BBK-MATIKAK, MATEMATIKAK ESKOLA LIBURUTEGIETAN programarako

BBK-MATIKA EGITARAUA: Pedro Alegría ■ Santiago Fernández ■ Raúl Ibáñez ■ Goyo Lekuona

AURKIBIDEA

Soma Kuboa	4
Nim Jokoa	7
Pentominoen Jokoa	10
Königsbergeko Zubiak	14
Hamabosteko Puzzlea	18
Gurutze-Bakarjokoa	22
Tangrama	26
Tantrix Discovery	30
Hanoiko Dorreak	34
Artzain-Jokoa	37

Edizioa
Fundación **Bilbao Bizkaia Kutxa** Fundazioa

Testuak
Pedro Alegría / Santiago Fernández / Raúl Ibáñez / Goyo Lekuona

Maketazioa eta moldiztegia
Ikeder, S.L.

Real Sociedad Matemática Española

Aurkezpena

Jokoei eta matematikari buruz, Miguel de Guzmán irakasle ospetsuak hauxe esaten zuen:

> *«Matematikak bezala, jokoa arau batzuk sartuta hasten da, objektu edo pieza kopuru jakin bat sartuta, eta horiek jokoan duten zeregina arauek zehazten dute, teoria matematiko bat definizio inplizituz ezartzeko jokatzen den era berberean. Joko baten praktikan sartzen denak arauak ezagutu behar ditu, eta pieza batzuk beste batzuekin lotu behar ditu, matematiketako hasiberri batek teoria bateko lehen elementuak batzuk besteekin konparatu eta elkarri eragin behar dien bezala. Horiek dira joko baten edo teoria matematiko baten oinarrizko ariketak».*

Matematikak eta jokoek sarri-sarri nahastu dituzte beren bideak mendeen joanean. Ikasleen interesa pizteko jokoek duten garrantziaz ziurtasun osoz mintzatu da Martin Gardner dibulgatzaile handia:

> *«Segurtasun osoz, ikasle bat esnarazteko biderik onena jakin-mina eragiten duen joko bat eskaintzea da, edo puzzle bat, magia truku bat, txiste bat, paradoxa bat, izaera matematikoko pareatu bat edo irakasle aspergarriek, arinegitzat dituztelako-edo, erabiltzen ez dituzten beste hogeiren bat gauza».*

Jolas egitea gauzak deskubritzea da, aztertzea, ikertzea… eta, azken batean, ikastea. Horren inguruan Leibniz matematikari handiak zioen jolasa dibertsio hutsa baino gehiago dela; badakigu teoria zientifiko asko jolas bat bezala hasi zirela.

Jolasa oso tresna interesgarria da, eta oinarrizkoa ere bai, bai eskola liburutegi bateko jardueretan, bai edozein ikasgelatako jardun normalean. Jokoak jarduera dibertigarriak dira, eta ikasleek erabat disfrutatzen dute haien garapenarekin, itxuraz eskola materialetik urrunekoak direlako. Hala ere, asmamen eta estrategia jokoek ikasleen pentsamendu logikoaren garapena lantzen laguntzen digute eta, horren jakitun izan gabe ere, berez ohitzen eta, areago, interesatzen dira matematikako kontuekin edo ikasgelan irakasten ari garen gaien erabilera didaktikoarekin.

