Historia

Sección a cargo de

Luis Español González

La limitada recepción de la topología en España durante el primer cuarto del siglo XX

por

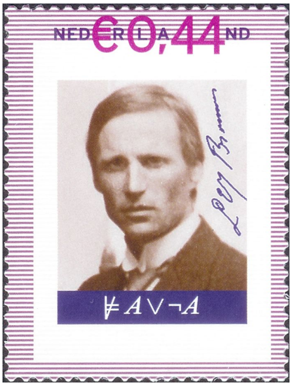
Luis Español González

Preámbulo: En recuerdo del topólogo L. E. J. Brouwer

Hace cien años que L. E. J. Brouwer (1881–1966) publicó su segundo artículo sobre el concepto de dimensión [5], con el que puso fin a una serie de publicaciones, en el periodo 1907–13, que sentaron las bases de la topología a partir de la revisión crítica de la meritoria pero imprecisa obra de A. M. Schönflies (1853–1928). Cuando Brouwer defendió en 1907 su tesis doctoral «Sobre los fundamentos de las matemáticas», su director de tesis D. J. Korteweg (1848–1941) le hizo notar que sus ideas sobre el intuicionismo chocaban con las imperantes en su tiempo y que, para poder ser respetado e influyente en ese campo de los fundamentos de las matemáticas, primero tendría que ganarse un prestigio como matemático ortodoxo. Así lo intentó durante los años dedicados a poner las bases rigurosas de la topología: teorema de la curva de Jordan, teoremas de punto fijo, grado de una aplicación, invarianza de la dimensión, etc. No está claro que por entonces la topología fuera ya un predio matemático consolidado, pero a Brouwer le tuvo que parecer suficiente el esfuerzo realizado para ganarse el reconocimiento, porque a partir de 1913 se dedicó a desarrollar las matemáticas constructivas desde el punto de vista del intuicionismo[1].

Fuera o no consciente Brouwer de ello, su obra en estos primeros años profesionales fue crucial para la recepción de la topología por la comunidad matemática del siglo XX. La topología se fue gestando y haciendo un lugar entre las especialidades matemáticas a través de dos corrientes. La más antigua, geométrica y combinatoria, que discurre de modo intermitente desde la fórmula de los poliedros de Euler hasta

[1] Véanse [7, 28, 29]. En otro momento habrá que recordar al intuicionista Brouwer.



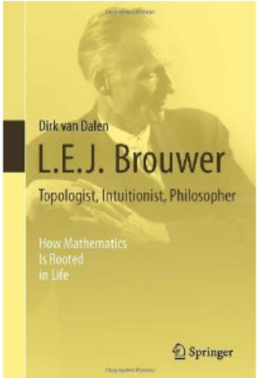


Figura 1: Brouwer en un sello y una cubierta de libro.

el «Analysis situs» [35] publicado en 1895 por Henri Poincaré (1854–1912)[2], estuvo vinculada a la extensión de la noción de poliedro y a la clasificación de superficies, con la característica de Euler como invariante. La otra, más reciente, se inicia al estudiar Georg Cantor (1845–1918) los conjuntos lineales de puntos que son relevantes en el análisis matemático[3]. Ambas líneas de desarrollo se encontraron en la obra de Brouwer.

En el reconocimiento de la topología como especialidad matemática propia tuvo un papel determinante la obra de Poincaré y su recepción por parte de la comunidad matemática. Usamos el término «recepción» en el sentido de J. McCleary en [33], quien explica cómo el trabajo topológico realizado por Poincaré fue procesado por sus lectores, facilitando que resultara atractivo para un número creciente de matemáticos por tratar cuestiones que eran importantes para el análisis matemático en general. El primer artículo panorámico que difundió ampliamente la obra topológica de Poincaré fue el de Max Dehn (1878–1952) y Poul Heegaard (1871–1948) en la *Enciclopedia Teubner* [8], publicado en 1907. Pero, según McCleary, la aceptación y la magnitud del desarrollo posterior de la topología estuvo relacionada con el trabajo de Brouwer, que tuvo un profundo impacto:

> Su éxito al responder a cuestiones importantes para las preocupaciones principales de la mayor parte de la comunidad matemática de su tiempo (tales como la invarianza de la dimensión) fue decisivo para la recepción de la topología durante las primeras décadas de este siglo. Además, su éxito en todas las áreas de la topología, y su percepción y ampliación del tema ayudaron a legitimar el espectro completo de la investigación en el

[2]Estuvo precedido por un breve artículo-anuncio en 1892 y tuvo otros cinco complementarios hasta 1904, motivados por errores señalados por P. Heegaard al artículo principal. En el último *Complemento* formuló Poincaré su famosa conjetura recientemente resuelta. Todo este conjunto de artículos está recogido en inglés en [36].

[3]Referencias clásicas son: (a) Para la topología desde la geometría, [38]. (b) Para la topología desde el análisis, [31]. Más actuales y completos, [9, 26].

campo. Esto marcó la pauta para su desarrollo como un área temática principal en este siglo.

Introducción

Las páginas que siguen están dedicadas a la recepción de la topología en España. El sentido que debemos dar ahora al término «recepción» es una variante del considerado antes siguiendo a McCleary, pues ya no nos moveremos dentro de la esfera de los primeros creadores de ciencia nueva, sino en el trasvase del conocimiento y el hacer científicos desde los centros de creación hacia las periferias con sistemas científicos poco desarrollados, cuyas fases de progreso se inician importando conocimiento para aproximarse, en mayor o menor medida, a los sistemas exteriores avanzados.

Podemos considerar que la recepción de la topología en un ámbito matemático como el español de principios del siglo XX, alejado de las fuentes de la creación en dicho campo, se va produciendo según tres procesos que tienen algo de diacrónicos pero que pueden también evolucionar sincrónicamente:

Difusión. Se produce cuando algunos miembros de la comunidad matemática española, con especial contacto con la matemática europea, dan a conocer en líneas generales algunos trabajos pioneros y llaman la atención sobre ellos como temas de estudio recomendados.

Enseñanza. Significa que no solo se da a conocer una materia nueva en líneas generales, sino que se organizan cursos expositivos, primero de naturaleza extracurricular y llegado el momento incorporados a los programas oficiales, lo que garantiza una mayor atención y difusión.

Investigación. La recepción empieza a ser una realidad cuando aparecen personas o grupos conocedores de la materia importada que comienzan a trabajar en ella realizando aportaciones originales a la construcción del cuerpo de conocimiento.

Nuestro objetivo será, por tanto, dar cuenta de las actuaciones de uno cualquiera de estos tipos realizadas por matemáticos españoles, durante los años señalados en el título, referidas a cuestiones que ahora identificamos como parte de la topología. Estos trabajos hay que buscarlos entre los geómetras y los analistas (encontrándose entre ellos los algebristas), pues no había surgido todavía la figura del «topólogo», que apareció bien diferenciado y extendido por Europa y Norteamérica durante el periodo entreguerras. Avanzando por el primer cuarto del siglo XX español se van encontrando ejemplos de una limitada recepción de la topología, especialidad que, por otra parte, se estaba aislando como cuerpo independiente en la matemática. Lo que se aprecia en España hasta 1925 son sugerencias para (o intentos de) incorporar la topología al conocimiento matemático nacional del momento, sin que falte alguna tesis doctoral[4] o aportación original de naturaleza topológica en el marco de investi-

[4]Para el doctorado en el periodo 1900–1921 véase [11]; las tesis habidas entre 1921 y 1925 inclusive no añaden nada nuevo respecto a la topología. El doctorado solo servía para acceder a puestos en la Universidad y la comunidad matemática española del nivel superior (profesores de universidad) era muy escasa. Así que se leían pocas tesis y la posibilidad de incorporar temas de investigación novedosos era escasa.

gaciones sobre geometría o análisis. En los años finales del periodo que nos ocupa, se percibe un interés más extendido hacia el estudio de estos temas y queda constancia del primer curso de topología ofrecido en España, impartido en Madrid como una actividad de extensión.

A partir de entonces, durante el segundo cuarto del siglo, ya puede decirse que empieza la recepción de la topología en España, proceso que fue, como tantos progresos en la ciencia española, interrumpido por la Guerra Civil. Esta tendencia resurgió modestamente en la posguerra y fue tomando cuerpo de modo definitivo a partir del establecimiento de la topología como asignatura de la Licenciatura en Matemáticas en el plan de estudios de 1952, que incorporó las asignaturas de la «matemática abstracta» característica del siglo XX: Álgebra superior, Geometría algebraica y Topología. No menos importante fue la generalización del doctorado a todas las universidades del país autorizada dos años después[5]. Otra ocasión habrá para continuar este trabajo recorriendo el segundo cuarto del siglo.

Para organizar el estudio de los matemáticos españoles que participaron en la lenta recepción de la topología en España durante el periodo 1900–1925, a través de este proceso de difusión-enseñanza-investigación, distinguiremos tres subperiodos. El primero abarca la primera década del siglo, hasta la aparición en 1911 de la Sociedad Matemática Española (SME[6]) poco después de creada la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPPC) en 1908. El segundo comprende los años de vigencia de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* y los dos que siguieron hasta su reaparición como *Revista Matemática Hispano-Americana*. El tercero y último se inicia en 1919 y dura hasta el final del periodo.

1. 1900–1910: Tiempo de espera

La primera década del siglo XX es un tanto anodina en el devenir de la matemática española. El avance en importación de conocimiento que se producía desde el Sexenio Revolucionario y la posterior Restauración quedó mortecino hasta tomar nuevos bríos en la década siguiente, la segunda del nuevo siglo. La creación en 1900 de la Sección de Ciencias Exactas en las Facultades de Ciencias (solo completa en Madrid, Barcelona y Zaragoza), desgajada de la anterior de Ciencias Físico-Matemáticas, y el nuevo plan de estudios de esa misma fecha, demasiado continuador de los estándares nacionales de escasa vigencia en los países de matemática avanzada, no estimularon el auge de la matemática española a cuya promoción había dedicado Zoel García de Galdeano (1846–1924) su revista *El Progreso Matemático* (1891–1895 y 1899–1900), que puso en circulación al poco de pasar del Instituto de Toledo a la Universidad de Zaragoza, a la que llegó en 1889[7]. La creación de la Junta para Ampliación de

[5] En este momento arranca el relato que escribe el topólogo Manuel Castellet en *La Gaceta de la RSME* [6].

[6] Es la actual RSME, pero recuérdese que la Sociedad no se llamó «Real» hasta 1928. Para aclarar cualquier alusión a la historia de la RSME y sus personajes consultar [13].

[7] Lo hizo como catedrático de Geometría analítica, pero en 1896 pasó a serlo de Elementos de Cálculo infinitesimal, asignatura del curso 3.º.

Estudios e Investigaciones Científicas (JAE) en 1907 tardaría unos años en producir sus efectos en la investigación matemática.

Siendo todavía catedrático de instituto, García de Galdeano inició una reconocida ejecutoria como difusor y expositor de teorías matemáticas desconocidas al sur de los Pirineos; una de ellas fue la geometría n-dimensional que explora más allá del espacio ordinario. Instalado ya en Zaragoza, en el segundo volumen de *El Progreso Matemático* publicó un artículo [20] de solo media docena de páginas titulado «Nota acerca de los poliedros de cuatro dimensiones», en el que da «información sobre los modelos de los seis cuerpos regulares cuadridimensionales del Sr. V. Schlegel además de una lista de escritos sobre los cuerpos de más de tres dimensiones»[8]. Para tener más detalles y una valoración sobre este artículo remitimos a los comentarios que le dedicó Mariano Hormigón (1946–2004) en [25].

