismo volumen.

---

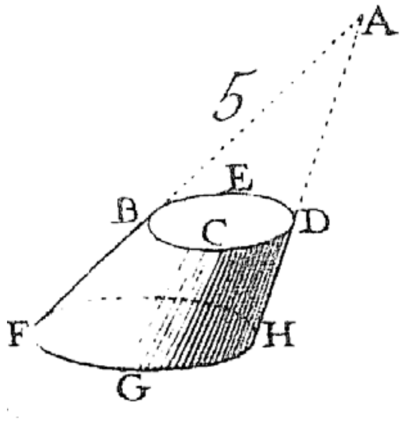
[3] Clairaut llama "lado" a la generatriz del cono (Nota de los traductores).

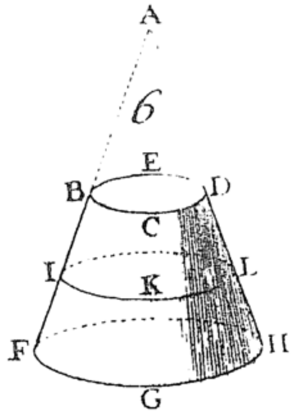
LVII

El volumen de un cono cualquiera es igual al producto de la base por el tercio de su altura.

LVIII

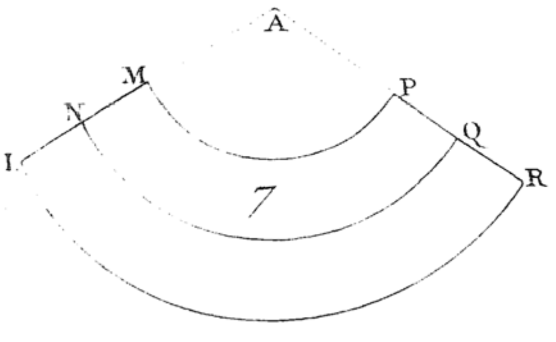
En alguna ocasión se necesita medir un cuerpo como BCDEFGH que se llama cono truncado. Es la parte que queda de un cono AFGH cuando se corta otro cono más pequeño ABCDE por un plano paralelo a la base FGH. Es evidente que el volumen de este sólido es la diferencia entre los volúmenes de los conos ABCDE y AFGH.

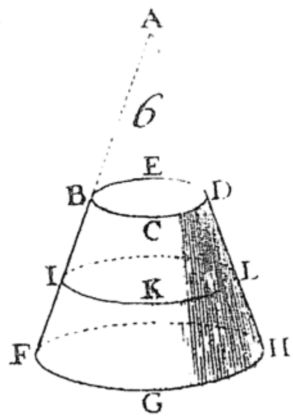




LIX

En cuanto a la superficie de un cono truncado, si se ha formado por la sección de un cono recto, se puede encontrar algún procedimiento más simple que el de medir separadamente las superficies de los dos conos y restar una de la otra. Para ello se utilizará el método siguiente, que es fácil de comprender después de lo que hemos dicho en el artículo LIV.





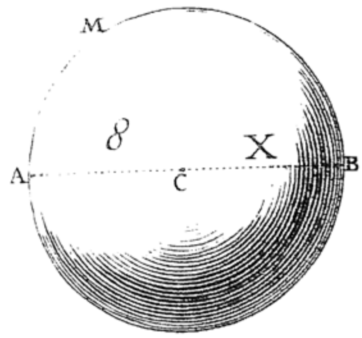
Supongamos que ALR es el sector que se necesita para envolver el cono AFGH. Describiendo, con centro en A y radio AM igual a AB, un arco MP queda claro que el espacio MPRL es una porción de corona adecuada para envolver la superficie del cono truncado. Si se dibujan las dos circunferencias, en las que MP y LR son arcos semejantes, se tendrá una corona completa cuya área (3ª Parte. Artículo VIII) es igual al producto de ML, igual a BF, por la circunferencia de radio AN. Entonces, la porción de corona MPRL, o la superficie del cono truncado BCDEFGH, que es lo mismo, se medirá multiplicando ML por el arco NQ. O, en otras palabras, multiplicando BF por la circunferencia IKL de la sección del sólido propuesto producida por un plano paralelo a la base que pasa por el punto medio del lado BF.