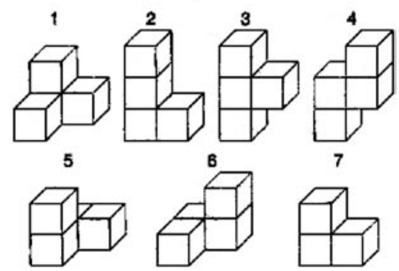
Hori guztiori dela-eta, jokoak *"BBK-matikak, Matematikak eskola liburutegietan"* programaren oinarrizko parte bat dira (eskolaz kanpoko jardueretarako programa orokorraren barruan, Eusko Jaurlaritzaren eta BBKren ACEX programa). Programa horren garapenaren lehenengo urtean zehar programan parte hartu duten zentroetako liburutegiei joko sorta bat eman zaie. Joko hauek, hain zuzen ere: **Soma Kuboa**, **Kataminoa** (**Pentominoen Jokoa**), **Gurutze-bakarjokoa**, **Tangrama** eta **Tantrix Discovery**. Argitalpen honetan dugun asmoa joko horien fitxa didaktikoak ematea da, baita eskola liburutegietako langileei eta irakasleei eguneroko jardunean lagungarri izan dakizkiekeen beste bost jokorenak ere (**Nimen jokoak**, **Königsbergeko Zubiak**, **Hamabosteko Puzzlea**, **Hanoiko Dorreak** eta **Artzain-Jokoa**). Fitxetako bakoitzean jokoaren deskribapena egiten da, jokoaren historia azaltzen da, aldaera batzuk, soluzioa, jarduera didaktikoetarako proposamen bat eta informazio gehiago non bilatu jasotzen da. Fitxa didaktikoak ez dira material zurrun bat, ez dira hitzez hitz jarraitu behar, jolaserako eta irakaskuntzarako iradokizun batzuk dira, liburutegietako langileen, irakasleen edota gurasoen ikuspuntuaren arabera, balio handiko tresna bihur daitezen.

Soma Kuboa

DESKRIBAPENA. **Soma Kuboa** buru-hausgarri geometriko bat da. Zazpi pieza dauzka, eta pieza horiek, aldi berean, kubotxoz osatuta daude. Horiek guztiak batu egin behar dira kubo handiago bat sortzeko.

Soma kuboaren piezekin beste modu batzuk ere sor daitezke, hau da, diseinu geometriko interesgarriak sor litezke, baita diseinu figuratiboak ere. Era horretako milaka figura jasotzen dituzten bildumak daude.

Soma kuboa osatzen duten zazpi figurak zenbaki batekin edo letra batekin identifika daitezke, eta guztiak, bat izan ezik, lau kubo sinplez osatutako formak dira (besteak kuboak ilaran ditu), eta horiei hiru kubo sinplez osatutako figura bat gehitzen zaie:



