Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

La evitación de los números irracionales en la teoría musical antigua y sus consecuencias

por

Alfonso Hernando González

Introducción

La documentación sobre la ciencia en la Antigua Grecia es relativamente escasa, además de tener una fiabilidad muy difícil de evaluar, sobre todo si se trata de investigar periodos o aspectos especialmente oscuros. Este carácter nebuloso conduce, entre otras cosas, a una historiografía muy compleja en la que abundan los esfuerzos para rellenar las lagunas documentales de maneras bien distintas. Sin embargo, junto a puntos muy visitados, aparecen otros mucho menos transitados. Mientras todo lo relativo al descubrimiento de los números irracionales ha dado muchísimo que hablar, su relación con la música ha pasado casi desapercibida, pues, además de que se menciona en raras ocasiones, no se suele reparar en su relevancia. Ahora bien, esto contrasta con el peso que se le da en una buena cantidad de fuentes originales. Además, como trataremos de mostrar, el peculiar uso que hicieron de las matemáticas las dos escuelas de teoría musical más influyentes es un lugar privilegiado para analizar las características y limitaciones de la ciencia griega.

Los números y las magnitudes en los *Elementos*

Los *Elementos* de Euclides (compilados hacia el año 300 antes de nuestra era)[1] son, en lo que se refiere a la matemática griega, la fuente más extensa e importante

[1]Utilizamos la edición de Heiberg, tomando como referencia la versión inglesa de Heath [18]. Ambas se pueden consultar en `http://www.perseus.tufts.edu/hopper/`. Salvo indicación explícita se acepta el aparato crítico de la citada edición en lo relativo a interpolaciones, añadidos, fechas, etc. En este trabajo, cuando utilicemos nombres propios (o sus correspondientes adjetivaciones) se sobreentiende que es una forma de evitar perífrasis y largos circunloquios. Además seguimos siempre las atribuciones usuales, de modo que si, por ejemplo, decimos Euclides, nos referimos al ignorado autor o autores de la compilación de los *Elementos*. Eso también vale en el caso de palabras como platónico o aristotélico, que siempre se refieren al corpus admitido de los correspondientes textos.

sobre el estrato más antiguo al que tenemos acceso y, en muchos puntos, proporcionan la única documentación disponible. Su temática cubre lo que hoy llamaríamos aritmética y geometría, sin que se ocupe, por lo menos directamente, de la teoría musical.

Esta obra, y, en general, la matemática griega, solo considera como números ($\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\grave{o}\varsigma$, *arithmos*) los números naturales. También utiliza la idea de que un número puede ponerse en relación con otro, formando una razón ($\lambda\acute{o}\gamma o\varsigma$, *logos*). Aunque formalmente esto equivale a nuestras fracciones o números racionales, lo cierto es que ellos nunca lo consideraron así. Si pasamos a la geometría nos podemos hacer una idea más clara de las peculiaridades de la matemática euclídea. Cuando encontraban una línea de 5 unidades y otra de 3, decían que estaban en la misma proporción que una de 10 y otra de 6. En términos modernos resulta: $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \cdots = ?$

Hemos puesto el signo de interrogación para recordar que los griegos no utilizaron nunca un único signo o cantidad para indicar un cociente[2]. Como veremos más adelante, también se estudiaban las sucesiones de tres o más números formando una progresión.

En los *Elementos* juega un papel importante la medida común de dos segmentos (que es lo que corresponde a nuestro máximo común divisor). Euclides prueba muchos de los teoremas que hoy se pueden encontrar en cualquier libro de texto elemental. No obstante, también se sabía que a veces no era posible encontrar una medida común entre dos segmentos. Eso era lo que ocurría con el lado y la diagonal de un cuadrado[3]. Para especificarlo decían que lado y diagonal eran inconmensurables ($\acute{\alpha}\sigma\acute{\upsilon}\mu\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma$, *asimmetros*, o sea, sin medida común). Esto ciertamente planteaba serias dificultades, ya que era tanto como decir que no se podían encontrar dos números a y b que cumplieran que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. Actualmente, resumimos lo anterior diciendo que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Sin embargo, en la antigua Grecia la forma de abordar el problema fue bien distinta, y consistió en distinguir entre números, que son siempre conmensurables unos con otros, y magnitudes ($\mu\acute{\varepsilon}\gamma\varepsilon\theta o\varsigma$, *megethos*), que a veces no lo son. La palabra *megethos* siempre se refiere al tamaño de una longitud, o, en su caso, de una superficie o un volumen. Hay que recalcar el carácter no numérico de esta noción. Aquí seguiremos la norma usual de traducirlo por magnitud, aunque no sea una traducción muy fiel.

Con esta distinción era posible estudiar la geometría plana de una manera más completa, ya que, con la única ayuda de los números naturales, no lo era. Por esta razón, una buena parte de los *Elementos* está precisamente dedicada al estudio de entidades geométricas cuyo análisis obliga a la utilización de magnitudes incon-

[2]Uno de los libros que más han insistido en esta peculiaridad de la idea de proporción es el de Fowler [13, p. 20 y pp. 221–270]. En general, todos los historiadores están de acuerdo en que no se debe identificar el uso moderno de las fracciones con el de las proporciones antiguas. En este trabajo mezclamos en ocasiones terminología antigua y moderna para evitar largas explicaciones, siempre que no dé lugar a confusión. Un primer ejemplo lo tenemos en la utilización del signo «=» que es completamente ajeno a la matemática griega, ya que fue introducido en el siglo XVI.

[3]Este resultado, como siempre se recuerda, era conocido antes de la edición de los *Elementos*. Aristóteles, por ejemplo, alude con frecuencia a ello. Para una relación de la documentación disponible es muy informativo y sintético [13, pp. 294–308], que evita toda interpretación «creativa» a la que han sido tan aficionados algunos historiadores.

mensurables. De aquí podría deducirse que la geometría es el único campo en el que aparecieron estas sorprendentes criaturas, pero nos equivocaríamos: en la teoría musical antigua también jugaron un papel destacado.

Los irracionales y la música

La escuela pitagórica[4] caracterizaba los intervalos musicales con proporciones numéricas. La octava venía dada por la proporción $2/1$; la quinta, por la $3/2$; la cuarta, por $4/3$; y el tono, por $9/8$. Estas proporciones eran las que tenían las longitudes de las cuerdas correspondientes[5]. O sea, si se tocaba una cuerda con una cierta longitud y luego se dividía en dos, el sonido resultante estaba una octava por encima (es decir, a la mitad de longitud le corresponde una frecuencia doble). De modo análogo se obtenían el resto de los intervalos. Este hecho se interpretaba a menudo como una prueba de que en el universo las razones numéricas sencillas eran un ingrediente esencial. Manipular estos intervalos era cosa fácil: por ejemplo, la octava $2/1$ era igual a la quinta $3/2$ más la cuarta $4/3$. Si lo queremos expresar mediante multiplicación de frecuencias, basta poner $2/1 = (3/2)(4/3)$. Análogamente se definía el tono como la diferencia entre la quinta y la cuarta, ya que $9/8 = (3/2)/(4/3)$.

En lo anterior hemos usado tanto el sistema de multiplicaciones (que corresponde al cálculo con frecuencias) como el de sumas, que es el más natural cuando se trabaja con intervalos que se estructuran en una escala logarítmica. Hay que tener en cuenta que los antiguos no desarrollaron el concepto de frecuencia (siempre trabajaron con longitudes de cuerdas, o, más exactamente, con la longitud del instrumento conocido como monocordio) ni tampoco el de escala logarítmica.

Sin embargo, no todo era del color de rosa, ya que en la música también aparecían los números irracionales. En efecto, si queremos dividir en dos partes iguales un intervalo cualquiera (que equivale a hallar la raíz cuadrada de su cociente de frecuencias), casi siempre nos vemos obligados a introducir números irracionales. Había intervalos, como el de octava, que podían dividirse fácilmente de otras maneras (la indicada, por ejemplo), pero la división de otros era más difícil. El caso del tono

---

[4]No se sabe nada con seguridad de la figura semilegendaria de Pitágoras ni de los conocimientos musicales de los primeros pitagóricos. Las primeras noticias empiezan algo antes de Platón, véase el clásico [10] o la muy solvente *Stanford Encyclopedia of Philosophy* que se puede consultar en `http://plato.stanford.edu/`.

[5]En [4, pp. 28–45] se da la traducción inglesa de los textos más antiguos en los que aparece esta idea que está muy presente en todas las obras de tendencia pitagórica. En particular se reproduce y se analiza el fragmento 6 de Filolao (pp. 36–38), que es la referencia más antigua a estas razones numéricas. Este texto ha sido analizado con mucho detalle en [30] y en [6]. En el *Timeo* platónico [25] se da un lugar central a estos intervalos a la hora de elucidar la estructura armónica del propio cosmos. En la obra citada [4] se puede encontrar la versión inglesa de todos los textos sobre música a los que nos referiremos, a excepción de los de Boecio que son más tardíos. En las referencias de las obras antiguas a las que se alude, cuando existen y las hemos podido consultar, se incluye en cada caso una edición española fácil de localizar. Todas las obras antiguas se citan, como es habitual, por las ediciones que se toman como referencia en la correspondiente bibliografía especializada. Todas las traducciones que aparecen al final (tanto las españolas como las inglesas) incluyen al margen la numeración de la edición de referencia, de modo que es fácil encontrar los pasajes correspondientes en la edición que se indica o en otra cualquiera.