LX

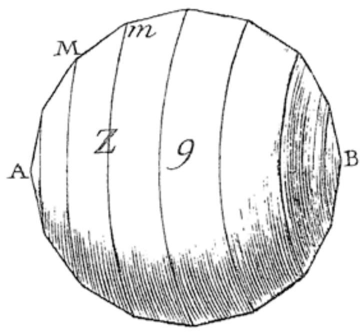
El último de los cuerpos sólidos que trataremos se llama esfera o globo; es aquél cuya superficie tiene todos los puntos igualmente alejados de un mismo punto que es el centro. Con frecuencia hay necesidad de medir esta superficie. Se querrá saber, por ejemplo, lo que se necesitaría para dorar una bola, cuántas láminas de plomo se deberían tomar para cubrir una cúpula, etc.

LXI

Sea X la esfera cuya superficie se quiere medir; es evidente que se puede concebir este sólido como producido por la revolución de un semicírculo AMB, alrededor de su diámetro AB.



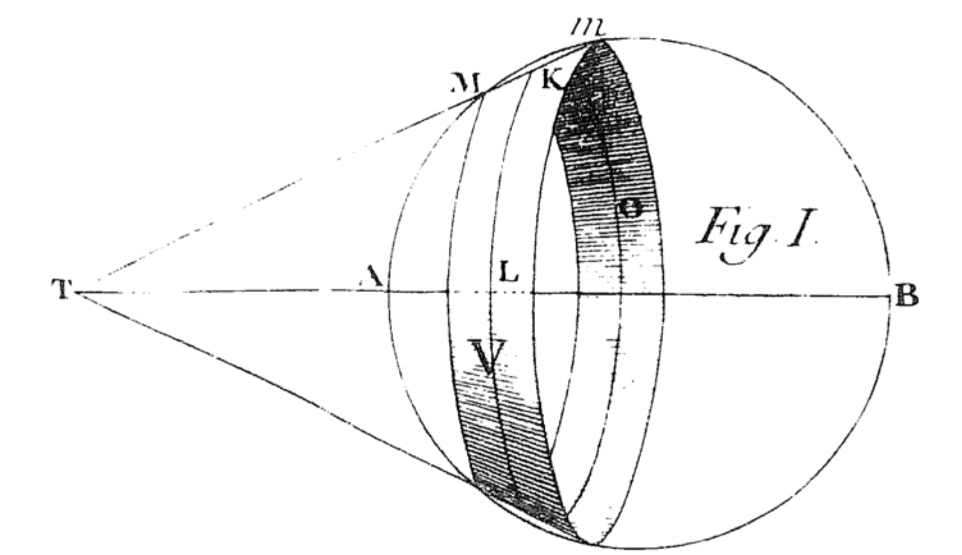
Supongamos, de entrada, que en lugar de la semicircunferencia tenemos un polígono regular de un número infinito de pequeños lados o, si se quiere, de un gran número de lados. Sólo nos proponemos medir la superficie Z producida por la revolución de este polígono.



Después de medir esta superficie será fácil pasar a la medida de la superficie de la esfera, tal como hemos pasado de la medida de figuras rectilíneas a la del círculo.

LXII

Para medir la superficie del sólido Z examinemos la pequeña parte de esta superficie que genera un lado cualquiera M*m* del polígono inscrito, mientras gira alrededor del diámetro AB. Es evidente que el lado M*m* describe en este movimiento una superficie de cono truncado V.



Prolonguemos la recta *m*M hasta que corte al diámetro o eje de revolución AB en el punto T. Si esta línea TM*m* gira al mismo tiempo que el semicírculo AMB describirá visiblemente un cono recto, cuyo vértice será T y cuya base será el círculo descrito por el punto *m*. Con esto, la superficie V generada por el movimiento de M*m* será una rebanada de este cono, limitada por los planos de los círculos que describen los puntos M y *m* durante su giro.

Pero, tal como hemos visto (Artículo LIX), la superficie V es equivalente a un rectángulo en el que M*m* es la altura y la base es una línea igual a la circunferencia KLO descrita por K, punto medio de M*m*. Entonces, la superficie engendrada por la revolución del polígono es equivalente a la suma de tantos rectángulos de esta naturaleza como lados, tales como M*m*, tenga este polígono.