1.- Tripode formako hiru dimentsioko tetrominoa

2.- L formako tetromino laua

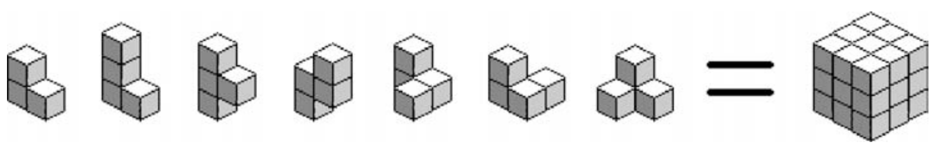
3.- T formako tetromino laua

4.- Z formako tetromino laua

5.- Helikoidal eskuin-birakari formako hiru dimentsioko tetrominoa

6.- Helikoidal ezker-birakari formako hiru dimentsioko tetrominoa

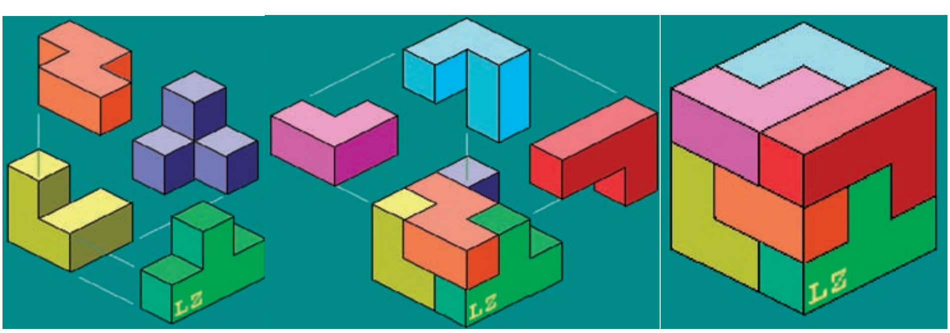
7.- L formako triominoa



HISTORIA. Soma Kuboa Piet Hein poeta, ameslari, matematikari eta jenio daniarrak asmatu zuen 1936an. Diotenez, Heisenberg fisikariaren hitzaldi batean, Hein neurri bereko hainbat kubo batuta lor zitezkeen polikubo ugarien gainean pentsatzen hasi zen, eta egiaztatu zuen lau kuboz edo gutxiagoz osatutako polikubo irregular guztiek, guztira, 27 kubo osatzen zituztela, eta kubo handiago batean bil zitezkeela hiru ertz-kuborekin. Puzzle hau ez zen askorik zabaldu 1969ra arte, hau da, Parker Brosek 'Tangramaren 3Dko erantzun' bezala zabaldu zuen arte.

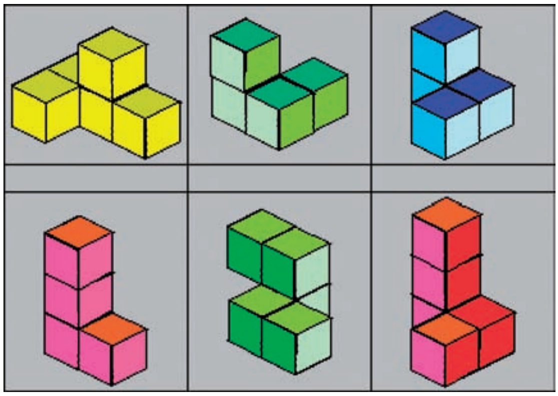
Geroago, John Conway matematikariak konprobatu zuen 3x3x3 kuboa egiteko 240 forma zeudela.

JOKOAREN SOLUZIOA. Hemen, aurreko zazpi piezak kontuan hartuta, 3x3x3 kuboa osatzeko aukeretako bat erakusten dizugu:



ALDAERAK

Ikuspuntu didaktikoari dagokionez, aldaerarik garrantzitsuenen artean STEINHAUSEN KUBOA dago, Mikusinski kuboa bezala ere ezaguna. Kubo honen lehenengo erreferentzia 1950ean Hugo Steinhausek argitaratutako *Mathematical Snapshots* haietan dago. Soma kuboaren oso antzekoa da, baina honako 6 pieza hauek osatzen dute:



JARDUERA DIDAKTIKOAK. Gaur egunean Soma Kuboa ez da soilik denbora-pasa bezala erabiltzen, psikologian, hezkuntza fisikoan, diseinuan, etab. ere erabiltzen da. Matematiketan Soma espazioaren kontzeptuak aurkezteko erabiltzen da, batez ere espazioko orientazio kontuetan. Beste joko batzuek bezalaxe, Soma kuboaren erabilerak adimentsuak materialen manipulazio zehatza, jolas moduan, ideia abstraktuak sortzearekin eta egonkortzearekin erlazionatzeko bidea ematen du.

1. Jarduera. 5. piezaren bi figura berdin hartuz gero, erraz ikus liteke 2x2x2ko kubo bat sor litekeela. Egin al liteke 2x2x2ko kubo berbera Soma Kuboko beste bi figura erabilita?, zeintzuk?

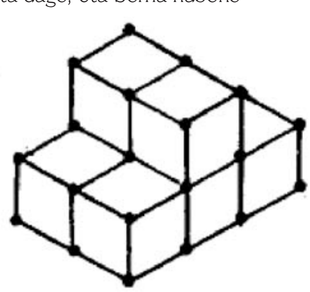
Jarduera hau areagotu egin liteke eta ikasleei 2x2x2ko kubo bat unitateko kubotxo bi figurarekin sortzeko modu guztiak bilatzeko eska diezaiekegu, eta ez derrigorrean Soma Kubokoak. Figurek izan dezaketen unitate-kubotxo kopurua sailkatzeak zehazten du soluzioa.

Lehen hezkuntzako lehenengo ziklotik aurrera egin litekeen jarduera bat da, aukera guztiak konbinatzea eta prestakuntza jarraibideak deskubritzea da asmoa.