(9/8) era especialmente delicado, como tendremos oportunidad de comprobar. Su mitad, o sea, el semitono, viene dado por $\sqrt{9/8}$, que, claro está, no es racional (o, con su terminología, no es una magnitud conmensurable). Los autores antiguos no solo fueron conscientes de esta dificultad, sino que además la estudiaron con detalle.

La *Sectio canonis* es el tratado conservado más antiguo en el que aparece explicada la teoría pitagórica de la música y es aproximadamente contemporáneo de los *Elementos* (de hecho, durante mucho tiempo se atribuyó al propio Euclides). Su breve contenido se divide en dos partes con una pequeña introducción. En la primera expone unos teoremas con contenido puramente matemático, mientras que en la segunda, haciendo los cambios necesarios, aplica lo señalado al campo musical. Todo ello lo hace de un modo que recuerda claramente al mundo de los *Elementos*, pero utilizando un nivel matemático más elemental y menos general[6].

En la *Sectio canonis* se demuestra el siguiente teorema:

> 16. El tono (9/8) no puede dividirse en dos o más partes iguales[7].

Lo primero que se constata es que en la teoría musical se rechaza completamente la aparición de una cantidad que no fuera un número racional, por tanto no se dice que *no se puede dividir utilizando números naturales*, sino simplemente que *no se puede dividir*. Eso hace que, cuando esta afirmación se acabe convirtiendo en un lugar común, haya una cierta ambigüedad sobre la naturaleza y el alcance de esta prohibición.

La demostración que da de la imposibilidad de la división del tono se apoya en un resultado de los *Elementos*, más en concreto, en este teorema:

> VIII.8. Si entre dos números se puede colocar una serie de medios proporcionales, entonces se puede poner el mismo número de medios proporcionales entre otros dos que estén en la misma razón.

Ahora bien, si intentamos colocar alguno entre 8 y 9, se ve que es imposible, ya que no hay ningún número entre ellos. Pero, como acabamos de indicar, de acuerdo con VIII.8, eso equivale a decir que, entre dos números con esa proporción, no se puede encontrar tampoco un medio proporcional, puesto que si no también se podría poner entre 8 y 9, lo que es imposible.

Aunque no podemos conocer los detalles, resulta lógico pensar que el proceso que llevó a este resultado empezaría en una serie de tanteos con el objetivo de tratar de

[6]Siguiendo el estilo de los *Elementos*, se podrían exponer los teoremas 14 y 15 de manera más elegante y general (utilizando la teoría de los divisores del libro VII). No obstante, la *Sectio* ofrece valores numéricos, lo que resulta más asequible y permite cuantificar la diferencia entre los intervalos a los que se refiere. Los autores de libros sobre teoría musical siguen siempre la estela de la *Sectio*; por ejemplo, Boecio y Ptolomeo así lo hacen.

[7]Véase la versión inglesa en [4, p. 202]. La traducción completa está en [4, pp. 191–208]. En [23, pp. 344–353] se analiza la cronología de la obra y sus diferentes estratos. En esta obra se detallan los manuscritos disponibles de cada obra musical antigua, así como la datación (cuando es posible) y la discusión de su autenticidad. Remitimos a ella para más información. Finalmente en [6, cap. 14] se analiza este texto con mucho detalle. El teorema 16 se apoya en el teorema 3 que afirma que no se puede encontrar ningún medio proporcional entre dos números consecutivos n y $n+1$. A su vez el teorema 13 afirma que el tono corresponde a una proporción de este tipo (más en concreto, a la 9/8). De los teoremas 3 y 13 se deduce el 16 directamente.

encontrar un número que dividiese exactamente el tono. En otras palabras, buscarían un número de esas características entre los que tenían la misma proporción que 8 y 9, o sea, entre 16 y 18, 24 y 27, etc.[8] En los casos más sencillos, es fácil comprobar que no se encuentra tal cosa. Es razonable suponer que una demostración parcial de Arquitas (aproximadamente contemporáneo de Platón)[9] se sitúe en un contexto en el que no se disponía de una teoría más satisfactoria. Sea como fuere, los matemáticos antiguos tuvieron que hacer un esfuerzo para conseguir estudiar mejor el problema, cosa que dio como fruto los resultados que están sintetizados en el libro VIII de los *Elementos*. Los que están directamente relacionados con el VIII.8 son los tres primeros (los enunciados están algo modernizados):

> VIII.1. Si tenemos una serie de números en proporción geométrica[10] y los dos números de los extremos son números primos entre sí, entonces esta serie es la de los números menores posibles.
>
> VIII.2. Dada una razón, construir una progresión geométrica con tantos términos como se quiera con dicha razón, con los números más pequeños posibles.
>
> VIII.3. Recíproco de VIII.1.

El esquema deductivo para llegar a la demostración de VIII.8 es una simple cadena que se puede poner del siguiente modo:

$$\text{VIII.1} \Rightarrow \text{VIII.2} \Rightarrow \text{VIII.3} \Rightarrow \text{VIII.8}.$$

Para llevar a cabo las demostraciones también hay que apoyarse en algunos resultados sobre la divisibilidad que se establecen en el libro anterior[11]. Una vez establecido VIII.8, la imposibilidad de dividir el tono en dos partes iguales es un simple corolario que se expone en la *Sectio canonis* como ya hemos indicado.

Es bastante probable que la primera parte del libro VIII[12] se llevara a cabo teniendo presente el problema de la división de los intervalos musicales, toda vez que ya era conocida la imposibilidad de la división del tono en dos partes iguales, además de que no se conoce ninguna otra parte de la ciencia griega que se ajuste tan

[8] Se pueden encontrar diversas alusiones a estos sistemas, siempre en obras tardías. En Arístides Quintiliano, *De musica* [1, III.1, 95], se explica cómo se pueden ir obteniendo diferentes aproximaciones a algunas variedades del semitono sin que nunca sean exactas. En Boecio, *De institutione musica* [7, III.1], se indica que la imposibilidad de la división del tono en dos partes exactamente iguales se constata por simple inspección de diferentes casos.

[9] Esta demostración se conoce porque la recoge Boecio (casi mil años después) [7, III.11] en un fragmento que tiene gran interés, ya que es uno de los pocos ejemplos de matemática preeuclídea que se conservan.

[10] Hemos modernizado la expresión ἑξῆς ἀνάλογον (*exes analogon*) traduciéndola como proporción geométrica, el original sería algo así como proporción continua. El término *analogon* se utiliza para proporción en general.

[11] La demostración transcurre de acuerdo con los cánones euclídeos. Su hilo conductor es la idea de que, dada una progresión geométrica, se puede tomar la equivalente con números mínimos (o sea primos entre sí) y, una vez que se demuestra que todas las demás contienen múltiplos de esos mínimos, la demostración de VIII.8 es fácil. Para más detalles, véase [18, vol. II, pp. 345–358], donde se dan, además de las demostraciones originales, esquemas modernizados fáciles de seguir.

[12] Mientras no se indique otra cosa, cuando digamos primera parte del libro VIII nos referimos a sus 10 primeros teoremas. El resto, como veremos, tiene otro carácter, con una relación menos directa con la teoría musical.

bien a lo que se dice en este libro. Como dato complementario se puede añadir que, en la segunda parte de este libro y en el siguiente se sigue hablando de progresiones geométricas, pero de una manera diferente y adaptándola a otros problemas, de modo que cobra más fuerza la idea de que el libro citado estuviese pensado tomando la música como telón de fondo. En los *Elementos* no se incluye el resultado de la *Sectio canonis*, lo que no impide que aparezcan otros que, de hecho, son más generales. En concreto, un poco más adelante encontramos el teorema

> VIII.20. Si entre dos números se puede poner un medio proporcional, entonces los dos son números planos semejantes.

Con su terminología, son los que tienen la forma ab y cd (o sea, con dos factores cada uno), donde $a/b = c/d$. Por un procedimiento lógico elemental (y muchas veces usado en los *Elementos*) se obtiene un resultado más general que el de la *Sectio canonis*: cualquier intervalo cuyos extremos no sean números planos semejantes no puede dividirse en dos partes iguales. Un caso particular de este resultado (pero que no aparece en el libro VIII) es que la raíz de cualquier número que no sea un cuadrado perfecto no puede ser un número racional. Es decir, esta proposición deja tan a la mano la demostración de que hay muchos números irracionales (utilizando la terminología moderna) que resulta obligado referirse a su silencio.

Lo que dicen y lo que ocultan los *Elementos*

Los *Elementos* nunca explican las razones por las que incluyen unas cosas y excluyen otras. Se limitan a hacer una construcción lo más perfecta posible. No obstante, precisamente a través de su estructura, podemos tratar de comprender cuál es su estrategia general. En primer lugar, se constata que su objetivo es describir matemáticamente la realidad empírica. Es decir, siempre se habla del mundo tal y como se entendía en su momento[13]. Por esa razón se definen explícitamente los números planos, los cuadrados, los sólidos y los cúbicos, mientras que no se hace lo mismo para potencias mayores[14]. En general se hace un tratamiento bien diferenciado de los casos en los que intervienen estos tipos de números, sin hacerse casi nunca generalizaciones, que hoy nos parecen naturales, a un número mayor de factores. Resulta razonable pensar que este tratamiento proviene de la profunda relación entre lo geométrico y el estudio de estos casos específicos. Por eso también resulta natural que no se utilicen cantidades negativas ni aparezca nada equivalente al cero. Nada más alejado de Euclides que la idea moderna de que un sistema formal no tiene una relación directa con nada empírico. Su estrategia es muy distinta: la matemática se

[13]En [17] se argumenta a favor de una interpretación de los *Elementos* con una estructura ontológica sencilla, en la que las demostraciones no se interpretan como las demostraciones de existencia modernas. En general, la filosofía griega se ha analizado desde puntos de vista que tendían a dar a su mundo una complejidad ontológica y epistemológica que no está en el original (pero sí en el de los estudiosos). Lo mismo ocurre con los historiadores de los primeros años del siglo XX que hablaban de unas crisis de la matemática griega que se parecían sospechosamente a las de su propia época. En general, afortunadamente, esta tendencia se ha debilitado en los últimos años.