Cuatro años después, en 1896, con *El Progreso Matemático* ausente en el intermedio entre sus dos épocas, García de Galdeano publicó un extenso folleto titulado *Las modernas generalizaciones expresadas en el álgebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio*[9], que fue difundido el mismo año en sucesivas entregas de la revista *Madrid Científico* [21], cuya clientela estaba formada por ingenieros. El escrito, dedicado a promocionar temas de la matemática con nula o escasa audiencia en España, da noticia, con algunas fórmulas y figuras pero sin desarrollos de las materias tratadas, de diversas cuestiones geométricas, ofreciendo extractos de publicaciones europeas de las que el autor se mantenía mucho mejor informado que sus colegas españoles. Entre las cuestiones tratadas hay dos que le dan pie a mencionar el «Analysis situs». La primera es su explicación del *Programa de Erlangen* (1872), la visión de la geometría ofrecida por Felix Klein (1849–1925) como determinada por un grupo de transformaciones con la posibilidad de que dos geometrías de apariencia diversa puedan resultar «equivalentes». Terminada la explicación de este asunto con ejemplos de transformaciones elementales del plano y el espacio, afirma García de Galdeano que Klein extiende estas ideas a otros ámbitos, como «el *Analysis situs* que abraza las transformaciones infinitamente pequeñas».

La segunda mención, con algún mínimo detalle técnico, se encuentra al final de la obra, en el apartado dedicado a «La Geometría de n dimensiones», donde expone en un par de páginas finales «breves indicaciones de una obra recientemente publicada por el notable matemático M. Poincaré, titulada *Analysis situs* (1895)». Vaya como muestra un par de catas de lo expuesto por el catedrático de Zaragoza:

> Así se ve como el conocimiento de los poliedros P_i y el del modo de conjugación de sus caras da, en el espacio ordinario, una imagen de la variedad V y que esta imagen basta para el estudio de sus propiedades, bajo el punto de vista del *Analysis situs*. [...] Termina esta obra con una generalización del teorema de Euler hecha para un espacio cualquiera.

[8]Texto de la breve reseña que le dedicaron en el *Jahrbuch* Francisco Gomes Teixeira (1851–1933) y Emil Lampe (1840–1918). La realizaría el portugués Teixeira y Lampe, que era redactor del *Jahrbuch*, se encargaría de traducirla. La reseña menciona al matemático alemán Victor Schlegel (1843–1905) cuya obra inspiró a García de Galdeano.

[9]También tuvo una reseña descriptiva de Teixeira y Lampe en el *Jahrbuch*.

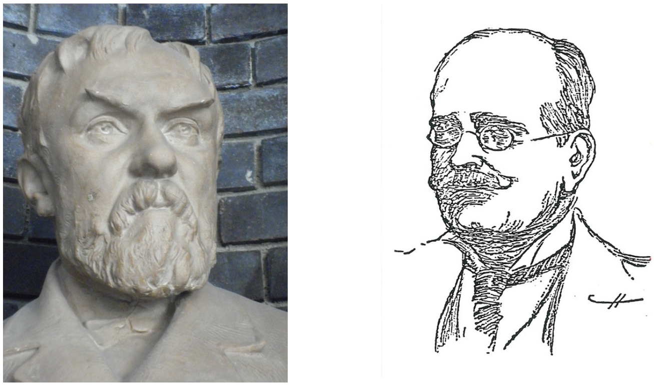


Figura 2: Henri Poincaré y Zoel García de Galdeano.

Esta difusión, apenas publicitaria, solo un año después de publicada la obra del genial francés, proporciona una prueba más del buen nivel de información de García de Galdeano, pero no tuvo ninguna repercusión en el reducido panorama matemático español, que se mantuvo ajeno a estas nuevas cuestiones matemáticas hasta mediada la segunda década del siglo XX.

En el nivel de la enseñanza universitaria[10], la única presencia de la topología de origen geométrico que podemos anotar, remontándonos a los orígenes del tema, es la inclusión de unas lecciones sobre poliedros dentro de las asignaturas de geometría. La preeminencia en el tramo final del siglo XIX de la geometría sintética propuesta por Eduardo Torroja (1847–1918) se consolidó en el plan de estudios de 1900. No en vano, fue su inspirador el propio Torroja, quien dominaba la enseñanza de la geometría en la Central desde su cátedra de Geometría descriptiva de cuarto curso y la acumulación de la asignatura Estudios superiores de Geometría del doctorado. La asignatura nuclear en este planteamiento formativo era la Geometría de la posición de tercer curso[11], para la que Torroja tenía dispuesto un libro [53] que vio la luz en 1899 y fue hegemónico durante las primeras décadas del siglo XX. En él se expone la geometría de la posición [51] de K. G. C. von Staudt (1798–1867) intercalando en el desarrollo de la misma cuestiones particulares de la subgeometría métrica. El diseño del plan del libro y la redacción de la parte principal dedicada a la geometría de la posición correspondió a Torroja, que fue auxiliado para componer los apartados de aplicaciones métricas por su discípulo y colega Miguel Vegas (1856–1943), catedrático en Madrid desde 1891 de la asignatura Geometría analítica de segundo curso. La formación en geometría sintética se iniciaba en la asignatura Geometría métrica del primer curso[12], cuyo contenido estándar durante el primer cuarto del siglo XX lo

[10] La evolución de la Licenciatura en Ciencias Exactas/Matemáticas puede verse en el libro del topólogo Enrique Outerelo [34]. Aunque dedicado a la Universidad Central, buena parte de la información que ofrece tiene valor general por estar unificados los planes de estudios.

[11] El catedrático de la asignatura era Faustino Archilla y Salido (1871–1939).

[12] Las Geometrías métrica y analítica se impartían en casi todas la Facultades de Ciencias, mientras que la de la posición y la descriptiva eran exclusivas de las que impartían la licenciatura

muestra el libro de texto [27] de Cecilio Jiménez Rueda (1858–1934), catedrático de la asignatura en la Universidad de Valencia desde 1896 y en la Universidad Central desde 1906.

Los poliedros aparecen en *Geometría de la posición* y también en *Geometría métrica*, prácticamente con el mismo tratamiento en ambas obras[13]. En la obra de Torroja hay un «Capítulo V. Polígonos y poliedros» (pp. 47–57) en el que se demuestra el «notable teorema [que] se atribuye a *Euler*» expresado por la famosa fórmula $C + V = A + 2$, que relaciona los números de caras, vértices y aristas de un poliedro cuya «superficie queda dividida en dos porciones, por toda línea cerrada compuesta de aristas que pasa una sola vez por un mismo vértice».

Como consecuencia de este resultado se obtienen los casos de poliedros regulares que estudiara Euclides como colofón de *Elementos*. El tema reaparece mucho más adelante, en el «Capítulo XXV. Superficies poliédricas y poliedros regulares» (pp. 541–570), capítulo calificado como «métrico». En él se introducen las «redes esféricas» obtenidas proyectando convenientemente unos ciertos poliedros sobre una superficie esférica con centro en un punto interior del poliedro, que es el centro de la proyección[14]. Los rayos proyectantes pueden cortar varias veces al poliedro de modo que la proyección recubra otras tantas veces la superficie esférica, lo que determina un número ε llamado la «especie» del poliedro y de la red esférica. Se definen también números «especie» para cada cara y cada vértice, resultando:

> En toda superficie poliédrica generadora de una red esférica, la suma de las especies de sus caras y de sus ángulos poliedros, es igual al número de sus aristas aumentado en el doble de la especie de la superficie poliédrica.

Finalmente, considera el caso en que todas las caras son de la misma especie e, y todos los vértices también de la misma especie E, para concluir una generalización del teorema de Euler de la forma $Ce + VE = A + 2\varepsilon$. En esta asociación entre lo lineal y lo esférico se aprecia la presencia de aspectos cualitativos y numéricos compartidos por el poliedro y la red esférica, pero no se hace mención alguna a conceptos generales de transformación e invariantes.

En la *Geometría métrica* de Jiménez Rueda el tratamiento dado al tema es prácticamente el mismo, quizás con una terminología y una exposición más afinadas. Como en esta obra la esfera se introduce de modo básico al principio, antes que otras superficies, los poliedros y las redes esféricas se tratan en lecciones sucesivas tempranas: «Lección 7.ª: Polígonos, Ángulos poliédricos y Poliedros en general. Lección 8.ª: De los ángulos en los polígonos y poliedros». En la primera de ellas se encuentra el teorema de Euler y los cinco casos posibles de «poliedros eulerianos

completa; el doctorado solo en Madrid.

[13] Las dos son volúmenes gruesos de más de ochocientas páginas que pretenden ofrecer más información para consulta de la que cabe en las lecciones de un curso anual. La primera se divide en treinta y seis «capítulos» y la segunda en el mismo número de «lecciones». Ambas también son autosuficientes, carecen de referencias sobre las fuentes usadas por sus autores o sobre otras obras complementarias o más avanzadas.

[14] La razón para que este segundo tratamiento esté tan separado del primero es que la esfera no aparece en la obra hasta que no surge como un caso métrico particular de las superficies cuadráticas proyectivas.

simples». La lección termina introduciendo las redes esféricas a partir de un «poliedro convexo ó estrellado cerrado». En la segunda se prueba el teorema de Euler generalizado. Para ello prueba el mismo teorema que hemos destacado antes sobre las sumas de las especies de los diferentes elementos, pero con una diferencia clarificadora respecto a Torroja, que mezcla en el enunciado el poliedro y la red esférica. Jiménez da el teorema solo para el poliedro, para añadir después que el mismo teorema puede darse solo para la red esférica, con lo que la idea de figuras diferentes en correspondencia con datos invariantes queda mucho mejor insinuada, pero Jiménez tampoco la hace explícita.


Estudio de los Poliedroides tetra-dimensionales regulares

PENTAEDROIDE, OCTAEDROIDE, HEXADECAEDROIDE

MEMORIA

PRESENTADA POR

D. Octavio Zapater y Carceller

ASPIRANDO AL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS
SECCIÓN DE EXACTAS

Figura 3: Tesis doctoral publicada en Barcelona, 1909.

En junio de 1908, Torroja y Jiménez Rueda fueron respectivamente el presidente y el secretario del tribunal que aprobó —solo eso, no le dieron sobresaliente— la tesis doctoral del estadístico Octavio Zapater y Carceller sobre poliedros 4-dimensionales [59], que no fue un trabajo muy original ni actual, pero eso era lo normal entonces[15]. Su justificación al inicio del mismo fue esta:

> Aunque los cuerpos del *hiper-espacio* no podemos representárnoslos[16], no se deduce por ello como dice Poincaré en su obra *Analysis situs*, que no tenga objeto real la Geometría de n dimensiones, [. . .]
>
> Esto es lo que me ha impulsado a tratar, aunque en un grado elementalísimo, en la Memoria que según la vigente ley tiene que presentar el que aspire al grado de Doctor, del estudio de los *poliedroides* que corresponden al espacio de cuatro dimensiones, en las tres series de *poliedroides* contenidas en espacios de una ó n dimensiones dadas por *Stringhan.*

[15] Quizás no fue calificada con sobresaliente, al igual que las tesis de geometría analítica, porque no utilizaba la geometría proyectiva sintética de Torroja.