2. Jarduera. Ondo begiratuz gero, 5. eta 6. piezak ia berdinak dira. Esango al zenuke zertan bereizten diren?

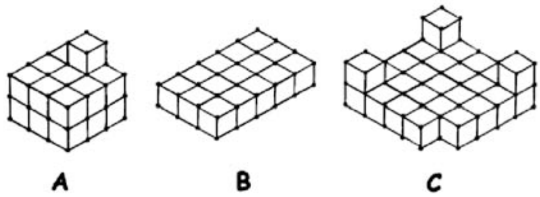
Matematika lengoaian eta simetriaren ezagutzan nolabaiteko zehaztasuna eskatzen duen jarduera bat da; beraz, lehen hezkuntzako hirugarren ziklotik aurrera jartzea da gomendagarria.

3. Jarduera. Jarraian irudikatuta dagoen gorputza 8 kubotxoz osatuta dago, eta Soma kuboko pieza zenbaitekin egin liteke. Aztertu Somako piezak banan-banan eta esan zein piezekin osatu.

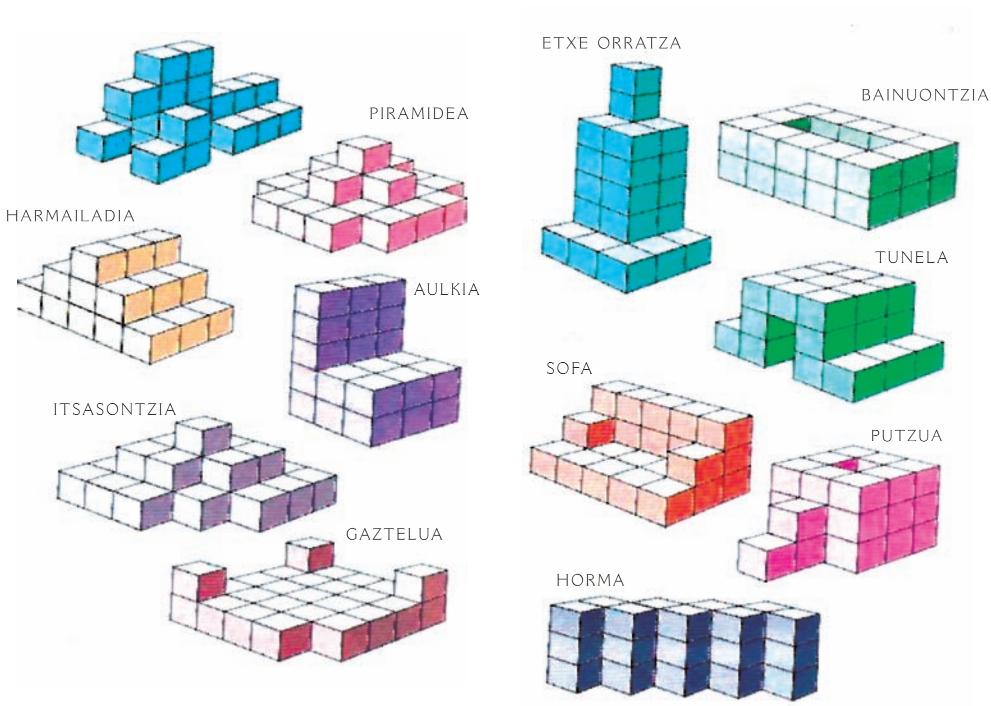


Lehen hezkuntzako lehenengo urteetatik egin litekeen jarduera bat da; lehenengo gerturatze bat soluzioa saiakuntza-errore bidez lortzea da. Lehen hezkuntzako bigarren ziklotik aurrera ekintza gogoetazkoago baten bidez egin liteke, hau da, figura osatzen duten kuboak zenbatuta eta Somako figura egokienekin froga egitea. Ildo horretan legoke hurrengo jarduera ere.

4. Jarduera. Kalkulatu kasu bakoitzean zenbat kubotxo behar diren gorputz bakoitza eraiki ahal izateko; aztertu banan-banan Somako piezak eta aztertu Somako zein piezekin sor litezkeen.