[14]Las definiciones de cada uno de estos tipos de números están al principio del libro VII, y tienen los números 16 a 19 en la edición de Heiberg.

encamina a describir la realidad de una manera ajustada, formalizada y rigurosa. Este mismo espíritu dirige el prodigioso entramado de los *Elementos*: nunca se utiliza ningún resultado que no se haya demostrado previamente, y siempre se procura utilizar los mínimos elementos posibles en el armazón teórico.

Si nos acercamos más despacio, comprobamos que Euclides siempre acota el terreno y estudia lo que le parece más pertinente, a la vez que se omite toda referencia a lo que queda fuera. Este puede ser el motivo que hace que, en el libro VIII, cuando habla de progresiones geométricas, se limite a indicar en qué casos es posible la inclusión de medios proporcionales utilizando números naturales, evitando señalar explícitamente qué es lo que ocurría en el resto de circunstancias[15]. Resulta evidente que, si no se va a dar ningún papel a los números irracionales, tampoco tiene mucho sentido investigar en qué casos es necesaria su introducción. Asimismo resulta coherente con nuestro enfoque que la primera parte del libro VIII sea uno de los pocos lugares de los *Elementos* en los que se habla de una forma más general de conjuntos de varios números sin aludir a los casos que tenían especial relevancia geométrica[16].

Cuando llegamos al libro X la situación cambia debido a que, como hemos indicado, en la geometría no era posible quedarse dentro del ámbito de los números racionales. Las definiciones de este libro se refieren a magnitudes inconmensurables porque su aparición era insoslayable; por esta razón, tras definirlas (X, def. 1 y 2), se afirma sin justificación previa que se puede probar su existencia (X, def. 3). Por otro lado, siempre se trata de limitar su estudio a magnitudes que o son racionales o proceden de raíces cuadradas. Desde un punto de vista lógico, se puede decir que una buena parte de los resultados del libro VIII tienen una relación muy clara con otros del X[17]; el hecho de que se mantenga en la obra el primero de los libros citados

[15] Un artículo en el que se argumenta en este mismo sentido es [8].

[16] En efecto, en la primera parte (teoremas del 1 al 10) no hay alusiones a números cuadrados o cúbicos, aunque sí aparece una alusión a los números planos en el teorema VIII.5. A partir del VIII.11, y hasta el final del libro, siempre se habla específicamente de estos tipos de números, sin apoyarse en ningún caso en los resultados de la primera parte, lo que posiblemente habla de su diferente origen. Solo se usan algunos del libro VII, que es el suelo común de los libros VIII, IX y X. En el siguiente libro, en su primera parte (las diez primeras proposiciones) también se habla casi exclusivamente de estos casos, mientras que, a partir de ese punto, se adopta un punto de vista más general, por ejemplo, en su famosa demostración de que hay infinitos números primos (IX.20). Esta mezcla de enfoques favorece la suposición de que la primera parte del libro VIII esté elaborada pensando más en la teoría musical, mientras que su segunda parte y la primera del IX están más orientadas a problemas geométricos. Lógicamente, a partir del X la cosa cambia: buena parte de su material está pensado para preparar el camino al estudio de los poliedros regulares del XIII.

[17] Modernizando su terminología, el teorema X.9 afirma entre otras cosas que, si tomamos dos números que no sean cuadrados puros y calculamos sus raíces, las longitudes correspondientes no son conmensurables. Este resultado, que se suele atribuir a Teeteto, permite afirmar que, entre dos números que sean primos entre sí y que no sean cuadrados, no se puede interpolar un medio proporcional, cosa que tiene una relación muy clara con la ya citada VIII.20 (y todavía más clara con VIII.26, que establece algo que es muy semejante al X.9). También es significativo que los textos de música siempre se refieran al VIII.8 como forma de fundamentar la imposibilidad de dividir el tono, mientras que nunca utilizan VIII.20 y todavía menos hablan de los resultados del libro X. Por otro lado, en la demostración de X.9 se utiliza la proposición VIII.11, cosa que vincula ambos libros. Esta proposición indica que entre dos números cuadrados se puede encontrar un medio proporcional. Es decir, esta proposición abandona el terreno más general para diferenciar casos que eran relevantes desde el punto de vista geométrico. Otra diferencia llamativa entre el caso de la

como algo autónomo y separado del resto refuerza la suposición de que está escrito pensando en un terreno específico: el musical.

Mientras que el tratamiento de la primera parte del libro VIII establecía, al menos implícitamente, qué tipos de intervalos eran inadmisibles en música, el del libro X es distinto, puesto que su estudio de las magnitudes inconmensurables permitía en último término analizar los cinco poliedros regulares, ya que todos se pueden construir con operaciones elementales y raíces cuadradas. No cabe duda de que esta construcción, con la que se remata la obra, tuvo que verse como un gran logro de la matemática teórica, puesto que se conseguía con muy pocos elementos y muy bien articulados entre sí.

Los escasos vestigios documentales anteriores a los *Elementos* hacen que sea muy difícil reconstruir con fiabilidad el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. Aunque la historiografía, en general, ha otorgado a la música un papel secundario, un número considerable de historiadores han reparado en que probablemente tuvo mucho protagonismo en las primeras etapas del descubrimiento (hipótesis que, sin entrar en detalles, es coherente con lo que hemos visto)[18]. En todo caso, resulta evidente de lo anterior que hubo (por lo menos) dos formas de acercarse a los números irracionales: la del libro VIII (con su primera parte y su segunda que tampoco son iguales) y la del libro X, y que es una profunda equivocación la lectura usual de la práctica totalidad de los libros de historia en los que se omite completamente la primera, mientras que se adorna con toda clase de detalles la segunda. Posteriormente, fue en el seno de la geometría donde se investigaron con más profundidad las características de los números irracionales[19], entre otras cosas, porque la propia

música y el de la geometría está en que, en los textos musicales, nunca se especifica que la división del tono conduce a una raíz cuadrada, mientras que en el libro X se distingue cuidadosamente entre irracionales que provienen de raíces cuadradas y los que provienen de raíces de otro orden. En [18, vol. III, pp. 32–33] se señala que, en un teorema que se da como espurio (el X.10), se utiliza una expresión que no es habitual en los *Elementos*, pero que sí aparece en *Sectio canonis*. Si está en lo cierto, eso es coherente con la existencia de vínculos entre los resultados sobre la irracionalidad de algunos números y las investigaciones sobre la teoría musical.

[18]Citaremos solo a algunos de los autores más conocidos. Hace más de cien años Zeuthen y, sobre todo, Tannery se fijaron en la relevancia de lo musical en este descubrimiento. Sin embargo, Heath, que es, no hace falta decirlo, una referencia obligada, apenas se detiene en este aspecto. En muchos libros generales sobre la historia de la matemática sencillamente se ignora, por ejemplo en *A History of Mathematics* de Boyer [9] o en *Histoire générale des sciences* dirigida por Tatón [31] así se hace, por citar dos obras muy utilizadas. En general, aunque ha habido bastantes historiadores que conocen y estudian el problema (por ejemplo, Knorr [22] y Van der Waerden [33]), tienden a no darle demasiada importancia. Otros como Fowler [13] no se ocupan de él, indicando, no obstante, su interés, y, finalmente, Szabo [30] le da un papel más relevante. En el artículo ya citado de Borzacchini [8] se argumenta a favor de la importancia de la música en el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables. En lo que se refiere a los historiadores de la música antigua la situación es completamente diferente, ya que en general no prestan demasiada atención al problema. Eso es lo que ocurre en las obras de autores tan prestigiosos como Barker [4, 5, 6] o Mathiesen [23]. De este modo, el asunto queda en un lugar un poco apartado.

[19]En este sentido se han analizado repetida y exhaustivamente los textos de Platón y de Aristóteles que hablan del problema (véanse por ejemplo las obras ya citadas de Knorr, Van der Waerden, Szabo o Fowler). Aunque no vamos a entrar en detalles (sería imposible), nos referiremos a la idea de que el descubrimiento de los irracionales habría conducido a una crisis en la matemática pitagórica, ya que había refutado la teoría previa de que había una especie de «unidad primordial». Además de que esa suposición hoy está abandonada debido a la falta de base documental, se puede señalar

teoría musical prohibía más indagaciones en ese sentido.