[16] Por entonces y años después, se realizaban trabajos tendentes a representar el espacio de cuatro dimensiones en el plano por procedimientos que extendían la geometría descriptiva usual.

La tesis es una memoria de sesenta y seis páginas dividida en dos partes: una primera (pp. 7–32) dedicada a explicar el espacio de cuatro dimensiones, sus «campos» —nombre que asigna a los subespacios— y las posiciones relativas entre ellos; la segunda parte (pp. 33–66) expone los tipos de los «poliedroides» básicos con su «fórmula de Stringhan» (que extiende la de Euler). Zapater expone parte del trabajo que en 1880 realizó Irving Stringhan (1847–1909)[17] como tesis doctoral en la Johns Hopkins University [52] bajo la dirección de James Joseph Sylvester (1814–1897).

Cambiando de orientación, la búsqueda en la enseñanza de las matemáticas universitarias españolas de referencias a cuestiones de naturaleza topológica importadoras de la obra de Cantor habría que dirigirla hacia los textos de las asignaturas Análisis matemático 1.º y 2.º, que es donde se estudiaba la continuidad de las funciones reales de una y varias variables. En el arranque del siglo, los catedráticos de estas asignaturas en las Facultades de Ciencias con Sección de Ciencias Exactas completa eran José María Villafañe y Viñals (1830–1915) y Luis Octavio de Toledo (1857–1934) en Madrid, Miguel Marzal y Bertomeu (1856–1915) en Barcelona y José Ríus y Casas (1867–1940) en Zaragoza[18]. Todos ellos tenían publicados libros de texto en los que no puede encontrarse una precisión anunciadora de la topología en el estudio de la continuidad de las funciones reales de una o varias variables, porque ni siquiera llegaron a exponer, más allá de enfoques intuitivos, la naturaleza aritmética del número real. Habrá que esperar a la llegada de Rey Pastor en el subperiodo siguiente para asistir a la recepción de los fundamentos topológicos rigurosos de la continuidad de las funciones reales y complejas.

2. 1911–1918: La topología que llega con Rey Pastor

En estos años de la segunda década del siglo el protagonista va a ser Julio Rey Pastor (1888–1962), que combina actividad como geómetra y como analista[19], apareciendo menciones a la topología en sus dos campos de actividad y en los tres aspectos, difusión, enseñanza e investigación, de la recepción que estamos considerando. Rey Pastor se doctoró en 1909 con una tesis de geometría proyectiva sintética inscrita en la escuela entonces dominante de E. Torroja, pero adoptando una clara reorientación personal del tema. Su objetivo era estudiar la generación y propiedades de las curvas geométricas[20], pero era consciente de la inferioridad del método geométrico frente al analítico, de modo que se propuso dotar de nuevas herramientas al enfoque geométrico sintético añadiendo axiomas trasvasados desde los fundamentos del

[17]Al que solo menciona por su apellido, como hemos visto, sin dar más datos de su persona ni referencias a su obra, cosa habitual en su tiempo. Años después, los poliedroides de Stringhan son estudiados en un curioso libro matemático-filosófico publicado en París por el aristócrata Illán Álvarez de Toledo (1882–1962), marqués de Casafuerte, que fue reseñado por el ingeniero y aviador Emilio Herrera Linares (1879–1967) en la *Hispano-Americana* [1].

[18]La asignatura de análisis de tercer curso estaba a cargo de José Andrés Irueste García (1844–1918) en Madrid, Lauro Clariana Ricart (1842–1916) en Barcelona y García de Galdeano en Zaragoza.

[19]Para la biografía de Rey Pastor en sus primeros años profesionales véase [12].

[20]Que son las mismas curvas algebraicas, pero expuestas dentro de una teoría geométrica axiomática que no hace uso de las ecuaciones.

análisis, en los que aparecen los aspectos topológicos. A lo largo de esta tarea podía parecer un geómetra sintético excluyente del análisis, pero en realidad prestaba una gran atención a las cuestiones fundamentales del análisis para traducirlas al campo sintético de la geometría pura. Mantuvo esta actividad investigadora en geometría sintética aproximadamente durante el subperiodo que ahora consideramos, pero en 1911 había ganado la cátedra de Análisis matemático y poco a poco su dedicación a la geometría sintética fue decayendo. Entre el verano de 1911 y el de 1914 Rey Pastor pasó tres cursos en las universidades sucesivas de Berlín, Oviedo y Gotinga, en las alemanas becado por la JAE y en la asturiana ejerciendo por primera vez su cátedra, dedicado a explicar Análisis matemático 2.º, lo que significaba álgebra (resolución de ecuaciones reales y complejas) y cálculo diferencial de funciones reales de varias variables. El impacto de Rey Pastor en la matemática española, tanto por su descollante capacidad personal como por la formación internacional que pudo recibir gracias a la JAE, se manifiesta una vez que se incorpora con continuidad a la universidad española a partir del curso 1914–15, ya con la cátedra trasladada a la Universidad Central, donde reemplazó a Villafañe para compartir cátedra con Octavio de Toledo. Como vamos a ver, tanto en su obra geométrica como en la analítica se aprecia la presencia de la topología, entendida en términos de los espacios reales o el plano complejo.

Como actividad de difusión de la matemática avanzada de su tiempo, ante el público español culto en materia científica, es noticiable el ciclo de conferencias que pronunció en el Ateneo de Madrid durante la primavera de 1915, recogido un año después en un libro [39]. Bajo el título *Introducción a la Matemática superior*, impartió seis conferencias de alguna de las cuales daremos una sucinta reseña para destacar lo que contienen de referencias a la topología tal como entonces podría ser entendida.

Conferencia segunda: Fundamentos de la Geometría [39, 35–66]. Entre otros asuntos, explica la necesidad que ha tenido la geometría en tiempos recientes de ser sometida a crítica y renovación para librarla de los peligros de la intuición, dando como hecho esencial el descubrimiento por Cantor (1879) de la correspondencia biunívoca entre el segmento y el cuadrado.

Conferencia tercera: Funciones de variable real [39, 67–96]. El conferenciante vuelve sobre el tema anterior, dando ejemplos de curvas continuas que llenan un área, poniendo en cuestión el concepto de dimensión que sustenta a la geometría. Pero enseguida tranquiliza a su audiencia: «No es posible establecer una correspondencia biunívoca y continua entre dos espacios de distinto número de dimensiones». Y señala que la demostración de este hecho ha sido obra reciente de Brouwer, de quien cita trabajos de 1911 y 1912, junto con otro de 1911 de Henri Lebesgue (1875–1941).

Conferencia sexta: Sistematización de la matemática por medio de la teoría de grupos [39, 175–198]. Buena parte de esta conferencia está dedicada a difundir el *Programa de Erlangen* (1872) de Klein, como ya hiciera su maestro García de Galdeano[21]

[21] Rey Pastor fue alumno en la Universidad de Zaragoza de García de Galdeano, a quien dedicó *Introducción* llamándole «esforzado paladín de la matemática moderna en España».

veinte años antes. Entre los grupos de transformaciones más amplios que los de la geometría elemental señala:

> Más general todavía: el grupo de todas las *deformaciones*. Cada curva se transforma en otra de igual número de ramas y puntos múltiples. Tenemos un invariante: *la curva de Jordan*; otro invariante: *la dimensión*; otro: el orden de *conexión*. La Geometría de este grupo es la *Topología* o *Análisis Situs*.

Rey Pastor fue un propagandista, incluso fuera de nuestras fronteras, del *Programa de Erlangen* y con ello de la difusión —sin más que dar noticia— de la naturaleza de la topología como un tipo de geometría generalizada. A la vuelta de Gotinga, en 1914, Rey Pastor ganó un concurso, convocado un año antes por la Real Academia de Ciencias de Madrid, con una memoria que se publicó dos años después bajo el título *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior* [41]. Nos ocuparemos más adelante del contenido topológico que hay en el capítulo cuarto de esta memoria, pero de momento comentaremos que tiene una primera parte, «Sistematización de la Geometría», algo exenta del cuerpo principal de la obra, dedicada a exponer en dos capítulos (75 páginas) una visión detallada y puesta al día del programa kleiniano, acompañada de una extensa bibliografía actualizada. El primer capítulo se dedica a las «Geometrías elementales» (la proyectiva de dimensión menor o igual que tres y las contenidas en ella) y el segundo a las «superiores», entre las que cuenta la geometría proyectiva de dimensión mayor que tres, las deducidas de ella añadiendo la invarianza de alguna figura (curva o cuádrica) y las «Geometrías trascendentes», entre ellas la «Geometría conforme», la «Geometría de las transformaciones birracionales» estudiada por Luigi Cremona (1830–1903) y finalmente, con un grupo todavía mayor, la «Topología o Análisis *situs*», a la que llama también «Geometría de la posición»[22]. Poco más dice sobre la topología en esta ocasión (pp. 54–55) que en la conferencia del Ateneo de Madrid ya reseñada, aunque sí sanciona que

> en estos últimos tiempos [la topología] ha hecho grandes progresos, que la han constituído como ciencia autónoma.

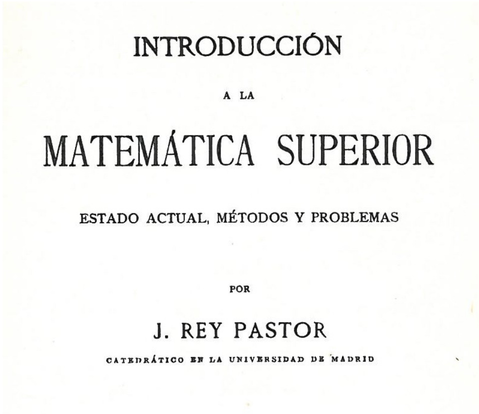
Por otra parte, anuncia que en el capítulo cuarto (al que remite para la bibliografía sobre topología) expondrá como investigación original un desarrollo de la topología en el plano real con los puntos del infinito añadidos, de la que más adelante nos ocuparemos. Digamos, antes de terminar este aspecto, que en 1918 su visión del *Programa de Erlangen* tuvo dos versiones en Italia, una con texto en francés y otra su traducción al italiano. La primera fue solicitada para la revista *Scientia, rivista internazionale di sintesi scientifica* —de Bolonia, promovida entre otros por el prestigioso geómetra Federigo Enriques (1871–1946)— por su director el filósofo

[22]Este nombre viene del calificativo «situs» utilizado por Leibniz para nombrar a la geometría que no se ocupa de las cuestiones de medida reclamadas por la etimología del término, sino de la posición relativa de los elementos geométricos; con este punto de vista, el nombre igual pudo ser adoptado en los estudios sobre poliedros que evolucionaron en «Analysis situs», como en la geometría proyectiva, que von Staut denominó «Geometría de la posición» (*Geometrie der Lage*, 1847), nombre adoptado por su seguidor español E. Torroja. También usaron ese calificativo Lazare Carnot (1753–1823) y Hermann Grassmann (1809–1877) en su cálculo vectorial.