5. Jarduera. Soma kuboko zazpi piezak erabilita, saia zaitez ondorengo formak egiten:



Ikerkuntza jarduera bat da, eta pazientzia, adimena eta zortea behar dira.

Kontuz!! horietako bat ezin liteke egin, badakizu zein?

INFORMAZIO GEHIAGO

On-line jokatzeko: www.mm-softtools.de/cube/somacube.html

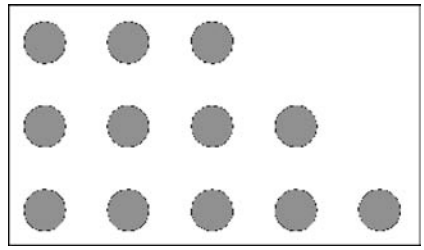
Jarduerak

www.shalafi.org/Puzzles/cubo_soma_figuras.php

www.aulamatematica.com/cubosoma/index.htm

www.fam-bundgaard.dk/SOMA/SOMA.HTM

Nim Jokoa



DESKRIBAPENA. **Nim** bi jokalarirentzako jokoa da. Jolasteko 12 fitxa banatzen dira (txanponak, hariak, botoiak, kartak…), hiru lerrotan (edo multzotan). 3 fitxa lehenengo multzoan jartzen dira, bigarrenean 4 eta hirugarrenean 5. Jokalariek, txandaka, fitxa bat edo gehiago kendu behar dituzte, baina lerro berekoak izan behar dute. Fitxa erretiratzen duen jokalariak irabazten du. Baina alderantziz ere joka liteke, hau da, azken fitxa kentzen duen jokalariak galdu egingo.

Egia esan, Nim jokoan nahi beste lerro eta lerroko nahi beste fitxa jarrita jolas liteke.

HISTORIA. Jolas hau oso zaharra da, eta jatorri txinatarrekoa. Badirudi, antzinako "Tsyanshidzi" jokoarekin dauka harremana. Joko horrek "harriak biltzen" esan nahi du (Wythoffen Nim deritzona bezala). Nim modernoaren jatorria ez da ezagutzen, baina, antza denez, Europan joko honi buruzko lehenengo erreferentziak XVI. mendekoak direla. Izena Charles L. Bouton matematikari iparramerikarrari zor zaio. Matematikari horrek joko honi buruzko azterketa sakona egin zuen 1901ean, eta ziurrenik gaur egun erabiltzen ez den "nim" aditz ingelesetik dator. Aditz horren esangura kentzea edo hartzea da. Alemanez "nimm!" (hartu!).

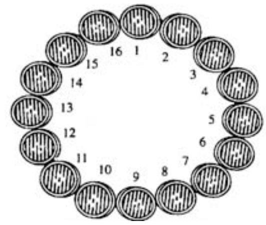
Joko hau oso ezagun egin zen Europan, Alain Resnaisen *Iaz Marienbaden* filmari esker. Bertan, protagonista joko horretara jolasten da Marienbadeko (Txekia) bainuetxean, denbora-pasa legez. Bainuetxe hori oso ezaguna da Europan XVI. mendetik. Filmean lau lerroko Nimean jokatzen da, eta fitxa 1ekin, 3rekin, 5ekin eta 7rekin, hurrenez hurren. Protagonistak beti irabazten du, badaki-eta irabazteko estrategia.

ZELAN JOKATU. Joko honek irabazteko estrategia bat dauka, zenbaki bitarrak erabilita, eta lortzen erraza ez den arren, ulertzea erraza da. Estrategia honen funtsa lerro bakoitzeko fitxa kopurua sistema bitarrean adierazten datza bitar bakoitzean koefiziente kopurua bikoitia izan dadin fitxak kentzea.