Las dificultades de la teoría pitagórica

La división del tono es un tema recurrente en los textos antiguos sobre música. La razón está en que su tamaño es el justo para que los límites de la percepción humana empiecen a plantear dificultades. Ni la octava ni la quinta se pueden dividir, utilizando razones numéricas, en dos partes iguales; sin embargo, era posible dividirlas en partes distintas y fácilmente diferenciables. El intervalo de octava podemos ponerlo como una quinta más una cuarta (véase antes). Los dos intervalos son perfectamente distinguibles para cualquier persona y, desde luego, para un músico. Lo mismo ocurre con la quinta, que se puede dividir en tercera mayor y tercera menor [$3/2 = (5/4)(6/5)$]. Sin embargo, al llegar al tono las dificultades aumentan porque, si hacemos algo similar, obtenemos dos intervalos, $18/17$ y $17/16$, cuya diferencia es muy pequeña y queda muy por debajo de lo que puede intentar discriminar cualquier intérprete (corresponde aproximadamente a la quinceava parte del semitono de la escala actual). En resumen, se puede decir que la teoría pitagórica analiza con éxito los intervalos grandes mediante el sistema de proporciones numéricas, pero tiene serios problemas cuando tiene que describir los intervalos más pequeños como el semitono. Lógicamente se puede intentar dividir el tono en dos intervalos que sean más o menos iguales utilizando la percepción, con lo que se evita tener dos intervalos diferentes pero casi imposibles de distinguir. Este procedimiento fue, con toda probabilidad, el que se usó en la práctica, entre otras cosas porque era el único viable. En último término se planteaba una contradicción difícil de superar: por un lado la teoría prohibía tajantemente dividir el tono en dos partes iguales (recuérdense las palabras de la *Sectio canonis*), y por otro la práctica diaria obligaba a ello.

Para terminar de complicar la situación, en la música antigua aparecían intervalos todavía más pequeños que el semitono; en concreto, se utilizaba el intervalo de diesis, que era aproximadamente un cuarto de tono. Como era de esperar, para la escuela pitagórica las cosas se hacían más complicadas a medida que proliferaban los intervalos menores. La separación entre lo que prescribía la teoría y lo que se podía

---

que, para refutar esa «unidad primordial», no hacen falta los irracionales, ya que, suponiendo que su valor sea m, basta tomar un valor $m/2$ para ver que nunca se puede encontrar. En general, dado un número infinito de números racionales no se puede encontrar el máximo común divisor de todos ellos (aunque sí se puede encontrar siempre con un número finito). Es decir, no hace falta la entrada de los irracionales, que, en realidad, lo único que hacen es mostrar esa imposibilidad de una sola vez (hoy definimos un número irracional como el límite de infinitos números racionales). Es más, si acudimos a la *Física* de Aristóteles se comprueba que su defensa del continuo es incompatible con la «unidad primordial». Asimismo en el tratado *Sobre las líneas indivisibles* (atribuido tradicionalmente a Aristóteles, pero que, seguramente, es posterior) se utilizan muchos argumentos en contra de su existencia y solo en algunos se alude a las magnitudes inconmensurables. Parte de los malentendidos sobre la historia del descubrimiento de los irracionales se debe a que hay una buena porción de escritores tardíos que se refieren a este descubrimiento como algo catastrófico. Esta percepción seguramente tiene relación con la pujanza de una cierta numerología que miraba con prevención la ciencia más elaborada (por ejemplo, la geometría y la astronomía). La valoración negativa de estos autores contrasta con la de Platón y Aristóteles que es mucho más positiva. Véase, por ejemplo, [24, *Epinomis*, 990d–991b] y, sobre todo, [2, 982b–983a], así como el análisis de las fuentes (antes citado) en [13, pp. 294–308].

diferenciar en la práctica aparece de modo escueto, pero inequívoco, en la *Metafísica* de Aristóteles cuando indica que la diesis era una por los sentidos y dos por la razón[20]; es decir, afirma que, por mucho que se afanaran los teóricos en dar diferentes valores a los intervalos musicales más pequeños, la percepción no podía distinguirlos. De lo anterior se deduce que la teoría musical pitagórica, que prohibía estrictamente el uso de los números irracionales, no podía dar una descripción aceptable de la estructura de la escala usual. Por eso no nos puede extrañar que apareciera una corriente de pensamiento que se opusiera a su forma de analizar las cosas.

Aristóxeno

La reacción a la escuela pitagórica se personifica en la obra de Aristóxeno (siglo IV a. n. e.). Aunque no se conserva más que una parte muy pequeña, es más que suficiente para comprobar su oposición a los puntos de vista pitagóricos. En primer lugar, Aristóxeno rechaza la idea de que la música tenga una especial vinculación con lo numérico[21]. Es más, trata de establecer un esquema en el que los intervalos no tengan relación con las proporciones numéricas que hemos indicado. Por mucho que nos explique diferentes razones para justificar esta negativa, una de las claves está en lo que ya se ha apuntado: la teoría pitagórica prohibía la división del tono en dos partes iguales, mientras que la práctica musical de todos los días aconsejaba hacerla (aunque fuera de modo aproximado). Nuestras sospechas toman cuerpo cuando afirma explícitamente que sí es posible dividir el tono en dos o más partes iguales[22], lo que le permite incluir no solo el semitono, sino también intervalos más pequeños como el de cuarto de tono al que hemos aludido.

Aristóxeno mantiene otras diferencias con los pitagóricos que, en el fondo, están muy relacionadas con el problema indicado. Así, en su obra afirma que la cuarta equivale exactamente a dos tonos y medio, y que la octava equivale a seis. En la *Sectio canonis*, como hemos visto, se demostrará que eso no es así[23], como además es muy fácil comprobar, basta con constatar que $(\frac{9}{8})^6 \neq 2$ y que $(\frac{9}{8})^{2,5} \neq \frac{4}{3}$.

[20] [2, 1053a]. Justamente antes de este texto, se habla de las cantidades mínimas de diferentes tipos de cosas, tomando como base la percepción. Aristóteles indica que la unidad mínima que se puede distinguir en el caso de la música es la diesis, o sea, el cuarto de tono.

[21] En [3, *Harmónica*, II.32] se alude de manera crítica a los pitagóricos (sin citarlos por el nombre), diciendo que «realizaban los razonamientos más extraños y contrarios a la experiencia sensible, inventando explicaciones racionales y afirmando que existen ciertas *proporciones numéricas*» (las cursivas son nuestras). La traducción es la de Pérez Cartagena [3, p. 284]. El original griego se puede consultar en [23, pp. 321–322]. En esta misma obra se analiza este fragmento con detalle. Véase [30, pp. 113–119] para un análisis filológico de los esfuerzos de Aristóxeno por distorsionar la terminología pitagórica, de modo que *diastema* (intervalo) pasara a tener unas connotaciones más conformes con sus ideas. Véase también el extenso estudio sobre este aspecto en [6].

[22] [3, *Harmónica*, I.21 y II.46]. En los dos puntos se dice lo mismo. Los estudiosos de la obra coinciden en suponer que la parte conservada de la *Harmónica* de Aristóxeno corresponde a dos libros distintos, la repetición indicada así parece confirmarlo.

[23] Aunque hemos hablado en primer lugar de la *Sectio canonis*, hay que recordar que la obra de Aristóxeno es la más antigua de las que se conservan sobre música. Ahora bien, es evidente, por sus alusiones (además de por algunos fragmentos que han sobrevivido), que existían textos pitagóricos más antiguos y, por tanto, anteriores a la *Sectio canonis*.

*Enarmónico**	*Cromático suave*	*Cromático hemiólico*	*Cromático tonal**	*Diatónico suave*	*Diatónico intenso**
24	22	21	18	15	12
3	4	4,5	6	9	12
3	4	4,5	6	6	6

Cuadro 1: Aristóxeno: las seis afinaciones del tetracordio.

Por otro lado, también es cierto que los valores en uno y otro caso nos dan aproximaciones muy buenas (véase Anexo). Aristóxeno evita dar valores numéricos a las consonancias, seguramente para no verse forzado a reconocer que sus afirmaciones no eran correctas, y se embarca en una argumentación muy elaborada para tratar de demostrar que la cuarta es exactamente dos tonos y medio [3, *Harmónica*, II.56 y ss.]. Su razonamiento se apoya en que únicamente la percepción tiene que tomarse como guía, con lo que sigue marcando distancias con los pitagóricos, que insistían en la supremacía de los criterios teóricos sobre las consideraciones prácticas. De todas maneras sus esfuerzos estaban condenados al fracaso y, en un buen número de ocasiones, autores posteriores le recordarán su error.

Aristóxeno no solo hace una crítica de la escuela rival, sino que también desarrolla un sistema alternativo para caracterizar los intervalos musicales sin utilizar proporciones numéricas. La idea básica consiste en dividir el tono en doce partes (utilizando algo similar a las actuales escalas logarítmicas, bien entendido que las matemáticas griegas no incluyen nada parecido), con lo que evita utilizar las razones aritméticas, a la vez que permite dividir cada intervalo en tantas partes iguales como le parezca. Este esquema lo aplica a la afinación del tetracordio (que es una cuarta descendente), describiendo las seis afinaciones del Cuadro 1[24].

Los tamaños de los intervalos van siempre del agudo al grave (empezando por arriba). Lógicamente la suma de sus valores siempre es 30, ya que supone que la cuarta es *exactamente* dos tonos y medio, aunque en realidad es solo una aproximación.