Eugenio Rignano (1870–1930), que la tradujo al francés [44]. Luego Alpinolo Natucci (1883–1975) hizo la versión italiana para la revista *Bollettino di Matematica*, de naturaleza científico-didáctica. Rey Pastor redactó este artículo en clave de divulgación con expresiones como esta:

> En la geometría proyectiva la rigidez de los ángulos desaparece, también la del paralelismo, pero la rigidez de las rectas subsiste todavía. En la topología se suprime toda rigidez.
>
> Si se nos permite materializar la idea, diremos que el espacio métrico, tanto el euclídeo como los no-euclídeos, es un espacio indeformable, cristalizado; el de la geometría afín es un espacio articulado, paralelográmico; el de la geometría proyectiva es un tejido de rectas entremezcladas; el espacio topológico es un espacio amorfo, un espacio gelatinoso.

Este estilo de comunicación tuvo su impacto en medios interesados en la filosofía y los fundamentos de la geometría, en los que Rey Pastor fue varias veces citado[23].



INTRODUCCIÓN

A LA

MATEMÁTICA SUPERIOR

ESTADO ACTUAL, MÉTODOS Y PROBLEMAS

POR

J. REY PASTOR

CATEDRÁTICO EN LA UNIVERSIDAD DE MADRID

Figura 4: Julio Rey Pastor y su libro de las conferencias en el Ateneo de Madrid.

En el ámbito de la enseñanza, Rey Pastor utilizó, con los hábitos terminológicos de su tiempo, la nociones topológicas incorporadas al análisis: la conexión por Bernhard Riemann (1826–1866) y la tipología de puntos y de conjuntos por Cantor. Así quedó patente en *Resumen de las lecciones de Análisis matemático 2.º curso 1915–16*, los apuntes [40] del primer curso sobre esta materia que impartió en Madrid[24]. Allí utiliza las nociones topológicas para exponer con rigor las propiedades de las funciones reales continuas con dominio un «intervalo» en el caso de una variable y un «recinto con contorno» en el caso de dos o más variables. Efectivamente, Rey Pastor estudia estas propiedades separando el caso de una variable del de dos o más, siendo

[23] Por ejemplo, en la obra de Luis Rougier (1889–1982) sobre la filosofía de Poincaré [48].

[24] En 1912–13 lo había impartido en Oviedo, sin que conozcamos documentación sobre ese curso. En 1914–15 impartió en Madrid la asignatura de 1.º, de la que también publicó apuntes, que forman un único proyecto docente junto con los de 2.º, véase [16].

más patente en el segundo caso la necesidad de las nociones topológicas. En una variable considera los «conjuntos lineales de puntos» estableciendo que *entorno*[25] de un punto x es cualquier *intervalo* $(x-\delta, x+\delta)$ con $\delta > 0$, en el que considera también a los extremos[26]. A partir de la noción de entorno elabora la «clasificación de los puntos» x de un conjunto $\overline{C}$[27]: punto *aislado*, punto *límite* (advirtiendo que esta noción sirve también para puntos que no estén en $\overline{C}$) y punto *interior*. Seguidamente considera los conjuntos acotados para demostrar los dos teoremas básicos que enuncia así:

> Todo conjunto acotado superiormente tiene un extremo superior. (Weierstrass)
>
> Todo conjunto infinito acotado tiene al menos un punto límite. (Bolzano)

Demuestra estos teoremas asignados a Bernard Bolzano (1781–1848) y Karl Weierstrass (1815–1897) usando los procedimientos de construcción del número real. Para la obtención del extremo superior usa una cortadura, y para el punto límite hace subdivisiones sucesivas del intervalo en un número finito de intervalos, produciendo así un par sucesiones monótonas convergentes. Llegado el curso a las funciones continuas, el teorema esencial es:

> Si una función es continua en el intervalo (a, b) existen dos valores de x en dicho intervalo en los cuales toma $f(x)$ sus valores máximo y mínimo. (Weierstrass)

La prueba se basa en que la función es acotada (lo demuestra en un teorema previo por reducción al absurdo, determinando un par de sucesiones monótonas convergentes que definen un punto de discontinuidad), por tanto sus valores tienen un extremo superior M que debe ser de la forma $M = f(\xi)$ para un punto del intervalo, pues en otro caso la función $\frac{1}{M-f(x)}$ sería continua, lo que es contrario a la condición extremal de M. Luego demuestra también que la función toma todos los valores intermedios entre los dos que alcanza en los extremos, advirtiendo con un ejemplo que el teorema inverso es falso, por lo que «no puede tomarse tal propiedad como definición de la continuidad»[28].

Avanzado el curso, llegado el turno de las funciones reales de varias variables, Rey Pastor coloca un apartado previo sobre «conjuntos de dos o más dimensiones» similar al de los conjuntos lineales. Ahora un *entorno* de un punto del plano es una bola centrada en él, esta vez tomada sin la circunferencia, y mediante entornos[29] clasifica los puntos de un conjunto plano como lo hizo en la recta, dando el teorema de

---

[25]Rey Pastor escribe en cursiva las palabras que denotan los conceptos nuevos que introduce, así lo haremos en esta página y siguientes.

[26]Esta notación (a, b) para el intervalo cerrado confunde con la que hoy es habitual. Rey Pastor utiliza para el intervalo sin extremos la notación $(a+0, b-0)$ originaria de P. G. L. Dirichlet (1805–1859) y utilizada por C. J. de la Vallée-Poussin (1866–1962), pero que no perduró.

[27]Esta notación $\overline{C}$ para designar un conjunto viene de su obra geométrica, en la que el elemento genérico de dicho conjunto es denotado C.

[28]Así lo había realizado Marzal, a quien Rey Pastor no corrige explícitamente en esta ocasión, pero sí en una edición impresa posterior.

[29]Indica que también podrían haberse tomado los entornos como cuadrados centrados en el punto.

Bolzano para acotados de un modo similar. Pero ahora le interesa también clasificar los propios conjuntos, apareciendo el *derivado* de un conjunto, los *cerrados*, los *densos* y los *perfectos*. El papel de los segmentos en la recta corresponde en el plano a los *recintos*, que define como conjuntos *conexos* cuyos puntos son todos interiores[30], de modo que sus puntos límites forman el *contorno* del recinto; así que un *recinto contorneado* es un recinto junto con su contorno[31]. Con estas nociones, el estudio de las funciones continuas definidas en recintos contorneados es análogo al de las de una variable sobre intervalos (contando sus extremos),

> sin más modificaciones que ésta: donde decíamos «en un cierto intervalo menor que ε» pondremos: «en un cierto entorno de amplitud (radio, si es circular, o semilado si es cuadrado) menor que ε».

Terminado el capítulo dedicado a las funciones reales, insertó su apartado de «notas y adiciones», en el que para profundizar en el estudio de la «teoría general de los conjuntos» recomienda el artículo de Schönflies [49] en la *Enciclopedia Teubner* (1898)[32] y especialmente las memorias originales de Cantor. Finalmente inserta una amplia bibliografía de la teoría de funciones con una explicación comparativa de la «nomenclatura en la teoría de conjuntos» que en ellas se utiliza.

Como enseñanza superior de tipo posgrado hay que reseñar las conferencias de análisis complejo —más bien lecciones con todo su contenido técnico— que Rey Pastor impartió, invitado por Esteban Terradas (1883–1950) al Instituto de Estudios Catalanes en junio de 1915, antes de iniciar en Madrid la asignatura del segundo curso antes citada. Aparecieron como libro dos años después [42] redactadas en catalán por el propio Terradas[33]. En esta *Teoría de la representación conforme*, Rey Pastor hace uso de las nociones habituales de la topología del plano usadas en análisis[34] y en la «Conferencia V: Teorema de existencia de Riemann» añade al final una nota indicando la demostración de la propiedad de compacidad del plano que fue usada en un momento del desarrollo del tema:

> Teorema de Borel: Dado un conjunto acotado y cerrado cada uno de cuyos puntos tiene asignado arbitrariamente un entorno, es posible entre estos infinitos círculos elegir tan sólo un número finito de manera que cubran todo el conjunto.

La compacidad de Émile Borel (1871–1956) no apareció en el *Resumen* de su curso inicial, pero sí en las reelaboraciones que hizo en años posteriores dando lugar a su

[30] Todavía no usa el término «abierto». Define los conexos por caminos quebrados finitos. También da la definición de conjuntos *simplemente conexos*.

[31] Las nociones de recinto y contorno le dan da pie a enunciar el teorema de la curva de Jordan, para cuya «demostración rigurosa» remite al entonces novedoso tratado de análisis de C. J. de la Vallée-Poussin (1914).

[32] Esta fue la referencia más usada sobre el tema hasta la aparición del libro de Hausdorff en 1914, todavía no incorporado por Rey Pastor a sus listas de referencias.

[33] Terradas invitó a Rey Pastor a uno de los primeros Cursos Monográficos que ponía en marcha con el fin primordial de invitar a profesores extranjeros, lo que era difícil en tiempos de guerra, pero Rey Pastor pudo ser como uno de ellos por su reciente estancia en Gotinga; fue lo allí aprendido con posterior elaboración propia lo que contó en Barcelona. Sobre Terradas véase [47].

[34] En la publicación (1917) se remite como referencia para estos conceptos al *Resumen* de su segundo curso en Madrid (1916).

libro *Teoría de las funciones reales*, de dilatada elaboración por fascículos desde 1918 hasta su edición completa en 1925 [14], que contiene más material que los primeros apuntes[35]. En 1921 ya circulaba impresa toda la parte de funciones de una variable del *Resumen* mejorada y notablemente ampliada. Incorpora la terminología de conjunto *abierto*, demostrando que todo abierto «se compone de intervalos abiertos[36], en número finito o infinito numerable». Otra novedad es que al tratar el concepto de número real en las primeras páginas considera el «teorema de Heine-Borel» (compacidad) enunciado con «segmentos» y demostrado por reducción al absurdo con un argumento de subdivisión que se apoya en el que llama «axioma de continuidad», que es el principio de los segmentos encajados (Cantor) que ha impuesto a la recta geométrica para poder ponerla en biyección con los números reales definidos aritméticamente. A pesar de que del teorema de Heine-Borel está enunciado en clave geométrica, en nota a pie de página indica que la demostración es equivalente a una aritmética (con intervalos, como la primera que hizo Borel sobre logros previos de H. E. Heine (1821–1881) y otros en relación con la continuidad uniforme) basada en pares de sucesiones monótonas convergentes. Al final del capítulo I dedicado a estas cuestiones topológicas sobre el número real, incluye una nota bibliográfica (p. 40) en la que, además de las referencias habituales a Cantor y Schönflies, señala:

> En el comienzo de los tratados sobre Teoría de las funciones [...] están expuestos los fundamentos de la teoría de los conjuntos; la obra de Hobson es la que dedica mayor extensión a esta doctrina. Un tratado didáctico, especialmente dedicado a ella, no existe todavía. [Y a pie de página] Un tratado sistemático, del que forman parte las escasas páginas que aquí dedicamos a esta teoría, publicaremos en breve. En él expondremos, no solamente la parte perfectamente consolidada de la creación de Cantor, sino también los problemas todavía no resueltos, entrando en la zona polémica, donde tan interesantes trabajos han producido lógicos e intuicionistas[37].

Más adelante, después de dar los teoremas que expresan las «propiedades de las funciones continuas en un intervalo» como hiciera en los apuntes previos, añadió en cuerpo menor una digresión titulada «Demostración sintética de los Teoremas de continuidad» con el objetivo de «dar nuevas demostraciones de ellas por medio del teorema de Heine-Borel» que, afirma, «son preferibles por su brevedad», aunque también señala que pierden la ventaja que supone el «proceso uniforme de las subdivisiones que conducen al punto buscado como límite de sucesiones convergentes». Estas novedades incorporadas en el tratamiento de las funciones de una variable no tuvieron su correspondencia en varias variables, donde repitió lo expuesto en *Resumen*. En las sucesivas ediciones de esta obra, siempre más o menos modificadas,

[35] También incluyó el teorema de Borel plano en el curso urgente de análisis complejo que dio en Buenos Aires durante su estancia de 1917–18 [43].