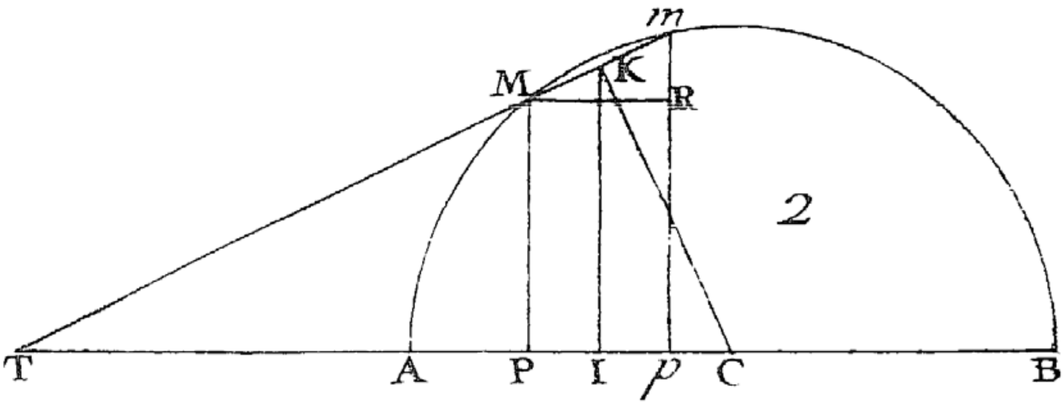
Como se supone que todos los lados M*m*, alturas de estos rectángulos, son iguales, se podría considerar la superficie buscada como un rectángulo que tendría la altura M*m* con una base igual a la suma de todas las circunferencias tales como KLO; es decir, descritas por los puntos medios de cada lado pequeño.

Pero como el polígono inscrito en el semicírculo AMB tiene un gran número de lados, la pequeñez de la altura M*m* y el tamaño excesivo de la base hacen que este rectángulo sea imposible de construir.

Para remediar este inconveniente es fácil imaginar la transformación de todos estos pequeños rectángulos en otros que tengan la misma altura, no imperceptible como M*m* sino bastante grande para que cada una de las bases sea bastante pequeña. Teniendo esto en cuenta la adición de todas estas pequeñas bases producirá una longitud comparable a la altura.

LXIII

Veamos pues si se pueden transformar de esta manera nuestros pequeños rectángulos. Supongamos, en primer lugar, para simplificar el problema, que nuestros rectángulos en lugar de tener por bases líneas iguales a las circunferencias KL tengan por bases los radios KI de estas circunferencias.



No resultará difícil aplicar lo que encontremos para estos últimos rectángulos a aquellos de los que nos hemos ocupado.

Se trata de encontrar un rectángulo que tenga por medida el producto de M*m* por KI y que tenga por altura cierta línea incomparablemente más grande que M*m* y que sea la misma en cualquier lugar en que esté situado este pequeño lado M*m*. Escojamos, por ejemplo, la recta CK, que es la apotema del polígono cuyo lado es *Mm* y que, por consiguiente, es siempre la misma cualquiera que sea el lado del polígono al que pertenezca. Entonces, debemos buscar una línea tal que su producto por CK sea igual al producto KI por M*m*; es decir, (2ª Parte. Artículo VII) es necesario encontrar una cuarta proporcional a las tres líneas CK, KI y M*m*.

Sabemos que mediante triángulos semejantes se descubren líneas proporcionales a otras líneas. Por tanto, es necesario formar triángulos semejantes cuyos lados homólogos sean las líneas en cuestión; esto es lo que ocurrirá trazando MR perpendicular a *mp*. Entonces, los triángulos M*m*R y KIC son semejantes dado que cada uno es rectángulo, uno en R y otro en I. Además, los ángulos *m*MR e IKC son iguales entre sí a causa de que el primero forma un ángulo recto con el ángulo M*m*R, igual al ángulo MKI, y que el otro, IKC, forma también un ángulo recto con MKI.

De todo ello se concluye fácilmente que CK es a KI como M*m* es a MR; es decir, que MR es la cuarta proporcional buscada; o, lo que viene a ser lo mismo, que el rectángulo CK por MR o por P*p* es equivalente al rectángulo M*m* por KI.

Ahora bien, como el rectángulo que queríamos transformar no es el M*m* por KI, sino el M*m* por la circunferencia de radio KI, recordaremos aquí que las circunferencias son entre sí como sus radios. En consecuencia, de la equivalencia entre el rectángulo M*m* por KI y el P*p* por CK se deduce la equivalencia del rectángulo M*m* por la circunferencia de radio KI y el rectángulo P*p* por la circunferencia de radio CK, dado que si dos rectángulos son equivalentes y conservando sus alturas se aumentan proporcionalmente sus bases, entonces estos rectángulos también son equivalentes.