Hemos indicado con asteriscos las tres afinaciones básicas: la enarmónica consiste en un ditono y dos cuartos de tono (o diesis); la cromática, en un intervalo de 3/2 de tono y dos semitonos (con nuestra notación sería aproximadamente: *la, fa♮, fa, mi*); y la diatónica se forma con dos tonos y un semitono (con nuestra notación: *la, sol, fa, mi*). En los tres casos hay dos intervalos iguales; además, mediante el oído, era más o menos sencillo calibrar el intervalo mayor en el género cromático y en el enarmónico, y, para completar la escala, se dividía por la mitad lo que quedaba. La afinación del diatónico era más sencilla ya que se basaba en el tono, intervalo fácil de distinguir. Las demás variantes se obtenían modificando «a ojo» alguna de las anteriores.

El procedimiento aristoxénico era más manejable que el de las proporciones nu-

[24]Véase [3, *Harmónica*, I.24]. Estas mismas escalas aparecen de una manera más explícita en Cleónides, Ptolomeo y Arístides Quintiliano. En realidad este sistema está abocetado en la obra de Aristóxeno, mientras que tiene una forma más clara y manejable en los autores posteriores.

méricas y, de hecho, aparece incluso en obras de tendencia pitagórica. Por otro lado, es el que se ha usado habitualmente a lo largo de la historia (los músicos dicen «sube la melodía un tono», y no suelen decir «*multiplica* la frecuencia por el factor correspondiente»). En realidad, los dos procedimientos actualmente se usan en función de las necesidades prácticas, pero en la Antigüedad se elegía sobre todo teniendo en cuenta las preferencias «ideológicas» de cada autor.

La afinación de la última columna era casi igual que la que está documentada desde el *Timeo* platónico [25, 36 a–b], que consiste en dos tonos (9/8) y el resto *leima* (256/243), que es muy semejante a un semitono, pero, claro está, no es igual. Sin embargo, Aristóxeno, al no reconocer el carácter aproximado de su afinación, tenía que recurrir al expediente de prohibir la entrada de las razones numéricas en la música. Por otro lado, como seguramente no encontró ningún modo de eliminar la vinculación entre la altura tonal y la longitud de una cuerda, se limita a no mencionarla. Es decir, evita tener que reconocer que dividiendo una cuerda por la mitad se obtiene una octava más alta; para ello relaciona la altura de una nota exclusivamente con la idea de tensión y distensión que evidentemente es familiar a cualquiera que cante o que tenga que tensar una cuerda de cualquier instrumento, y que no se puede cuantificar tan fácilmente[25]. No hace falta ser muy mal pensado para comprender que su procedimiento está encaminado a negar toda relación entre altura tonal y razones numéricas. La obra aristoxénica muestra que en la Antigüedad el conflicto entre diferentes modos de ver una disciplina (en este caso, la música) llevaba a enfrentamientos muy profundos, en los que cada escuela buscaba la forma de debilitar las posiciones contrarias, incluso a costa de hacer razonamientos muy forzados y, en ocasiones, manifiestamente sofísticos.

Aristóxeno, siguiendo con su intento de desacreditar la teoría pitagórica, indica que cada ciencia tiene que moverse en su propio terreno sin recurrir a métodos o principios que vinieran de otros lugares, cerrando así el camino a la influencia de la matemática en la música, a la vez que se buscaba un terreno teórico basado en la noción de principio (*ἀρχή*, *arche*)[26] bastante próximo a la escuela de Aristóteles.

[25] A la tensión y distensión se refiere en [3, *Harmónica*, I.10]. Aristóxeno, aunque evita referirse al monocordio, insiste en que el aulos (instrumento de viento que era una especie de flauta doble) no se podía afinar utilizando sistemas puramente cuantitativos (lo cual es cierto ya que la longitud de onda de la nota emitida depende de muchos factores además de la longitud: grosor, intensidad del sonido, tamaño del orificio, etc.), o sea, Aristóxeno elige ejemplos que le favorecen. También es significativo que utilice la palabra irracional (*alogos*) con significados diferentes del usado por los pitagóricos, por ejemplo en [3, *Harmónica*, I.16, 17] habla de intervalos irracionales; asimismo en [3, *Rítmica*, 20] se refiere a ritmos con patrones irracionales. No está claro lo que quiere decir, aunque algunos autores suponen que trata de describir cosas parecidas al puntillo de nuestras partituras; si eso es así, resulta más que evidente que esos ritmos corresponden a proporciones con números racionales. Todo lo anterior pone de manifiesto su empeño en oponerse a las ideas de los pitagóricos. La diferencia entre racional e irracional se encuentra también en el tratado de Cleónides (siglo II aprox.), de orientación claramente aristoxénica, en dos ocasiones, *Harmonica introductio*, V y VIII. Es posible que en ambos casos se trate de debilitar la teoría pitagórica de la música.

[26] [3, *Harmónica*, II.44]. En [23, p. 298] se puede consultar el texto original. En el párrafo indicado, Aristóxeno insiste en que la música se debe organizar en torno a principios y que además estos siempre se tienen que basar en la percepción. También se puede indicar que el libro II se abre con una crítica al platonismo, que tendía a vincular la música con aspectos tanto cosmológicos como, incluso, éticos. Aristóxeno, que se alinea claramente con Aristóteles (del que fue discípulo), ridiculiza

En concreto, insiste en que la música debe tomar la percepción como único juez sin utilizar otras referencias. Hay que recalcar que Aristóxeno sustituye la teoría pitagórica por otra igualmente estricta y basada en unos principios muy rígidos. El contexto antiguo admitía la convivencia de ambas (aunque siempre fue más apreciada la pitagórica), lo que no permitía era la modificación profunda de los principios de ninguna teoría.

Ptolomeo

La *Harmónica* de Ptolomeo (siglo II) se mueve en la estela del pitagorismo, con el que, no obstante, marca algunas diferencias, dando, casi siempre, soluciones mejores y más elaboradas. Como ilustración, podemos decir que hace un análisis bastante detallado con el objeto de buscar un equilibrio entre la percepción y la teoría, criticando a los aristoxénicos, que prestaban demasiada atención a la primera, y matizando los tratados pitagóricos, que se fijaban exclusivamente en algunas razones numéricas[27]. Otro ejemplo lo encontramos en su tratamiento de los factores que influían en la altura de una nota dada por una cuerda que es, con mucha diferencia, el más riguroso de la Antigüedad. No puede extrañarnos, en consonancia con lo anterior, que no se refiera a las leyendas sobre el origen de la música atribuidas a Pitágoras[28].

Ptolomeo critica con rigor y precisión las teorías de Aristóxeno y reitera las tres afirmaciones de la *Sectio canonis* ya indicadas: la cuarta no es igual a dos tonos y medio, la octava no es igual a seis, y es imposible dividir el tono en dos partes iguales (esta última solo la cita y da su demostración por sabida)[29]. Como era de esperar, también afirma que el uso de intervalos a la aristoxénica no es correcto, y que el único sistema aceptable es el de las razones numéricas[30].

Siguiendo con la crítica a esta escuela, señala que su pretensión de fiarse solo de la percepción es insostenible, toda vez que, cuando la diferencia entre dos intervalos es muy pequeña, es imposible distinguirlos de este modo. En particular, Ptolomeo estima correctamente que la diferencia entre el leima (256/243) y la mitad exacta del tono debe estar aproximadamente en 129/128, que es un intervalo demasiado

estas ideas y afirma el terreno específico de la música. No hace falta decir la importancia del tema de la «música de las esferas», muy usado por los pitagóricos como argumento complementario. Este punto ilustra muy bien las diferencias entre unos y otros; sin embargo, por razones de espacio, no entraremos en sus detalles.

[27] Véanse los primeros capítulos de su *Harmónica* [26] para apreciar el esfuerzo de Ptolomeo por aquilatar los papeles de la razón y los sentidos, en lo que es el análisis más complejo sobre problemas epistemológicos de la Antigüedad tardía. Para más detalles sobre este interesante y poco estudiado tema se pueden consultar [5] y [21].

[28] Véase [26, I.8]. Ptolomeo indica explícitamente que el único método fiable para establecer la altura es mediante las longitudes de cuerdas, descartando, a diferencia de lo que hacen otros autores, los demás. Ptolomeo también se refiere a otro tema del que no hablaremos pese a su interés: el de la teoría física de la música.

[29] Ptolomeo dice: «Ya que no se divide en dos razones iguales ni la sesquioctava ni ninguna otra de las superparticulares» [26, I.10, 24].

[30] Así se hace en [26, I.9]. En este punto la crítica de Ptolomeo no deja de ser retórica y poco fundamentada, pero está claro que, con ello, trata de debilitar a los aristoxénicos. En el siguiente capítulo se refuta claramente el argumento de Aristóxeno, al que ya nos hemos referido, con el que pretendía demostrar que la cuarta es exactamente dos tonos y medio.

Enarmónico	*Cromático suave*	*Cromático tenso*	*Diatónico suave*	*Diatónico tonal*	*Diatónico tenso*
5/4	6/5	7/6	8/7	9/8	10/9
24/23	15/14	12/11	10/9	8/7	9/8
46/45	28/27	22/21	21/20	28/27	16/15

Cuadro 2: Las seis afinaciones de Ptolomeo.

pequeño para que se pueda apreciar de oído [26, I.10, 24]. Ahora bien, si no se pueden distinguir esos dos intervalos, el procedimiento de Aristóxeno queda invalidado, ya que su «demostración» citada se basa en que tal diferencia puede apreciarse en la práctica. De todos modos, como ahora comprobaremos, el propio Ptolomeo usa frecuentemente intervalos cuya diferencia es todavía menor, cosa que pone en entredicho su posición, por mucho que insista en la exactitud de las razones aritméticas. Después de todo, si sus diferencias no se pueden apreciar mediante el oído, tampoco tiene mucho sentido su proliferación.