[36] Los intervalos siguen incluyendo a los extremos y denotados (a, b), pero aparecen los «intervalos abiertos» que excluyen los extremos y para los que usa la notación (a^+, b^-).

[37] La obra de E. W. Hobson (1856–1933) que cita es [24]. Como le sucedió con otros proyectos de libros, no prosperó este inmediato sobre teoría de conjuntos; no obstante, años después impartió cursos sobre esta materia de los que queda material escrito.

no siguió el camino breve de la compacidad sino que prefirió argumentar con las subdivisiones que permiten vislumbrar cómo se obtiene el número real buscado en cada caso[38].

Volviendo hacia 1915, vamos a considerar a partir de ahora la presencia de la topología en la investigación geométrica de Rey Pastor que, como ya dijimos, está presidida por la idea de incorporar a la geometría sintética procedimientos del análisis. Volvamos pues a los *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior* [41] en sus partes genuinas, segunda y tercera, dedicadas respectivamente, en clave sintética, a la geometría proyectiva real y a la compleja. Hemos de prestar atención, en la parte real, al «Capítulo IV. La continuidad geométrica». Rey Pastor elaboró su geometría proyectiva plana a partir de diez axiomas del tipo Pasch-Schur[39] en los que punto y segmento son las nociones primitivas. En el capítulo cuarto expuso el procedimiento de la «red de Möbius» para introducir en una recta coordenadas racionales, justificando en el § 3 que para introducir la continuidad necesita un nuevo axioma similar a alguno de los que operan en el tratamiento de la recta analítica:

> Axioma XI: Dados los infinitos segmentos $\overline{AA_1}, \overline{AA_2}, \overline{AA_3}, \ldots$ tales que cada uno contiene al anterior, y todos ellos están contenidos en $\overline{AB}$, hay un segmento $\overline{AL}$ interior á $\overline{AB}$ ó coinciden con él, que los comprende á todos, y tal que ningún otro segmento $\overline{AL'}$ interior á $\overline{AL}$ cumple igual condición.

Con este nuevo «axioma de continuidad»[40] puede demostrar el «postulado de Cantor en forma proyectiva» (punto único común a infinitos segmentos encajados) y que en la «recta continua» hay infinitos puntos más que los racionales de la red que lleva el nombre de August Möbius (1790–1868). Así llega al apartado «§ 4. Teoría de los conjuntos proyectivos», que presenta de este modo:

> La teoría de los conjuntos proyectivos, que aquí desarrollamos en sus rasgos fundamentales (creemos que por primera vez en la literatura matemática) es válida para cualquier espacio $[E_n]$; pero nos fijaremos principalmente en E_2, porque más nos interesa para los desarrollos posteriores.

La noción topológica básica es la de *entorno* de un punto A, que en E_2 define como «todo polígono proyectivo que tiene A como punto interior», estando esta condición bien determinada para los polígonos proyectivos previamente definidos; luego esta noción de entorno permite definir puntos interiores de un conjunto proyectivo cualquiera. También se introducen todos los conceptos cantorianos de puntos especiales: aislados, de acumulación, de condensación, exteriores, frontera, etc., así como

[38]Rey Pastor se declaraba matemático idealista pero, aun no siendo intuicionista, sentía aprecio por las demostraciones que mostraban el camino para determinar los entes cuya existencia se pretendía probar.

[39]Moritz Pasch (1843–1930) e Issai Schur (1875–1941) fueron pioneros en la axiomatización del espacio proyectivo.

[40]Rey Pastor afirma que podría enunciarse así: «la sucesión (A_i) tiene un punto límite L interior a $\overline{AB}$, ó coincidente con B», añadiendo que «este axioma, que ponemos como fundamento de la Geometría proyectiva, coincide con uno de los teoremas fundamentales de Weierstrass, en la teoría de funciones».

Figura 5: Julio Rey Pastor: Topología del plano proyectivo en *Fundamentos*.

las nociones de conjunto derivado, cerrado, denso y perfecto. Rey Pastor demuestra en este contexto geométrico los teoremas propios del plano real analítico, como son:

> Todo conjunto de infinitos puntos tiene, al menos, un punto de acumulación (Principio de Bolzano, generalizado). [...]
>
> Si el conjunto derivado $\overline{U}'$ de un conjunto cualquiera $\overline{U}$ contiene infinitos puntos, es cerrado. [...]
>
> Teorema de Borel.— Si á cada punto de un conjunto *cerrado* se le asigna un entorno arbitrario, es posible elegir entre estos infinitos polígonos que cubren todo el conjunto, un número *finito* de ellos, tal que todo punto del conjunto quede interior, por lo menos, á uno de estos polígonos.

Para demostrar estos teoremas utiliza Rey Pastor, como en su obra de análisis, un método de subdivisión que determina una sucesión indefinida de cuadriláteros, cada uno contenido en el anterior, que tienen un punto único contenido en todos. Más adelante introduce las «correspondencias continuas» y prueba que es continua «la correspondencia armónica respecto de un par de puntos MN». Esta es la base topológica a partir de la cual Rey Pastor desarrolla la geometría proyectiva sintética, primero real y luego compleja, asunto del que no daremos más detalles.

Cabe únicamente decir, para terminar este aspecto, que en la «Bibliografía relativa al capítulo IV» insiste Rey Pastor en la originalidad de su teoría de los conjuntos proyectivos, para la que señala como referencia la obra general de Schönflies de 1913 [50], junto con artículos de Brouwer y Lebesgue de los años 1911–13 relativos a la dimensión y a la curva de Jordan[41]. Además, indica a pie de página (p. 193):

> A ruego del profesor Young, de Cambridge, preparamos una ampliación de estos §§ de la presente obra, para incluirla en la 2.ª de su conocido tratado *The Theory of set of points*, 1.ª ed. (agotada). Cambridge, 1906.

[41]Nombre debido al analista (y algebrista) francés Camille Jordan (1838–1922), que probó la primera versión del teorema en una tardía edición (1909–15) de su famoso curso de análisis.

Pero esta segunda edición del libro de W. H. Young (1863–1942) y Grace C. Young (1868–1944) no tuvo lugar y no hay noticia de nuevos avances de Rey Pastor en la dirección iniciada en *Fundamentos*. Es posible que influyera en estas dos decisiones, por una parte, la aparición en 1914 de la crucial obra de Felix Hausdorff (1868–1942) proponiendo una formulación abstracta axiomática del espacio topológico sobre la base de puntos y entornos [23], que orientó por otros caminos la evolución de los libros dedicados a la naciente topología, inicialmente centrada en los espacios euclídeos. Por otra parte, la axiomática del espacio proyectivo tomó también un rumbo más abstracto a partir del influyente libro [54] de los norteamericanos Oswald Veblen (1880–1960) y John Wesley Young (1879–1932).

El año 1917 comenzó en la SME bajo la tensión de una disputa entre los partidarios de hacer la *Revista* accesible a una gran mayoría de matemáticos españoles, tanto en calidad de lectores como de colaboradores en la elaboración de sus páginas, y los que pretendían dar mayor presencia a la investigación y exigir un mínimo de calidad incluso a las colaboraciones elementales. La primera opción, capitaneada por el director C. Jiménez Rueda, significaba elementarizar sensiblemente la revista, y la segunda, de la que Rey Pastor era el más cualificado defensor, pretendía elevar su calidad matemática. En este ambiente, las sesiones periódicas que celebraba la SME no solo se limitaban a la gestión de la sociedad, sino que actuaban como sesiones científicas en las que se exponían trabajos, en particular se juzgaban para su aceptación o rechazo los que aspiraban a ser publicados en la *Revista*. En la sesión del mes de abril, Rey Pastor expuso un trabajo personal de investigación «Sobre el último teorema de Poincaré» que permaneció inédito hasta 1945 [46], aunque se refirió a él en varias ocasiones durante el dilatado tiempo intermedio. Si pretendía publicarlo en la *Revista de la SME* es posible que el asunto quedara en suspenso porque la revista interrumpió su tirada precisamente tras el número de abril de ese año. Poco después Rey Pastor realizó una estancia en Buenos Aires que duró casi un año. Veremos en el apartado siguiente que el tema reapareció en su agenda de 1919 y de nuevo en 1925, pero tampoco en esas ocasiones se reflejó en una publicación.

El teorema de referencia era uno «de Geometría» que Poincaré enunció e intentó demostrar sin éxito en la que fue su última publicación [37], realizada poco antes de fallecer en 1912; pero tan convencido estaba de que al fin sería demostrado, que expuso sus aplicaciones al problema de tres cuerpos, el tema en el que dicho teorema había surgido. Poincaré considera en el plano un anillo circular limitado por dos circunferencias concéntricas y un homeomorfismo del mismo sin puntos fijos en dichas circunferencias; bajo ciertas condiciones adicionales, trata de probar la existencia de un punto fijo en el interior del anillo. En el intento de prueba formuló otras variantes del teorema; una de ellas, con modificación en las condiciones del homeomorfismo, planteaba la existencia de una curva cerrada que rodeaba a la circunferencia interior y no tenía puntos de coincidencia con su transformada por el homeomorfismo. No hay constancia documental de lo expuesto por Rey Pastor en este asunto y fecha, pero sabemos que propuso una demostración constructiva del teorema inicial de Poincaré, basada en la transformación del anillo en un rectángulo y en el mismo «método de subdivisión» de rectángulos que había utilizado, como hemos visto, en análisis y en la topología de los conjuntos proyectivos. El teorema de Poincaré ya había sido demostrado por George D. Birkhoff (1884–1944) en 1913 [4], pero la novedad que Rey Pastor introducía era la naturaleza constructiva de la prueba, aunque en esos años fuera discutible si ello era o no un mérito.

3. 1919–1925: Aumenta la presencia de la topología

La tercera parte de este artículo corresponde a los primeros años de existencia de la segunda revista de la SME, que se puso en marcha en 1919 bajo el rótulo *Revista Matemática Hispano-Americana* y sostenida desde el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE que dirigía Rey Pastor desde su fundación en 1915, con lo que se planteaba como una revista de investigación. Rey Pastor tuvo una actuación decisiva en el relanzamiento de la SME y en la refundación de la revista, pero su producción matemática creativa quedó suspendida, principalmente por su instalación en Buenos Aires desde 1921 y su atención preferente a los libros de texto que producía en ambas orillas. Retomó sus proyectos de investigación a partir de 1926, con el tema preferente de las series e integrales divergentes; más adelante volvió a prestar atención a la topología, pero esta nueva etapa queda fuera del periodo asignado a este artículo.

Lo que sí hay que reseñar en los años que ahora nos ocupan, al principio y al final, es la insistencia de Rey Pastor sobre el teorema de Poincaré. Lo expuso de nuevo en una solemne sesión de la SME celebrada el 5 de abril de 1919, presidida por García de Galdeano y asistiendo como invitado de honor Jacques Hadamard (1865–1963), quien realizaba una estancia como investigador invitado en Madrid. Ante el prestigioso matemático francés expusieron sus trabajos seis matemáticos españoles, entre ellos Rey Pastor, que esta vez explicó con todo detalle, para que la escuchara y comentara el testigo de excepción, su demostración del último teorema de Poincaré. También intervino otro activo miembro de la SME, el militar Miguel Correa Arizmendi, que se ocupó de «Una cuestión de Análisis situs», que estaría en relación con la tesis doctoral que defendió dos meses después, titulada «Sobre las curvas de Jordan»[42].