LXIV

En los dos artículos precedentes hemos descubierto que todas las pequeñas superficies cónicas truncadas, como la V (Figura 1), son equivalentes a los rectángulos que tienen por altura una misma recta, igual a la circunferencia de radio CK, y por base una pequeña recta P*p* correspondiente a cada lado M*m*.

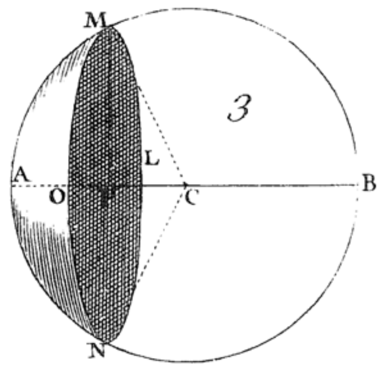
De ello se deduce que una suma cualquiera de esas pequeñas superficies, tomada por ejemplo de A hasta *p,* es equivalente a un rectángulo que tiene por altura una recta igual a la circunferencia de radio CK y por base la suma de todas las líneas tales como P*p,* tomada desde A hasta *p*, es decir, la recta A*p*.

Por tanto, para determinar la superficie total producida por la revolución del polígono completo, será necesario construir un rectángulo cuya base sea igual a la circunferencia descrita por el radio CK y cuya altura sea igual al diámetro AB.

LXV

Ahora es muy fácil medir la superficie de la esfera. Está claro que cuantos más lados tenga el polígono, el sólido producido por su revolución se aproximará más a la esfera; y, además, la apotema CK se aproximará más al radio. De modo que, si se imagina que el polígono se ha transformado en un círculo, entonces la apotema CK será el radio de dicho círculo y la superficie de la esfera tendrá la misma extensión que un rectángulo cuya altura sea el diámetro del círculo y cuya base sea una línea igual a la circunferencia del círculo que la ha producido, y que se llama ordinariamente círculo máximo de la esfera.

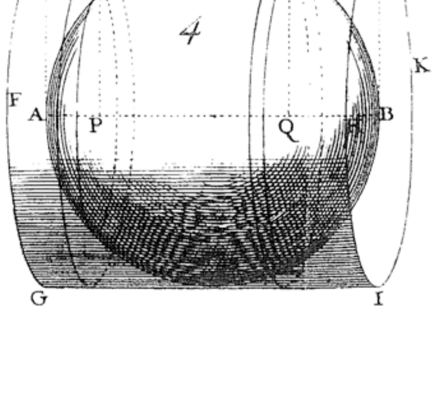
LVI



En cuanto a la superficie curva de un segmento de esfera AMLNO; es decir, de la parte que se quita de una esfera cuando se la corta por un plano MLNO perpendicular al diámetro, tiene por medida el producto de su espesor, o flecha AP, por la circunferencia del círculo máximo AMBN.

La razón es la misma que aquella por la cual se ha probado (Artículo LXIV) que la suma de las superficies de todos los pequeños conos truncados, comprendidos desde A hasta *p,* es igual al rectángulo cuya altura es A*p* y cuya base es una línea igual a la circunferencia de radio CK.

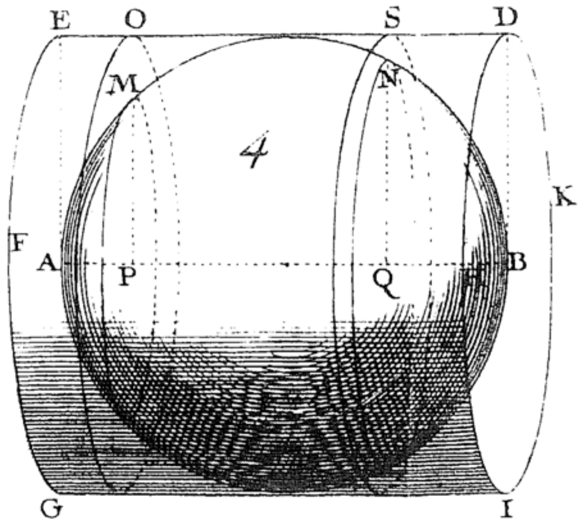
LXVII



La medida precedente de la superficie de la esfera muestra que si se hace girar el rectángulo ABDE, a la vez que el semicírculo AMNB, alrededor de AB, la superficie curva del cilindro recto EFGIKDH producido por la revolución de este rectángulo es igual a la de la esfera descrita por el semicírculo; lo que se expresa ordinariamente así: la superficie de la esfera es igual a la del cilindro circunscrito.