Ptolomeo lleva a cabo una investigación de las posibles divisiones del tetracordio haciendo uso de diferentes proporciones, con la condición de que todas fueran superparticulares, o sea, de la forma $(n+1)/n$. Esta restricción procedía de la tradición pitagórica, que afirmaba (con argumentos en los que no vamos a entrar) que todos los intervalos tenían que ser de este tipo. Además se observa que los más importantes (octava, quinta, cuarta y tono) lo cumplen[31]. Como consecuencia, se obtiene el Cuadro 2. En todos los casos los intervalos están ordenados del agudo al grave. De igual modo que todas las afinaciones aristoxénicas *sumaban* 30, ahora su *multiplicación* siempre es 4/3.

Ptolomeo procede de forma exhaustiva, como se ve por el hecho de que el primer intervalo va variando de 5/4 a 10/9, mientras que ajusta los demás de manera que no se alejen demasiado de los sistemas usuales que recoge Aristóxeno, pero limitándose a intervalos superparticulares. Esta exigencia obliga a que los tres intervalos sean siempre distintos, lo que contrasta con las afinaciones aristoxénicas (en las que casi siempre dos intervalos son iguales, circunstancia que, como hemos indicado, facilitaba la afinación). En realidad, la única manera de dividir el intervalo 4/3 con todos los intervalos superparticulares y dos iguales es $4/3 = (8/7)(8/7)(49/48)$, pero es inviable ya que 49/48 es demasiado pequeño.

En su afán por estudiar todas las posibilidades, Ptolomeo da otras afinaciones, de las que solo admite como aceptables las dos del Cuadro 3. Por mucho que se muestre orgulloso de lo conseguido[32], la verdad es que toda la exposición de su *Harmónica* conduce a un sistema que, aun siendo completo desde el punto de vista de la teoría,

[31] Por ejemplo, Nicómaco y Boecio dan un papel protagonista a los intervalos superparticulares en la música y también en la aritmética. Véase [15] para más información. En el presente artículo solo indicamos algunas afinaciones, por lo que remitimos a la obra citada en la que se recogen todas las de los autores antiguos, así como los detalles y el análisis de su estructura interna. Por último, nos hemos limitado siempre al estudio de la afinación del tetracordio. De hecho, el problema era más complejo, ya que los distintos tetracordios se enlazaban dando lugar a sistemas más amplios.

[32] [26, I.15, 37]. En este mismo capítulo se estudian todas las afinaciones que aparecen en el cuadro dado.

Diatónico uniforme	*Diatónico ditonal*
10/9	9/8
11/10	9/8
12/11	256/243

Cuadro 3: Ptolomeo: otras dos afinaciones aceptables.

era escasamente practicable y demasiado complejo. Además, justamente la última afinación que da (la diatónica ditonal), que es la del *Timeo*, aunque se aleja más de los patrones indicados en la obra, es la única que se aplicó en la práctica durante muchos siglos; entre otras cosas, porque tiene una estructura más sencilla que las demás.

Los textos antiguos consideran que el género enarmónico (con su intervalo de cuarto de tono) era muy difícil de interpretar[33]. Ahora bien, las sutilezas que introduce Ptolomeo son mucho más delicadas y, en la práctica, imposibles de cantar. En cualquier caso resulta claro que los principios pitagóricos obligaban a afinaciones complejas y a sistemas que se alejaban de lo que era realizable, sobre todo, en el caso del género enarmónico, que incluía intervalos muy pequeños y, como consecuencia, razones numéricas poco manejables, inconveniente que se aprecia en todas las afinaciones que se diseñaron en el mundo antiguo con este procedimiento[34]. Hoy nos parece evidente que la inclusión de intervalos que utilizaran números irracionales aliviaría esa dificultad, pero en el ámbito pitagórico eso era absolutamente impensable. Hay que recalcar que su idea de que la música dependía por completo de los números naturales impedía la utilización de otro tipo de cantidades, ni siquiera como auxiliares. La obra de Ptolomeo (con todo su rigor, extensión y detalle) deja al descubierto el callejón sin salida en el que se encontraba la teoría: por un lado su crítica de los aristoxénicos está bien fundamentada, indicando con claridad sus errores; y, por otro, su respeto a los principios pitagóricos (por más que haga modificaciones

[33]Aristóxeno señala [3, *Harmónica*, I.23] que los compositores tendían a hacer mayores los intervalos del género enarmónico, con lo que se aproximaban al cromático. Theón de Smirna se refiere a esta parte de la obra aristoxénica mostrando su acuerdo en *Expositio, De musica* [32, 55–56]. Por su parte, Arístides Quintiliano en *De musica* [1, I.9, 16] dice que el diatónico es el género más natural porque todos lo pueden cantar, mientras que el enarmónico «para la mayor parte de la gente es imposible de cantar». En el tratado de Pseudo Plutarco sobre música, 1145a, se dice que el género enarmónico había sido casi completamente abandonado pese a su nobleza. Por último, en [23, p. 597] se señala que está bien atestiguado que el sistema enarmónico se estaba abandonando hacia el final del siglo IV antes de nuestra era. En esta misma obra se reproducen algunos de los pocos fragmentos que quedan de música griega, constatándose que casi todos están escritos en el género diatónico.

[34]En Boecio encontramos otras afinaciones (posiblemente debidas a Nicómaco) que toman como referencia la división del *Timeo*: dos tonos y un leima; pero, al llegar al enarmónico, aunque, de hecho, renuncia al empleo exclusivo de razones superparticulares, se ve obligado a utilizar intervalos con números muy altos, que en el fondo lo que hacen es dividir un intervalo en dos parecidos, como también se intentaba con el tono (véase antes). Véase [15, pp. 137–144] para más detalles. Por otro lado, es posible que la preferencia de Ptolomeo por los géneros diatónicos y cromáticos (frente a los enarmónicos) se base, entre otras cosas, en el deseo de evitar intervalos demasiado pequeños. Véase [26, I.16, 38].

de detalle) impide tajantemente el estudio de intervalos que no sean racionales, con lo que obtiene un sistema farragoso, impracticable y, en último término, fallido.

No es ocioso recordar que, en el *Almagesto*, Ptolomeo incluye tablas en las que se dan los valores de razones trigonométricas utilizando el sistema sexagesimal. Es decir, obtiene, mediante un sistema equivalente a nuestros números decimales, aproximaciones de valores irracionales. En el caso de la música, también da en ocasiones aproximaciones del valor de una fracción mediante el sistema sexagesimal (con lo que alivia el engorroso uso de fracciones con números muy grandes), pero nunca utiliza este sistema para aproximar un número irracional.

Otros textos sobre música

El estudio de la teoría musical antigua se ve favorecido por la relativa abundancia de textos conservados en los que, además, podemos encontrar diferentes tendencias. Mientras unos están más próximos a los criterios pitagóricos, otros son más cercanos a los de Aristóxeno. Estos últimos suelen hacer más hincapié en el terreno práctico, mientras que los primeros vinculan la música con otros terrenos teóricos, en un ambiente generalmente influido por el platonismo y por la tendencia a ver el mundo como un todo armónico regido por los designios divinos.

Theón de Smirna (siglo II) se refiere en varias ocasiones a la imposibilidad de la división del tono en dos mitades, criticando explícitamente la opinión de Aristóxeno. En algún caso da una explicación un tanto confusa a modo de justificación, pero está claro que enfatiza este punto como clave de la diferencia entre los pitagóricos y los aristoxénicos[35]. Más adelante, queda patente que no entiende el problema, cuando dice que es imposible dividir una longitud real en dos partes exactamente iguales, debido a que siempre queda algún resto por efecto del corte, así que las mitades necesariamente pierden algo y es imposible que sean iguales. Concluye sorprendentemente diciendo que en el ámbito del pensamiento el tono sí se podría dividir en dos partes iguales[36].

Arístides Quintiliano (entre el siglo II y el IV) escribió un tratado *De musica* [1] que confirma la importancia del problema indicado. En una primera aproximación su

[35]Nos referimos a la obra *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium* [32], atribuida a Theón de Smirna (se puede consultar la traducción inglesa de la parte que nos interesa en [6, pp. 211–229]). En ella recoge fragmentos de otros tratados. En el caso de la música utiliza, entre otros, el de Adrastus. El tema de la imposibilidad de la división del tono en dos partes iguales aparece en primer lugar en *Expositio*, 53. En 61 recuerda el valor del semitono pitagórico (leima) 256/243, que es una cuarta menos dos semitonos. A partir de 66 vuelve a ocuparse del tono y su división, indicando que por encima del tamaño del tono la percepción distingue bien, pero por debajo de este tamaño «el oído no es capaz de distinguir los intervalos con precisión». Esta obra es interesante porque es una de las primeras, junto con la de Nicómaco, en la que aparecen las invenciones en torno al descubrimiento de la música que se atribuyen a Pitágoras. Theón remarca que las razones de los intervalos musicales se pueden obtener de muchos modos, lo que es falso y posiblemente es una respuesta a Aristóxeno. Aunque aquí no vamos a entrar en el detalle, está claro que solo el monocordio puede utilizarse para establecer correspondencias numéricas, los demás procedimientos (flautas, pesos que caen, tensiones, etc.) no son fiables. Sin embargo, su aparición se popularizó hasta los tratados del Renacimiento con la intención de reforzar las ideas pitagóricas, lo que, por desgracia, condujo a una falta de rigor y de contrastación empírica muy extendidas.