Las conferencias de Hadamard en abril fueron un homenaje a Poincaré centrado en temas de ecuaciones diferenciales y funciones enteras pero, a petición del público (escaso), añadió a su programa una exposición de sus investigaciones «Sobre las transformaciones puntuales», título bajo el que apareció un breve artículo de tres páginas [22] en la *Hispano-Americana*, como coloquialmente se llamó a la nueva revista de la SME, en el que realiza algunos comentarios y arreglos sobre un trabajo del mismo título que había publicado en 1906[43].

[42] Correa leyó la tesis el 27 de junio. Sobre las actividades investigadoras de Correa véase [2]. Añadiremos que en la sesión de la SME de 7 de junio, en la que hubo cinco comunicaciones, Correa disertó sobre «Algunos trabajos recientes sobre las curvas cantorianas» y después del verano, en la serie de cursos no reglados que organizaba la Facultad de Ciencias de Madrid, inició uno sobre «Clases de Baire».

[43] Se trataba de dar condiciones necesarias y suficientes para que una transformación del espacio euclídeo fuera biyectiva: una de ellas era que lo fuera en un entorno de cada punto y la otra se refería a la acción sobre curvas.

La revista publicó también, en dos fragmentos, un amplio texto sin firma[44] titulado «J. Hadamard. Análisis de su obra matemática». En el segundo fragmento, dedicado a su trabajo en geometría, mecánica y física[45], se mencionan sus contribuciones al «Análisis *situs*», expresamente su determinación de un conjunto perfecto no continuo tomando las tangentes a las geodésicas que pasan por un punto de una superficie. Tras esta observación sobre la obra de Hadamard, hay unos párrafos de opinión sobre la topología:

> Bien extraño parece a primera vista que se haya tardado tanto tiempo en introducir la Topología en los problemas analíticos y geométricos, [. . .] se impone echar mano de los recursos del Análisis *situs*, cuyo desarrollo es todavía incipiente, pero su porvenir inmenso [. . .] afirmación que presenta a la Topología como Geometría del porvenir.

Aunque los autores de este artículo no lo mencionan, Hadamard había tenido colaboración e influencia en la investigación topológica de Brouwer [33].

Esta aparición de la topología en el primer tomo de la *Hispano-Americana* estuvo acompañada por un artículo de difusión, firmado por uno de los primeros doctores formados en el Laboratorio y Seminario Matemático de la JAE, Olegario Fernández Baños (1886–1946), cuya tesis doctoral (1915) desarrolló la parte de la memoria *Fundamentos* de Rey Pastor dedicada a la geometría sintética compleja n-dimensional[46]. Después de ganar una cátedra en la Escuela Industrial de Valladolid, Fernández Baños realizó, becado por la JAE, una estancia en Suiza (1917–18) e Italia (1918–19), este segundo curso en Bolonia junto al prestigioso geómetra Enriques. Enterado de la puesta en marcha de la *Hispano-Americana*, envió a Rey Pastor un breve artículo titulado «Algunas nociones de análisis situs» [18] que el autor presentó del siguiente modo:

> La falta de literatura matemática española que se ocupe de esta teoría, nos induce a la publicación de este artículo de carácter completamente elemental e intuitivo, a fin de ganar algún aficionado a tales estudios.

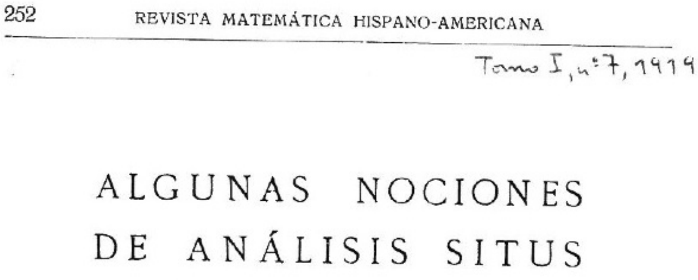
En efecto, este breve artículo, de siete páginas apenas entre las primeras de la nueva revista, era una invitación a interesarse por el tema. Empezó explicando de modo intuitivo la conexión de superficies, enunciando que: «Un área plana conexa de n contornos es múltiplemente conexa de orden n y recíprocamente». En su explicación mencionó la noción de punto interior, para cuyo «concepto riguroso» remitió a la «Teoría de conjuntos de dos o más dimensiones» de Rey Pastor[47]. Luego abordó la idea de la topología como geometría flexible:

[44]Preparado por Rey Pastor y José María Plans (1878–1934), catedrático de Mecánica celeste recién llegado a Madrid. Probablemente las consideraciones acerca de la topología corresponden a Rey Pastor.

[45]Quedó escrito en el primer fragmento que Hadamard era un «matemático intuitivo [que] es analista porque es geómetra y es geómetra porque es físico».

[46]La memoria no estaba todavía publicada cuando se doctoró, y la publicación de su tesis esperó a la de la memoria de su director. Sobre la biografía de Fernández Baños véase [32].

[47]Se refiere a un capítulo del *Resumen* de sus lecciones de Análisis matemático 2.º.



252 REVISTA MATEMÁTICA HISPANO-AMERICANA

Tomo I, n.º 7, 1919

ALGUNAS NOCIONES DE ANÁLISIS SITUS

Figura 6: Título del artículo de O. Fernández Baños.

> Así como en geometría métrica, el movimiento de una figura no altera sus propiedades, [...] decimos que el Análisis situs o Topología estudia las propiedades de las figuras que no varían mediante las deformaciones dichas [sin rotura ni soldadura], esto es, [...] superponibles mediante flexiones y extensiones sin roturas ni dobles.

Tras esta idea, pasó a exponer varios grupos de superficies, topológicamente iguales las de cada grupo pero no las de diferente grupo. Los ejemplos típicos que mostró fueron el cuadrado, la esfera, el plano proyectivo y la banda de Möbius. Como ayuda para comprender las propiedades topológicas del plano proyectivo remitía al lector al primer tomo de la obra de Enriques y su discípulo Oscar Chisini (1889–1967), que acababa de conocer en Italia [17]. Fernández Baños termina dando una idea general de poliedro que cumple la fórmula «$C + V - A =$ Constante», para la que de nuevo remite a la obra ya citada de los italianos, y señalando la importancia que «la clasificación topológica de las superficies [tiene] en el estudio de las curvas algébricas reales». Como referencia para el «lector que desee profundizar en estos estudios» recomienda el artículo de Poincaré de 1895 [35] más sus cinco *Complementos* y el artículo de Dehn y Heegaard en la *Enciclopedia* alemana [8].

Este primer intento de difusión de la topología entre los matemáticos españoles a través de la *Revista Matemática Hispano-Americana* no tuvo seguimiento de momento, pero, unos años después, la propia revista, en su crónica social y en sus secciones científicas, inició una nueva fase en la incipiente recepción de la topología en España de la mano del joven Tomás Rodríguez Bachiller (1899–1980). En este artículo, por su necesaria limitación temporal para que no resulte demasiado extenso, tan solo quedarán relatados los tres primeros años de una actividad que siguió desarrollándose con intensidad creciente más allá de 1925. Fueron los tres primeros años, 1923–25, de la actividad profesional de Rodríguez Bachiller como matemático, licenciado por la Universidad Central desde 1922[48]. De inmediato se

[48]Simultaneaba estos estudios con los de ingeniero de caminos, que terminó en 1924. Véase su biografía [15].

incorporó a las actividades del Laboratorio Matemático de la JAE y a la redacción de la *Hispano-Americana*[49], tras el cambio producido por la marcha de Rey Pastor a Buenos Aires, después de la llegada a la Facultad y al Laboratorio de Plans y José Gabriel Álvarez Ude (1876–1958). En 1923 inició una actividad notable en el ámbito de las relaciones internacionales, utilizando su dominio de idiomas para gestionar contactos con profesores extranjeros, traducir artículos para su publicación en la revista, reseñar trabajos foráneos de publicación reciente, etc. Bajo la dirección de Álvarez Ude, Rodríguez Bachiller desarrolló un tarea intensa en la redacción de la revista, ocupándose en particular de la difusión de la topología[50].

Entre las reseñas publicadas en el volumen de 1923 nos interesa anotar aquí la realizada (pp. 86–89) a un volumen de publicaciones matemáticas de la Universidad de Estrasburgo, del año 1921, que contiene varios artículos de Maurice Fréchet (1878–1973) sobre conjuntos abstractos y topología. A continuación, Rodríguez Bachiller dedica una página a comentar la tesis doctoral, presentada en esa misma universidad francesa, de Louis Antoine (1888–1971) «Sobre el homeomorfismo de dos figuras y de sus entornos» [3]. Más adelante (pp. 200–201) dedicó otra página a reseñar la segunda edición del libro de Hermann Weyl (1885–1955) sobre superficies de Riemann [55], en el que la topología está muy presente para evitar los razonamientos intuitivos hasta entonces habituales. Un par de años después, en 1925 (pp. 112–114), comentó la monografía de Solomon Lefschetz (1884–1972) en la Colección Borel «El Análisis situs y la Geometría algébrica» [30], obra que refleja los dos principales focos de atención en el momento del trabajo matemático de Rodríguez Bachiller. A esta notable actividad difusora de la topología pronto se añadió la enseñanza y la investigación en esta materia; de la primera daremos cuenta, pero la segunda quedará apenas esbozada porque no fue explícita hasta después de 1925.

Rodríguez Bachiller fue elegido por la Facultad de Ciencias de Madrid para disfrutar durante el curso 1923–24 de una pensión en París, para asistir a cursos diversos en el Colegio de Francia y en la Sorbona. Naturalmente siguió varios cursos de muy notables matemáticos franceses, pero ahora nos quedamos con el dado por Lebesgue titulado «Analysis situs». A su regreso a la capital española, la Facultad seleccionó este curso para que lo repitiera durante 1924–25 como actividad extraescolar a celebrar los sábados por la tarde, surgiendo así el primer curso de topología dado en la universidad española. En años sucesivos Rodríguez Bachiller no dejó de impartir este tipo de cursos de topología, de los que daba cuenta resumida en las sesiones periódicas que celebraba la SME, lo que sabemos por las crónicas que de estas reuniones publicaba la revista de la Sociedad. Además de mencionar su existencia, solo en 1925 la *Hispano-Americana*[51] ofreció un breve detalle del contenido del curso:

> En la primera conferencia expuso en conjunto, y mediante ejemplos sencillos, el objeto del Análisis situs o Topología, haciendo una breve historia del origen y desarrollo de estas importantes cuestiones, cada vez más capitales en el estudio de la teoría de funciones.

[49] En la que había participado siendo estudiante con la resolución de problemas propuestos y alguna colaboración como traductor.
[50] Y no solo de topología, pero no nos referiremos ahora a otras cuestiones.
[51] Vol. 7, n.º 4, pp. 71 y 105.