LXVIII

Y si se cortan, tanto el cilindro como la esfera, por dos planos cualesquiera perpendiculares al diámetro AB en P y en Q, las secciones del cilindro y de la esfera que se produzcan por el movimiento de la recta OS y del arco MN serán iguales en superficie.



LXIX

Se ve además por lo que precede que la superficie de la esfera es igual a cuatro veces el área de su círculo máximo; porque la superficie de este círculo máximo tiene por medida el producto de la mitad del radio o de un cuarto del diámetro por la circunferencia, y la superficie de la esfera es igual al producto del diámetro entero por la misma circunferencia.

LXX

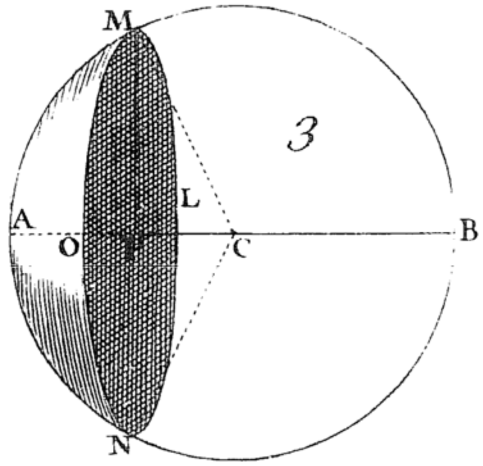
Una vez hallada la medida de la superficie de la esfera es muy fácil medir su volumen; porque se puede considerar la esfera como la reunión de una infinidad de pequeñas pirámides cuyos vértices están en su centro y cuyas bases cubren la superficie entera.

Cada una de estas pirámides tiene por medida el producto del tercio de su altura, es decir del radio, por su base. Su suma total o el volumen de la esfera se medirá multiplicando el tercio del radio por su superficie; es decir, por cuatro veces el área del círculo máximo.

LXXI

Como el producto del tercio del radio por cuatro veces el círculo máximo es lo mismo que el producto de cuatro veces el tercio del radio, es decir, de los dos tercios del diámetro por el círculo máximo, y que el volumen del cilindro EFGIKDH tiene por medida el producto del diámetro por el mismo círculo máximo que le sirve de base, se sigue que el volumen de la esfera es los dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

LXXII



Si se quisiese medir el volumen de un segmento de esfera, AMLNO, es evidente que, en primer lugar, es necesario medir la porción de esfera producida por la revolución del sector CAM; lo que se hace multiplicando el tercio del radio por la superficie del segmento de esfera propuesto AMLNO. A continuación, se resta de esta medida la del cono producido por la revolución del triángulo CPM, es decir, el cono cuya base es el círculo MLNO, y cuya altura es CP. La diferencia obtenida es el volumen del segmento de esfera.

LXXIII

Concluimos estos Elementos con algunas proposiciones sobre el volumen y la superficie de los cuerpos semejantes. Estas proposiciones se presentan de forma natural cuando se reflexiona sobre la semejanza de dos cuerpos. Incluso podríamos decir que se descubren por analogía, si se recuerda lo que hemos dicho de la semejanza de las figuras planas (1ª Parte. Artículo XXXIV y siguientes); es decir, aquellas que se describen sobre planos.

Hemos determinado (Artículo XXXII) en qué consiste la semejanza de dos pirámides. La definición que hemos dado de pirámides semejantes se puede extender a todos los cuerpos limitados por planos; es decir, dos cuerpos de esta naturaleza se llaman semejantes cuando todos los ángulos formados por los lados del primero son los mismos que los ángulos formados por los lados del segundo, y cuando los lados de uno de estos cuerpos son proporcionales a los lados homólogos del otro.

LXXIV

En cuanto a los cuerpos que no están limitados por planos en todos sus lados, por ejemplo los cilindros y los conos, también es fácil determinar las condiciones necesarias para que sean semejantes.

Dos cilindros rectos son semejantes si sus alturas están en la misma razón que sus bases.

LXXV

Si los cilindros son oblicuos, será necesario además que las líneas que unen los centros de los dos círculos, en cada uno de estos cilindros, formen los mismos ángulos con los planos de sus bases.