[36][32, *Expositio*, 71–72].

tratamiento es ecléctico, ya que el libro I tiene un enfoque próximo al aristoxenismo, que le permite describir mejor la práctica real, mientras que el libro III retorna a la observancia pitagórica, extendiéndose en todo tipo de elaboraciones numerológicas. Finalmente, cuando habla de la división del tono, adopta un enfoque similar al de Theón, diciendo que la imposibilidad de su división procede del mundo imperfecto en el que vivimos[37]. No hace falta insistir en la poca consistencia de esta idea, ya que lo que no se podía hacer era dividir las razones numéricas que, se suponía, eran entes perfectos. Es decir, da la impresión de que el problema se entiende cada vez peor.

Por último, nos referiremos brevemente a Boecio, autor del siglo VI de nuestra era, que se mantiene dentro de la tradición pitagórica y que escribió el último tratado importante sobre música de la cultura clásica[38]. Su libro vuelve a referirse en varias ocasiones a la imposibilidad de dividir el tono en dos partes iguales, repitiéndose también las críticas a Aristóxeno[39]. A lo largo de más de mil años se constata el peso de la teoría musical dentro de la ciencia y la cultura antigua, idea que ya aparece en el *Timeo* y que asocia la vista a la astronomía, el oído a la música, y el conjunto de los dos a la esencia armónica del cosmos. En los últimos siglos de la Edad Antigua los textos sobre música repiten siempre las mismas ideas, y se va dando progresivamente más peso a leyendas sobre el descubrimiento de la armonía musical, así como a elementos numerológicos cada vez más disparatados. Es cierto que Boecio todavía mantiene un cierto rigor, aunque no introduzca elementos originales, pero la mayor parte de los textos tardíos conservados consiste en refritos de autores anteriores (en los que a menudo se mezclan elementos pitagóricos y aristoxénicos), que ponen de manifiesto la completa paralización de la teoría.

Complemento: un vistazo a la teoría musical en el Renacimiento

En el siglo XVI los instrumentos teóricos eran los mismos que en la Antigüedad; los conocimientos matemáticos, los heredados; y, sin embargo, el tratamiento del problema fue radicalmente distinto. Todos los teóricos empezaban por aceptar el marco teórico del pitagorismo (aunque con algunas modificaciones), indicando muy a menudo la necesidad de utilizar solamente números racionales. Eso sí, a medida que iban avanzando en sus tratados, y que se hacía necesario recoger la práctica diaria, no tenían ningún reparo en incluir números irracionales. El procedimiento de los teóricos del Renacimiento contrasta con el de los antiguos, por mucho que, a primera vista, pueda parecer que la estructura de la teoría musical era prácticamente igual.

[37] Véase [1, III, 104–105]. En el fragmento citado queda claro que el autor no comprende el problema matemático y se envuelve en consideraciones místico-numerológicas.

[38] Nos referimos a *De institutione musica* [7]. Esta obra, que ya hemos citado, tiene gran interés como fuente de información. Además es importante por su enorme influencia, ya que durante toda la Edad Media fue prácticamente la única obra antigua sobre teoría musical conocida en Occidente.

[39] En notas anteriores ya hemos visto que se ocupa del problema en *De institutione* [7, III.1 y III.11]. Además en I.16 también se refiere a este tema. Por último, en IV.2 se recoge la demostración de la *Sectio canonis* de que es imposible la división del tono en dos partes iguales.

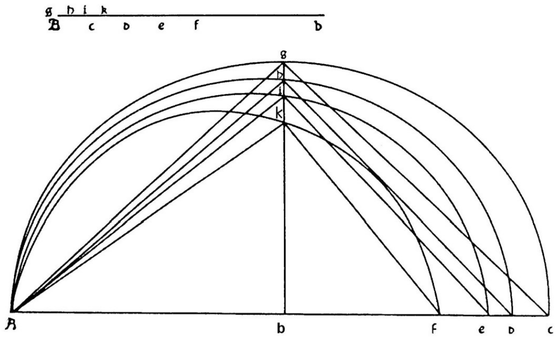

Figura 1: Diagrama geométrico de medias proporcionales de Stapulensis.

El problema que planteaban los números irracionales era más bien de carácter técnico. De hecho, a falta de algo mejor, los músicos teóricos recurrían desde Faber Stapulensis (en 1496) al sistema que está en los *Elementos* para hallar un medio proporcional (véase la Figura 1[40]). Este método puramente geométrico, que, como vemos, era perfectamente conocido por los griegos, no se utilizó nunca en la Antigüedad para el cálculo de intervalos musicales, mientras que los teóricos del Renacimiento lo aprovecharon a menudo. No solo eso, además utilizaron instrumentos como el mesolabio (¡también procedente de la Antigüedad!) que permite (de modo aproximado) calcular raíces de cualquier orden. De hecho, Salinas (el teórico más riguroso de la época) trabajaba con raíces de orden elevado (aunque era incapaz de calcularlas numéricamente) y Zarlino (el autor más conocido), retomando esa idea, se apresuró a buscar métodos geométricos para dividir la octava en doce semitonos iguales mezclando raíces cúbicas y cuadradas[41]. Una diferencia que merece la pena indicar, aunque sea de forma rápida, es que todos los teóricos renacentistas señalan que, como la división del tono (y de los demás intervalos superparticulares) «no se puede hacer por los números», hay que llevarla a cabo por la cantidad continua[42]. Compárese esto con la escueta negativa de la *Sectio canonis*, o con la metodología de Ptolomeo que siempre evita esa posibilidad. Hacia el mismo periodo se empezaron a utilizar aproximaciones decimales a los números irracionales por autores como Stifel (que utiliza base 60, sin duda, siguiendo la estela de la astronomía) o Stevin, que ya utiliza la base 10 y la aplica explícitamente al cálculo de los valores numéricos de la escala con temperamento igual.

[40]Tomada de Stapulensis [12, III, f.g6v], muestra varios casos de la construcción de la media geométrica de dos segmentos según Euclides (con un trazado defectuoso de las semicircunferencias), lo que se aplica por primera vez a la teoría musical.

[41]Todo lo anterior se puede consultar en muchos libros, por ejemplo, en el muy documentado y riguroso de Goldáraz [16], que también aporta numerosas referencias bibliográficas. Para un análisis breve en el que se especifican las técnicas matemáticas renacentistas, véase [27]. El detalle de los procedimientos geométricos de Zarlino y Salinas se puede consultar en [14, pp. 79–113]. También se puede encontrar información complementaria en [19].

[42]Ya Stapulensis [12, III.35] lo indica claramente. También es explícito Salinas [28, III.24].

Salinas, hablando de las modificaciones que había que hacer a los intervalos «perfectos», que es lo que llamaron la *participatio*, viene a decir que es evidente que siempre se han tenido que usar intervalos imperfectos (o sea, con números irracionales), y que si no los explica Ptolomeo es porque pensaba que eso era cosa que solo atañía a los prácticos[43]. Tan profundas son las diferencias entre los dos periodos, que los tratadistas del siglo XVI no llegaban a concebir que la rigidez de la teoría antigua fuera tan grande como para evitar a toda costa el uso de los intervalos «imperfectos» que ellos admitían a diario.

La diferencia tan aguda entre el modo de proceder de unos y otros muestra de manera elocuente que contextos históricos diferentes tratan e interpretan una misma estructura matemática de forma muy distinta (sin duda, la teoría musical es una buena ilustración). Mientras que la teoría antigua acabó, en su mayoría, degenerando en una especie de numerología que se limitaba a una autocomplacencia paralizante, en el Renacimiento, partiendo de un elemento numerológico muy importante (y heredado en gran parte de la Antigüedad), se fue proporcionando a la teoría un dinamismo muy grande y una capacidad de adaptación que condujo a un estudio más eficaz del problema y, finalmente, al abandono de esa misma numerología. Haciendo, en este punto, el camino inverso al que se había recorrido en la Antigüedad.

Conclusión: las limitaciones de la ciencia antigua

El énfasis de los científicos griegos en desarrollar teorías con lo mínimo posible les llevó a cumbres tan impresionantes como la, ya citada, construcción de todos los poliedros regulares solo con regla y compás, o a la del estudio de los movimientos de los planetas solo con círculos. Sin embargo, esta insistencia en mantener unos principios tan rígidos acabó por producir teorías muy esclerotizadas, por mucho que, en una primera fase, hubiese conseguido resultados muy notables. Una relajación de los principios tendía a verse como una aproximación a la suposición de que el mundo no era susceptible de ser investigado de un modo racional[44]. Otro de los problemas que dificultaron el desarrollo de la ciencia antigua está en su propia debilidad y precariedad. En la ciencia moderna, si, para explicar un fenómeno, hay que abandonar una teoría previa, se pueden buscar sustitutos. En la época clásica los recursos teóricos de los que se disponía eran muy limitados, de modo que, en muchos casos, no había recambio posible. A partir de la época moderna, las estructuras teóricas van adquiriendo más flexibilidad, de manera que, a medida que se obtiene más información, se van revisando de acuerdo con las necesidades[45]. En la Antigüedad no existía esa po-

[43] [28, III.14]. Se puede consultar la versión castellana en [29, p. 261].