> La segunda conferencia la dedicó a demostrar el teorema de Jordan para polígonos planos.
>
> En las tres siguientes lecciones expuso el Sr. Rodríguez Bachiller las ideas fundamentales de la teoría de conjuntos de puntos que ha de necesitar en ulteriores lecciones, el concepto de representación topológica, demostrando como un recinto poligonal se puede representar de manera biunívova y bicontinua sobre un recinto circular y deduciendo de aquí el concepto de indicatriz de un plano. [...]
>
> Además, [...] detalló la demostración del teorema de Sierpinski [...] demostró el teorema de Jordan, referente a las curvas cerradas homeomorfas con una circunferencia.

El caso de Hadamard no fue único, ni mucho menos. En los primeros años veinte fue frecuente la presencia en España, en Madrid y en Barcelona, de matemáticos y físicos de gran relieve, en cuya venida tuvieron mucha importancia las relaciones personales y las gestiones de Terradas con vistas a la programación de los Cursos Monográficos que venía organizando en Barcelona, desde 1915, en el Instituto de Estudios Catalanes. La visita más estelar fue la de Albert Einstein (1879–1955) el año 1923, en la que Rodríguez Bachiller tuvo un lucido papel [15]. Un año antes, la *Hispano-Americana* preparó el ambiente con un artículo de Einstein divulgador de la teoría (especial y general) publicado en tres entregas. Intercalado con ellas, el número 4 de la revista abría con fotografía y firma de Weyl seguida de una presentación (sin firma) de su trayectoria y obra matemáticas en la que se indicaba que su venida a España era por invitación de Terradas. Impartió en la segunda quincena de marzo un curso titulado «Análisis matemático y el problema del espacio», orientado a la teoría de la relatividad.

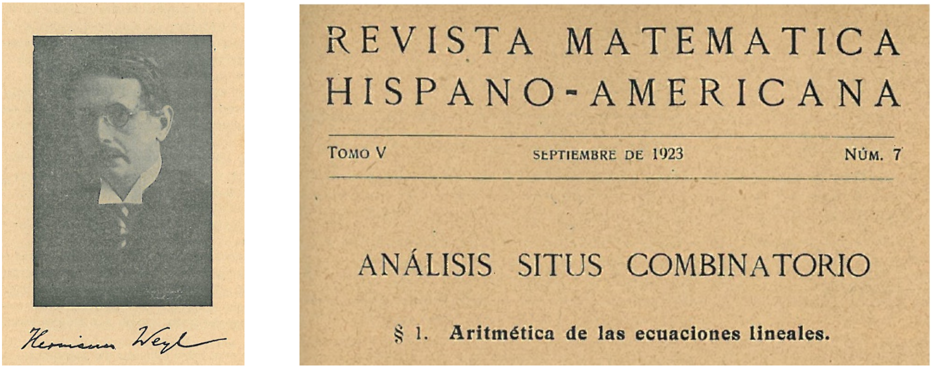
Como consecuencia de este contacto con los matemáticos españoles, Weyl publicó en el volumen de 1923 de la revista de la SME dos artículos de enorme interés para la recepción de la topología: «Repartición de corriente en una red conductora (Introducción al análisis combinatorio)» [56], y «Análisis situs combinatorio» [57], este último en varias entregas, las dos últimas en el volumen de 1924. El primero de ellos se iniciaba así:

> La ciencia del Continuo, el Análisis situs, contiene una parte puramente combinatoria que hoy, gracias sobre todo a los trabajos fundamentales de Poincaré, puede ser estudiada autonómicamente y es susceptible de una exposición sistemática y completa. De este asunto me ocupé en las lecciones del año 18 en la Escuela Técnica Superior de Zürich. [...] Como introducción a estos razonamientos es sumamente apropiado el problema (unidimensional) de la repartición de corriente en una red conductora arbitrariamente complicada, porque nos pone de relieve los conceptos fundamentales que luego pueden ser extendidos al caso de más dimensiones.

El segundo consiste ya en un amplio estudio de los complejos n-dimensionales, precedido de un apartado algebraico porque, dice el autor:

> A la exposición general del Análisis situs conviene hacer preceder las

principales proposiciones de la Aritmética de las ecuaciones lineales con coeficientes enteros y n incógnitas[52].



REVISTA MATEMATICA HISPANO-AMERICANA

TOMO V SEPTIEMBRE DE 1923 NÚM. 7

ANÁLISIS SITUS COMBINATORIO

§ 1. **Aritmética de las ecuaciones lineales.**

Figura 7: H. Weyl en la *Rev. Mat. Hispano-Americana*.

La *Hispano-Americana* había reproducido artículos traducidos que antes habían aparecido en su versión original en revistas del país correspondiente, pero esta vez la aportación que Weyl publicaba en España era inédita. Con motivo de la visita de Einstein a España, la teoría de la relatividad era un tema muy presente en la actualidad científica española del año 1923. Terradas fue uno de los primeros conocedores de esta teoría en nuestro país, Plans también estaba interesado en ella y Weyl contribuyó de modo importante al desarrollo de la misma; pero para la revista española Weyl prefirió entregar artículos sobre la todavía incipiente topología combinatoria en vez del texto del curso impartido[53].

Según contó Beno Eckmann (1917–2008) en una conferencia del año 2004 titulada «¿Es la topología algebraica un campo respetable?», parece que Weyl eligió una revista clandestina para que su artículo pasara desapercibido. La conferencia de Eckmann está publicada en [10, pp. 245–256], donde inicia el apartado «1. Hermann Weyl, 1923/24» con esta pregunta que dirigió a Weyl, a la que sigue el relato por Eckmann de la respuesta del interpelado:

> *¿Por qué publicó sus dos artículos de 1923/24 sobre Topología Algebraica («Analysis Situs Combinatorio») en español y en la Revista Matemática Hispano-Americana, una revista que no era bien conocida y no fácilmente accesible en su tiempo?*
>
> [. . .]
>
> Simplemente Hermann Weyl no quería llamar la atención de estas dos publicaciones, ¡los colegas no las iban a leer! El campo no se consideraba una matemática seria como los campos clásicos Análisis, Álgebra, Geometría.

[52]Con referencia a Leopold Kronecker (1823–1891) expone la reducción de una transformación lineal entre grupos abelianos a la forma canónica diagonal con coeficientes los divisores elementales, poniendo de manifiesto su carácter invariante.

[53]Se lo reservó para publicarlo como libro [58], que dedicó con mucha admiración a Terradas.

Eckmann explica que formuló esta pregunta a Weyl en 1954 cuando este preparaba la *laudatio* para la entrega de las Medallas Fields en el ICM de Amsterdam, con las que se premiaba a J-P. Serre (1926–) y a K. Kodaira (1915–1997), al primero por su trabajo sobre los grupos de homotopía de las esferas, así que, concluye Eckmann, «mientras tanto [veinte años] las cosas deben haber cambiado considerablemente», en lo que a la «corrección matemática» de la topología se refiere. No es este el momento de explicar el contenido de estos artículos españoles de Weyl, baste señalar que Eckmann los calificó como[54] una «presentación ampliamente algebraica, elegante y muy detallada, de la Topología Combinatoria tal como fue descrita por Poincaré en los *Complementos*».

Quizás estos artículos españoles de Weyl causaron sorpresa a Fernández Baños, entonces residente en Santiago de Compostela[55], pues estuvo con Weyl en Zürich durante su primer año de pensionado JAE en Suiza. Según cuenta el propio Fernández Baños en sus memorias, buscaba temas de geometría en los que investigar, pero Weyl le sugirió que con tal fin debía ir a Alemania o Italia, porque él se centraba entonces en problemas matemáticos de las nuevas teorías físicas; fue por eso que Fernández Baños marchó a Italia con Enriques el curso siguiente. Weyl empezó en 1911 a ocuparse del análsis situs en sus trabajos sobre superficies de Riemann y también usaba topología en su trabajos sobre la relatividad, pero no le ofreció a Fernández Baños colaborar en esta actividad, tal vez porque era un momento muy incipiente en su dedicación a este asunto, o tal vez, según el relato de Eckmann, porque como tema autónomo no le parecería valorado y apropiado para tener un pensionado dedicado a ello. Mientras Fernández Baños reorientaba su pensión hacia Italia y le llegaban los permisos pertinentes para el traslado, se ocupó a sugerencia de Weyl de completar un trabajo de Wilhelm Blaschke (1885–1962) sobre problemas isoperimétricos y cuerpos convexos, lo que realizó con éxito publicando su contribución en un artículo en la revista de la Academia de Ciencias de Madrid [19].

Terminaremos el relato del primer cuarto de siglo topológico en España con unas referencias al año final del periodo. Vayan primero algunas alusiones a la topología que aparecen en el volumen de 1925 de la *Hispano-Americana*. En sus primera páginas hay un artículo de tono divulgador escrito por Waclaw Sierpinski (1882–1969) sobre «Funciones y conjuntos», en el que se menciona la topología como el estudio de ciertas transformaciones y sus invariantes. También, en una presentación de Vito Volterra (1860–1940), que visitaba España, el físico-matemático Fernando Lorente de No hizo hincapié en que el matemático italiano era «avezado a los razonamientos del Análisis Situs» que utilizaba en sus estudios sobre ecuaciones diferenciales.

Por último, dejaremos constancia del encuentro de Rey Pastor y Rodríguez Bachiller en torno a la topología, el año en que Rey Pastor reapareció después de su

[54]Y señalar también que en la página web del topólogo Andrew Ranicki se destaca que en ellos «se definió por vez primera (en la última página) la signatura de una variedad $4k$-dimensional». Es curioso que Ranicki, que menciona la anterior anécdota de Eckmann, dice que «el artículo fue escrito en español y publicado en México [sic] . . . », asociando la *Revista Matemática Hispano-Americana* al gran país de la otra orilla del Atlántico.

[55]Desde 1921 era catedrático de Geometría analítica en la Facultad de Ciencias gallega. Desde esta alejada periferia ya iniciaba su dedicación a cuestiones de economía matemática que le llevaron a volver a Madrid convertido en estadístico.

asentamiento en Buenos Aires, todavía provisional pero ya duradero desde 1921. Seguro que coincidieron antes por la Facultad y el Laboratorio Matemático, pero hay constancia documental de que ambos participaron en la sesión celebrada por la SME en marzo, en la que Rodríguez Bachiller hizo una de sus habituales exposiciones dando cuenta de la marcha de su curso de topología y Rey Pastor disertó «acerca del número mínimo de vértices de una curva cerrada y convexa y del fenómeno de Gibbs». Unos meses después, en junio, ambos compartían presencia en el Congreso de la AEPPC en Coimbra (1925), Rey Pastor volviendo a exponer su demostración del teorema de Poincaré, junto con otras dos comunicaciones sobre historia de la matemática ibérica renacentista. Por su parte, Rodríguez Bachiller, distinguido como conferenciante invitado, disertó sobre «Los fundamentos topológicos del Análisis y de la Geometría algebraica»; presentó además cinco comunicaciones, una de ellas sobre el mismo tema (vértices de una superficie) que había ocupado a Rey Pastor en Madrid. Ninguna de estas intervenciones orales, ni la de Rey Pastor ni las de Rodríguez Bachiller, quedaron reflejadas en las actas del congreso. En el segundo cuarto del siglo, estos dos personajes siguieron ocupándose de la topología, campo en el que publicaron trabajos, pero siempre lo hicieron no como especialistas exclusivos sino dentro de una actividad de más amplio espectro en análisis matemático.