LXXVI

Las mismas definiciones se pueden aplicar a los conos poniendo, en lugar de la línea que pasa por los centros de las dos bases del cilindro, la línea que va desde el vértice del cono al centro del círculo que le sirve de base.

LXVII

Para que dos conos truncados sean semejantes es necesario, en primer lugar, que los conos de los que forman parte sean semejantes; y, en segundo lugar, que sus alturas sean entre sí como los radios de sus bases.

LXXVIII

Respecto a las esferas se observa que todas son semejantes entre sí, como todas las figuras, sólidas o planas; es decir, que sólo necesitan una sola línea para ser determinadas, como el círculo, el cuadrado, el triángulo equilátero, el cubo, el cilindro circunscrito a la esfera, etc.

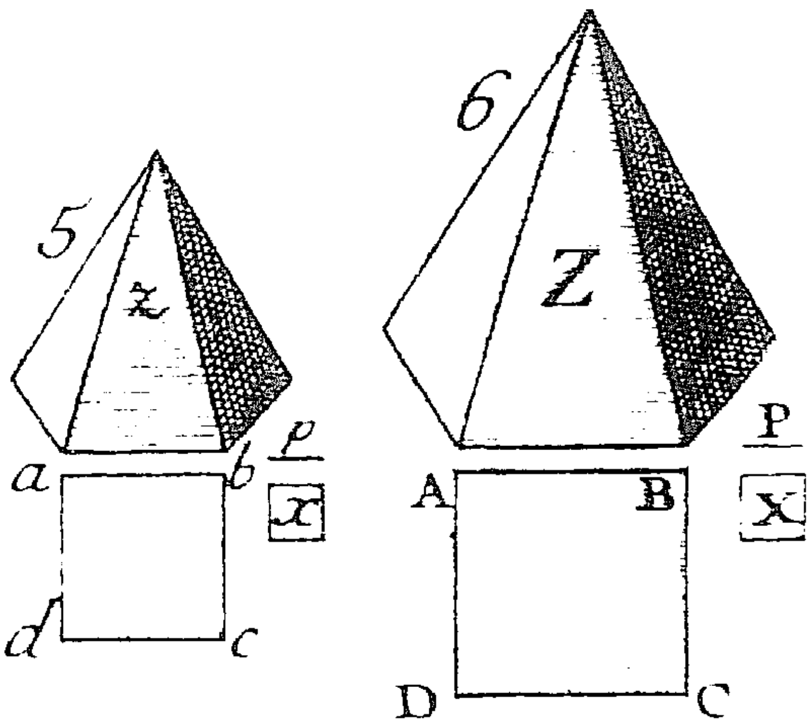
LXXIX

En general, se puede decir de las figuras sólidas semejantes, como se ha dicho de las figuras planas, que no se diferencian más que por las escalas con las que se han construido.

Teniendo bien presente esta exposición, se llega a dos proposiciones fundamentales sobre la superficie y el volumen de los cuerpos semejantes.

LXXX

La primera proposición muestra que las superficies de dos sólidos semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos. Hay, por ejemplo, la misma razón entre las superficies de dos pirámides semejantes *z* y Z que entre los cuadrados *abcd* y ABCD, construidos sobre los lados *ab* y AB que se corresponden en las dos pirámides.



Para descubrir esa proposición no son necesarios más razonamientos que los que se han empleado (1ª Parte. Artículos XLIII y XLIV); es decir, solamente es necesario considerar que si P es la escala de la pirámide Z y *p* la escala de la pirámide semejante *z*, entonces las líneas que se hayan necesitado para medir la superficie de Z y la del cuadrado ABCD tendrán tantas P como *p* tengan las líneas que se hayan necesitado para medir la superficie de *z* y la del cuadrado *abcd*.

De ello se sigue que el producto de las líneas que intervienen en la medida de Z y de ABCD dará tantos cuadrados X hechos sobre P como cuadrados *x* hechos sobre *p* resulten del producto de las líneas utilizadas para medir *z* y *abcd*. Es decir, que los números que expresan la relación de la superficie de la pirámide Z al cuadrado ABCD serán los mismos que los que expresan la relación de la superficie *z* al cuadrado *abcd*.

Se podría seguir el mismo razonamiento en la comparación de todos los demás cuerpos semejantes, sea que estos cuerpos estuviesen limitados por planos, sea que estuviesen limitados por superficies curvas. Las líneas empleadas en medir las superficies de todos estos cuerpos tendrán siempre el mismo número de partes de sus escalas. En consecuencia, los productos de estas líneas contendrán un mismo número de veces los cuadrados de estas mismas partes.