[44] La escuela epicúrea, por ejemplo, se movía en esa dirección. De forma análoga a lo que ocurrió en música, los epicúreos pensaban que no eran correctos los principios de la astronomía usual. En general, en la ciencia griega, frente a las corrientes dominantes, aparecen otras. Unos y otros se tiran los trastos a la cabeza, pero prácticamente nunca modifica nadie sus principios, por lo que se llegó, tanto en un caso como en otro, a una situación de estancamiento. Véase [20] para más detalles.

[45] Eso no quiere decir que en la ciencia moderna sea fácil el cambio de paradigma (para usar la terminología de Kuhn). Lo que reiteramos es que en la ciencia antigua este cambio es prácticamente imposible. Mientras que la ciencia moderna puede ser analizada con las ideas de Kuhn (o con otras

Intervalo pitagórico	*Cents*	*Intervalo temperado*	*Cents*	*dif.*
Octava	1200	Octava temperada (6 tt)	1200	0
Quinta pitagórica (3/2)	702	Quinta temperada (3,5 tt)	700	2
Cuarta pitagórica (4/3)	498	Cuarta temperada (2,5 tt)	500	-2
Tono pitagórico (9/8)	204	Tono temperado = tt	200	4
Leima (256/243)	90	Semitono temperado (0,5 tt)	100	-10
Semitono exacto $\sqrt{9/8}$	102	Semitono temperado	100	2
Semitono grande (17/16)	105	Semitono temperado	100	5
Semitono pequeño (18/17)	99	Semitono temperado	100	-1

Cuadro 4: Medida en cents de algunos intervalos.

sibilidad, ya que la teoría estaba basada en un conjunto de principios irrenunciables, por lo que tampoco había apenas margen para modificaciones parciales.

La teoría musical nos proporciona uno de los mejores ejemplos (si no el mejor) de la rigidez de la estructura de las teorías antiguas. Actualmente parecería lo lógico tratar de buscar una solución híbrida para estudiar la estructura de los intervalos musicales (de hecho, es lo que se hizo a partir del siglo XVI), pero los antiguos nunca tuvieron a su alcance nada parecido: o se aceptaba el principio de que la música se tenía que limitar a los números racionales (pitagóricos), o no se aceptaba (aristoxénicos) y a cambio se cerraba el paso a todo tratamiento numérico. En ninguno de los dos casos era posible encontrar una teoría suficientemente amplia. Y no había diálogo ni forma de avanzar.

ANEXO: COMPARACIÓN ENTRE INTERVALOS PITAGÓRICOS Y TEMPERADOS

Actualmente se utiliza casi siempre el temperamento igual que hace corresponder a la octava (2/1) doce semitonos iguales. Asimismo se divide cada semitono en 100 cents con lo que resulta que la octava son 1200 cents (escala logarítmica). Con esta medida se puede elaborar el Cuadro 4 en el que damos la medida de algunos intervalos que hemos ido citando, junto con los correspondientes temperados y las diferencias entre unos y otros.

La aproximación que da nuestra escala usual a la quinta pitagórica (o justa, como se la suele llamar) es excelente. La escala temperada se basa en lo mismo que la aristoxénica, con la diferencia de que la temperada toma como referencia la octava en lugar de la cuarta. En la escala temperada es *rigurosamente* cierto que la cuarta es igual a 2,5 tonos, la octava a 6, y el semitono es medio tono; pero eso es a costa de alterar el valor del tono, del semitono y de la cuarta respecto de los intervalos pitagóricos.

Con las medidas en cents es muy fácil cuantificar los errores de los aristoxénicos: la cuarta son 498 cents, dos tonos y medio (pitagóricos) son 510 cents, luego el error

parecidas), en el caso de la ciencia antigua hay que tener en cuenta también las especiales dificultades para cambiar los marcos teóricos.

es de 12 cents. Análogamente la octava son 1200 cents y 6 tonos pitagóricos son 1223,5. La diferencia, que es 23,5 cents, se suele llamar coma pitagórica.

Referencias

[1] Arístides Quintiliano, *Sobre la Música*, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1996. Edición y traducción de L. Colomer y B. Gil.

[2] Aristóteles, *Metafísica*, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1994. Edición y traducción de Tomás Calvo Martínez.

[3] Aristóxeno, *Harmónica y Rítmica*, en Biblioteca Clásica Gredos 383, 215–364, Madrid, 2009. Traducción, introducción y notas de F. J. Pérez Cartagena.

[4] A. Barker, *Greek Musical Writings II. Harmonic and Acustic Theory*, Cambridge University Press, 1989.

[5] —, *Scientific Method in Ptolemy's Harmonics*, Cambridge University Press, 2000.

[6] —, *The Science of Harmonics in Classical Greece*, Cambridge University Press, 2007.

[7] Boecio, *Sobre el fundamento de la música*, Biblioteca Clásica Gredos, 2009. J. Luque, C. López, P. R. Díaz y M. Madrid (eds. y trs.). Edición inglesa: New Haven, Yale University Press, 1989. C. V. Palisca (ed.), C. M. Bower (tr.).

[8] L. Borzacchini, Incommensurability, Music and Continuum: a cognitive approach, *Archive for History of Exact Sciences* **61** (2007), 273–302.

[9] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, John Wiley and Sons, Nueva York, 1968. Hay edición castellana en Alianza, Madrid, 1986.

[10] W. Burkert, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1972. La edición original en alemán es de 1962, E. Minar (tr.).

[11] Euclides, *Elementos*, 3 vols., Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1991, 1994, 1996. Introd. de Luis Vega, trad. y notas de M.ª Luisa Puertas Castaños[46].

[12] J. Faber Stapulensis, *Elementa musicalia*, París, 1496.

[13] D. H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Oxford University Press, 1990. Hay una segunda edición ampliada de 1999.

[14] A. S. García Pérez, *El número sonoro, la matemática en las teorías armónicas de Salinas y Zarlino*, Caja Duero, Salamanca, 2003.

[15] —, *El concepto de consonancia en la Teoría Musical de la Escuela Pitagórica a la Revolución Científica*, Universidad Pontificia, Salamanca, 2006.

[16] J. J. Goldáraz Gaínza, *Afinación y temperamentos históricos*, Alianza, Madrid, 2004.

[46] En este artículo, en las pocas citas literales que hacemos no hemos seguido esta traducción (que es, en general, muy ajustada al original), ya que hemos modernizado un poco los enunciados para hacerlos más asequibles. En todo caso, se puede comprobar, tanto con la edición de Heath como con la de Puertas, que hemos respetado escrupulosamente su contenido matemático.

[17] O. Harari, The Concept of Existence and the Role of Constructions in Euclid's Elements, *Archive for History of Exact Sciences* **57** (2003), 1–23.

[18] T. L. Heath (ed.), *The thirteen books of Euclid's Elements*, 3 vols., Dover, Nueva York, 1956. Reimpresión de Dover de la 2.ª ed. de 1926 (1.ª ed. de 1908), Cambridge University Press. Heath traduce el texto griego de I. L. Heiberg (1883–1888) con introducción y comentarios. En español se puede consultar la traducción de M.ª Luisa Puertas Castaños [11].

[19] A. Hernando González, Aspectos matemáticos de la teoría musical del siglo XVI, en *Actas del IX Congreso de la SEHCYT*, Vol. 1, 153–168, Cádiz, 2006.

[20] —, Ptolomeo y la Astronomía Antigua, en *Libro de estudios de la edición facsimilar de Cosmografía de Ptolomeo*, Vol. II, 145–241, Siloé, Burgos, 2011.

[21] —, La noción de principio en la obra de Ptolomeo, en *Actas del XI Congreso de la SEHCYT*, 759–774, San Sebastián, 2012.

[22] W. R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Boston, 1975.

[23] T. J. Mathiesen, *Apollo's Lyre. Greek Music and Music Theory in Antiquity and Middle Ages*, University of Nebraska Press, Lincoln y Londres, 1999.

[24] Platón, *Epinomis*, en *Obras Completas de Platón*, 1526–1541, Aguilar, Madrid, 1971. Trad. y notas de Francisco de P. Samaranch.

[25] Platón, *Timeo*, en *Diálogos de Platón VI*, 155–261, Biblioteca Clásica Gredos, Madrid, 1992. Edición y traducción de Francisco Lisi.

[26] Ptolomeo, *Harmónica*, en Biblioteca Clásica Gredos 383, 365–610, Madrid, 2009. Trad. y notas de P. Redondo Reyes.

[27] R. Rasch, Tuning and Temperament, en T. Christensen (ed.), *The Cambridge History of Western Music Theory*, 193–222, Cambridge University Press, 2002.

[28] F. Salinas, *De musica libri septem*, Salamanca, 1577.

[29] F. Salinas, *Siete libros sobre la música*, Alpuerto, Madrid, 1983. Traducción castellana e introducción de I. Fernández Cuesta.

[30] A. Szabo, *The Beginnings of Greek Mathematics*, Reidel Publishers, Dordrecht, 1978.

[31] R. Taton (ed.), *Histoire générale des sciences*, 4 vol., Presses Universitaires de France, París, 1957 a 1961. Edición española: Destino, Barcelona, 1971 a 1975.

[32] Theón de Smirna, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium*, B. G. Teubner, Leipzig, 1878. Edición griega de E. Hiller.

[33] B. L. Van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, Nueva York, 1961.

Alfonso Hernando González, IES Enrique Flórez, Burgos
Correo electrónico: `alfonso_hernando@hotmail.com`