Rey Pastor sí publicó en 1925, en la *Hispano-Americana*, un artículo elemental «Sobre la equivalencia de poliedros» [45] de tipo métrico más que topológico, pues su objetivo era dar una demostración, alternativa a las dadas por Dehn y otros, del tercer problema de David Hilbert (1862–1943). Pero es interesante señalar que, como preparación para su prueba, afirmó que

> conviene generalizar el concepto de polígono admitiendo como tales los que tienen dos o más lados consecutivos en línea recta; [...]
>
> Análogamente, si en las aristas de un poliedro se intercalan nuevos vértices, resulta otro con el mismo número de caras, pero mayor número de aristas y de vértices, [...]
>
> Asimismo se pueden intercalar vértices en las caras, uniéndolas con vértices de éstas; [...]

Rey Pastor deja para el lector comprobar que estos polígonos y poliedros generalizados siguen verificando, respectivamente, el valor de la suma de ángulos y la fórmula de Euler, da una caracterización de la equivalencia por descomposición de estos poliedros generalizados y de ella deduce que un cubo no puede ser equivalente a un poliedro regular.

AGRADECIMIENTOS: El proyecto de investigación que ha dado lugar a este trabajo ha sido financiado conjuntamente por la Universidad de La Rioja y el Banco de Santander (API11/05).

REFERENCIAS

[1] I. ÁLVAREZ DE TOLEDO, *Le problème de l'espace*, Paris, F. Alcan, 1920. Reseña de E. Herrera en *Rev. Mat. Hispano-Americana* **3** (1921), 143–144.

[2] E. Ausejo y A. Millán, La organización de la investigación matemática en España en el primer tercio del siglo XX: El Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1915–1938), *Llull* **12** (1989), 261–308.

[3] L. Antoine, Sur l'homéomorphisme de deux figures et leurs voisinages, *Journal Math. Pures et Appl.* **4** (1921), 221–325.

[4] G. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **14** (1913), 14–28. También: Démonstration du dernier théorème de Géométrie de Poincaré, *Bull. Soc. Math. France* **43** (1914), 1–12.

[5] L.E.J. Brouwer, Über den natürlichen Dimensionsbegriff, *J. Reine Angew. Math.* **142** (1913), 146–152.

[6] M. Castellet, Evolución de la Topología en España en la segunda mitad del siglo XX, *La Gaceta de la RSME* **11** (2008), n.º 3, 459–473.

[7] D. van Dalen, *Mystic, geometer and intuitionist: the life of L.E.J. Brouwer*, 2 vols. (1. The dawning revolution; 2. Hope and disillusion), Oxford, Clarendom Press, 1999, 2005. Versión de Springer en 2013: *L.E.J. Brouwer — Topologist, Intuitionist, Philosopher.*

[8] M. Dehn y P. Heegaard, *Analysis situs.* En: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, sección III AB 3, artículo aparecido el 25 de junio de 1907.

[9] J. Dieudonné, *A History of algebraic and differential Topology. 1900–1960*, Boston, Birkhäuser, 1989.

[10] B. Eckmann, *Mathematical Survey Lectures 1943–2004*, Berlin, Springer-Verlag, 2006.

[11] J.J. Escribano, L. Español y M.A. Martínez, El doctorado español en matemáticas entre 1900 y 1921, *Llull* **29** (2006), 37–50.

[12] L. Español, Julio Rey Pastor: Primeros años españoles: hasta 1920, *La Gaceta de la RSME* **9** (2006), n.º 2, 546–585.

[13] L. Español, *Historia de la Real Sociedad Matemática Española*, Sevilla, RSME, 2011.

[14] L. Español, E. Fernández y M.C. Mínguez, La peripecia (1918–1939) de un libro de texto de Julio Rey Pastor: Teoría de las funciones reales. En: M.A. Velamazán, F. Vea, J. Cobos y C. Martín (coords.), *La Historia de la Ciencia y de la Técnica: un Arma Cargada de Futuro. Ensayos en Homenaje a Mariano Hormigón*, Diputación de Cádiz, Cádiz, 2008, pp. 221–235.

[15] L. Español y M.A. Martínez, Hacia la matemática abstracta: Tomás Rodríguez Bachiller (1899–1980), *La Gaceta de la RSME* **13** (2010), n.º 4, 769–795.

[16] L. Español, M.A. Martínez, Y. Álvarez y C. Vela, Julio Rey Pastor y el análisis algebraico: de los apuntes de 1914–16 a tres libros de texto (1917–1925), *Zubía* **28** (2010), 139–166.

[17] F. Enriques y O. Chisini, *Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche*, 3 vols., Bologna, 1915–1924.

[18] O. FERNÁNDEZ BAÑOS, Algunas nociones de análisis situs, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **1** (1919), n.º 2, 252–258.

[19] O. FERNÁNDEZ BAÑOS, Contribución al estudio de los cuerpos convexos de curvatura continua, *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid* **16** (1917), 196–220.

[20] Z. GARCÍA DE GALDEANO, Nota acerca de los poliedros de cuatro dimensiones, *El Progreso Matemático* **2** (1892), 223–229.

[21] Z. GARCÍA DE GALDEANO, *Las modernas generalizaciones expresadas en el álgebra simbólica, las geometrías no euclídeas y el concepto de hiperespacio*, Madrid, 1896. Publicada también en diecinueve entregas de la revista *Madrid Científico* **3** (1896), 145–147; 157–158; 181–182; 193–195; 315–316; 325–326; 337–338; 349–350; 361–362; 373–374; 385–386; 397–399; 414–415; 424–425; 443; 447–448; 462–463; 471–473; 488–492.

[22] J. HADAMARD, Sobre las transformaciones puntuales, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **1** (1919), 169–171.

[23] F. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehere*, Leipzig, Veit, 1914 (reimpresión: Chelsea, 1955).

[24] E.W. HOBSON, *The Theory of functions of a real variable and the Theory of Fourier's series*, Cambridge, CUP, 1907.

[25] M. HORMIGÓN, El Progreso Matemático (1891–1900). Un estudio sobre la primera revista matemática española, *Llull* **4** (1981), 87–115.

[26] I.M. JAMES (ED.), *History of Topology*, Amsterdam, North-Holland (Elsevier), 1999.

[27] C. JIMÉNEZ RUEDA, *Geometría métrica*, 2.ª ed. Madrid, Librería General de Victoriano Suárez,1908.

[28] D.M. JOHNSON, L.E.J. Brouwer's coming of age as a topologist. En: E.R. Philips (ed.), *Studies in the history of mathematics*, The MAA (Stud. Math. 26), 1987, pp. 61–97.

[29] D.M. JOHNSON, The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology I, II, *Archive for History of Exact Sciences* **20** (1979), 97–188; **25** (1981), 85–267.

[30] S. LEFSCHETZ, *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris, Gauthier-Villars, 1924.

[31] J.H. MANHEIM, *The genesis of point set topology*, Pergamon Press, London, 1964.

[32] V. MARTÍNEZ, *Olegario Fernández Baños. Apuntes para una biografía*, Logroño, Gráf. Ochoa, 1995.

[33] J. MCCLEARY, A theory of reception for the history of mathematics. En: D.E. Rowe y J. McCleary (eds.), *The history of modern mathematics*, 2 vols. (1, Ideas and their reception. 2, Institutions and applications), San Diego, Academic Press, 1989, Vol. I, pp. 3–14.

[34] E. Outerelo, *Evolución histórica de la Licenciatura en Matemáticas (Exactas) en la Universidad Central*, Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM, 2009.

[35] H. Poincaré, Analysis situs, *Journal de l'École Polytechnique (2)* **1** (1895), 1–123.

[36] H. Poincaré, *Papers on Topology: Analysis Situs and Its Five Supplements*, traducido por John Stillwell, AMS/LMS, 2010.

[37] H. Poincaré, Sur un théorème de Géométrie, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **33** (1912), 375–407.

[38] J-C. Pont, *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, PUF, Paris, 1974.

[39] J. Rey Pastor, *Introducción a la matemática superior*, Madrid, Corona, 1916.

[40] J. Rey Pastor, *Resumen de las lecciones de Análisis matemático 2.º curso 1915–16*, Madrid, 1916 (apuntes de curso).

[41] J. Rey Pastor, *Fundamentos de la Geometría proyectiva superior*, Madrid, JAE, 1916.

[42] J. Rey Pastor, *Teoría de la representació conforme*, Barcelona, IEC, 1917.

[43] J. Rey Pastor, *Resumen de la teoría de las funciones analíticas y sus aplicaciones físicas*, Buenos Aires, Centro de Estudiantes de Ingeniería, 1918.

[44] J. Rey Pastor, La systématisation de la Géométrie au moyen de la théorie des groupes, *Scientia* **23** (1918), 413–422.

[45] J. Rey Pastor, Sobre la equivalencia de poliedros, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **7** (1925), 255–259.

[46] J. Rey Pastor, *Los últimos teoremas geométricos de Poincaré y sus aplicaciones*, Buenos Aires, Memorias y Monografías de la UMA (Ser. 2.ª, Vol. I, N.º 4), 1945, 44 págs. (También el mismo año como artículo en *Ciencia y Técnica* **104(512)**, 187–224.)

[47] A. Roca Rosell y J.M. Sánchez Ron, *Esteban Terradas. Ciencia y técnica en la España comtemporánea*, Madrid, INTA, Ed. Serbal, 1990.

[48] L. Rougier, *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Paris, F. Alcan, 1920.

[49] A. Schönflies, Mengenlehre. En: *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen*, Leipzig, Teubner, Bd. 1, Teil 1, 1898. (Versión francesa adaptada por Baire: *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.* Tome 1, Vol. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1909.)

[50] A. Schönflies, *Entwickelung der Mengenlehre und ihrer Anwendungen*, Leipzig, Teubner, 1913.

[51] K.G.C. von Staudt, *Geometrie der Lage*, Nürnberg, Verlag der Friedr. Korn'schen Buchhandlung, 1847.

[52] W.I. Stringham, Regular Figures in N-dimensional Space, *American Journal of Mathematics* **3** (1880), 1–15.

[53] E. Torroja, *Tratado de Geometría de la posición y sus aplicaciones a la teoría de la medida*, Madrid, Est. Tip. de G. Juste, 1899.

[54] O. VEBLEN Y J.W. YOUNG, *Projective geometry*, Ginn and Co., Vol. 1, 1910; Vol. 2, 1918.

[55] H. WEYL, *Die Idee der Riemannsche Fläche*, Leipzig, Teubner, 1913.

[56] H. WEYL, Repartición de corriente en una red conductora (Introducción al análisis combinatorio), *Rev. Mat. Hispano-Americana* **5** (1923), 153–164.

[57] H. WEYL, Análisis situs combinatorio, *Rev. Mat. Hispano-Americana* **5** (1923), 209–218, 241–249, 273–279; **6** (1924), 1–9, 33–41.

[58] H. WEYL, *Mathematische Analyse des Raumproblems; Vorlesungen gehalten in Barcelona und Madrid*, Berlin, Springer, 1923.

[59] O. ZAPATER, *Estudio de los poliedroides tetra-dimensionales. Pentaedroide, Octaedroide, Hexaedroide*, Barcelona, Vda. D. Casanovas, 1909.

LUIS ESPAÑOL GONZÁLEZ, DPTO. DE MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN, UNIVERSIDAD DE LA RIOJA, LOGROÑO

Correo electrónico: `luis.espanol@unirioja.es`