Si las líneas necesarias para medir la superficie de los cuerpos semejantes fuesen inconmensurables, quedaría claro que la demostración subsistirá siempre, puesto que se emplearían en ese caso los principios de los que nos hemos servido (2ª Parte. Artículo XXVIII) para comparar las figuras semejantes cuyos lados eran inconmensurables.

LXXXI

De la misma manera se podría demostrar que las superficies de las esferas son entre sí como los cuadrados de sus radios. Pero, para verlo aun más claramente de otra manera, será suficiente recordar que las superficies de los círculos son entre sí como los cuadrados de sus radios (3ª Parte. Artículo VI) y que las superficies de las esferas son el cuádruplo de sus círculos máximos (Artículo LXIX).

LXXXII

La proporcionalidad entre las superficies de los cuerpos semejantes y los cuadrados de sus lados homólogos es tan general que se aplica tanto a los cuerpos que no se saben medir como a aquellos cuya medida se conoce.

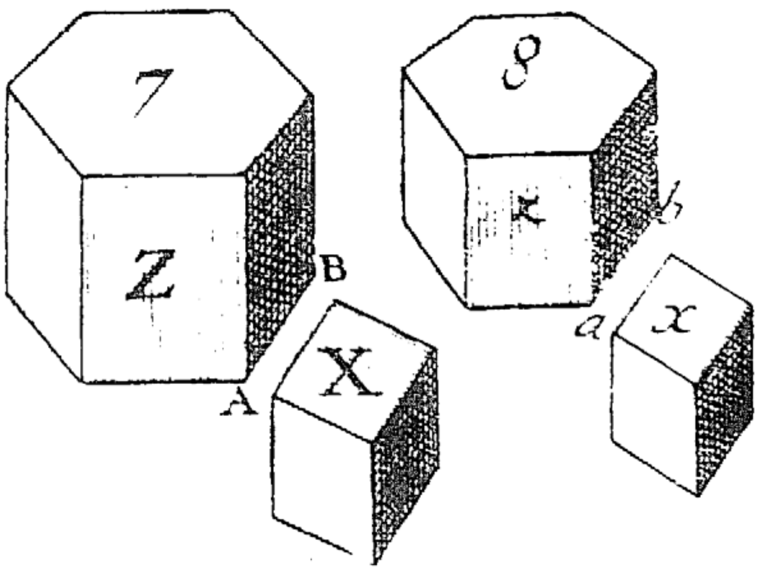
Sin saber medir, por ejemplo, la superficie de un cilindro oblicuo se puede afirmar que las superficies de dos cilindros oblicuos semejantes son entre sí como los cuadrados de los diámetros de las bases de esos cilindros.

Inscribiendo en estos dos cilindros dos prismas semejantes de tantas caras como se quiera se sabe, por lo que precede, que las superficies de estos prismas son entre sí como los cuadrados de los diámetros de sus bases. Entonces, los cilindros mismos, considerados como los últimos de los prismas inscritos, tendrán sus superficies en la misma razón.

LXXXIII

La proposición fundamental para la comparación del volumen de los cuerpos semejantes es ésta: los sólidos semejantes son entre sí como los cubos de sus lados homólogos.

Esta proposición se puede demostrar como la precedente considerando que las figuras semejantes no difieren más que por las escalas sobre las que se han construido.



Para hacerlo ver tan simplemente como sea posible, nos serviremos, por ejemplo, de dos prismas semejantes Z y *z* y de los dos cubos X y *x* cuyos lados son iguales a AB y *ab*, líneas homólogas en estos dos prismas. Tomaremos además dos escalas AB y *ab* divididas en un número suficiente de partes para que se puedan medir las dimensiones de estos sólidos. Hecho esto resulta claro que habrá tantos cubos hechos sobre las partes de *ab* en el prisma *z* y en el cubo *x* como cubos hechos sobre las partes de AB en el prisma Z y en el cubo X.

El mismo razonamiento sirve para todos los demás sólidos. Aquellos que tienen las dimensiones inconmensurables también están en la misma razón que los cubos de sus lados homólogos.

LXXXIV

Por ejemplo, los volúmenes de las esferas son evidentemente entre sí como los cubos de sus radios.

FIN

De la imprenta de CHARDON, calle Galande.