1. lerroa:	(3 fitxa)	0	1	1
2. lerroa:	(4 fitxa)	1	0	0
3. lerroa:	(5 fitxa)	1	0	1
Koefizienteen batura		2	1	2

Ikus dezagun. Gure Nim jokorako 3-4-5, 3 sistema bitarrean $(011)_2$ idazten da, 4 $(100)_2$ eta 5 $(101)_2$. Hala, irudiak erakusten duen bezala, posizio bitar bakoitzeko koefizienteen baturak 2, 1 eta 2 ematen digu. Beraz, lehenengo jokalariak irabazteko estrategia ezar lezake lehenengo lerrotik bi fitxa kenduta, izan ere, horrela, parekotasuna 2, 0 eta 2 geratuko da. Bigarren jokalariak, ezinbestean, parekotasun hori hautsiko du bere jokaldia egitean, eta lehenengoak, berriz ere, parekotasuna ezarriko du; eta, horrela, lehenengo jokalariak azken fitxa kentzen duen arte.

Marienbad 1-3-5-7 bertsioa jokatuz gero, hauek dira kopuru horien adierazpen bitarrak: $(001)_2$, $(011)_2$, $(101)_2$ eta $(111)_2$; ondorioz, parekotasuna 2, 2 eta 4 geratuko da, eta, beraz, irabazteko estrategiak bigarren jokalariari balioko dio, izan ere, lehenengoak parekotasuna hautsiko du ezinbestean.

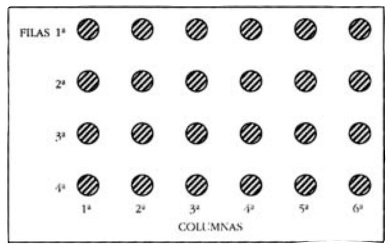


ALDAERAK

1.- *Nim sinplifikatua*. Hau jokalari birentzako joko erraza da. Fitxa multzo batekin hasten da, esate baterako 10 fitxarekin (gehiago ere izan litezke); jokalari bakoitzak, txandaka, fitxa 1 edo 2 kentzen ditu, nahi duen bezala. Azken fitxa kentzen duen jokalariak galtzen du (edo alderantziz ere jolas liteke, hau da, azken fitxa hartzen duenak irabaztea).

2.- *Katea ("bitxilorea" ere esaten zaio)*. Hau Sam Loydek asmatutako joko ugarietako bat da. Zirkuluan fitxa batzuk jartzen dira, 16 adibidez, eta jokalariek, txandaka, bat edo bi kendu behar dituzte, baina bi kentzen badituzte, elkar jotzen duten bi izan behar dute, bata bestearen atzean. Irabazlea azken fitxa kentzen duena izango da.

3.- *Wythoffen Nim*. Joko honetan fitxa lerro bi daude eta jokalari bakoitzak, txandaka, lerro bateko edo bietako fitxak ken ditzake, nahi beste, baina bietatik kenduz gero, fitxa kopuru berbera kendu behar du lerro bakoitzetik.



4.- *Nimbi*. Piet Hein polifazetikoak sortu zuen joko hau; Nimen aldaera bat da berez, baina ez da oraindik irabazteko estrategiarik ezagutzen. Fitxa batzuk jarri behar dira, lauki bat edo laukizuzen bat sortzeko, edozein neurritakoa, adibidez 4 x 6, eta jokalari bakoitzak, txandaka, elkarren ondoko nahi beste fitxa ken ditzake lerro batetik edo zutabe batetik. Azken fitxa kentzen duen jokalariak irabazten du.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

Nim, eta erlazionatutako jokoak, estrategia jokoak dira, eta, beraz, oso erabilgarriak dira ikasleen analisia, pentsamendua eta logika garatzeko, baita arazoak konpontzeko teknika batzuk praktikatzeko ere (saiakuntza-errorea, errazenetik hastea, arazoa bereiztea, simetria…).

1. Jarduera (12 urtetik aurrera). Nim. 1) Lehenengo eta behin ikasleei jolas dibertigarri eta azkar bat bezala aurkezten zaie (minutu bat partidako), eta tarte horretan ikaskideei irabazteko estrategiak bilatu behar dituzte. 2) Irabazteko estrategiak bila ditzaten egoera errazagoak aztertzeko aholkatuko diegu (ikus 2. jarduera).
3) Handik egun batzuetara, sistema bitarra azalduko zaie eskolan, sistema horretan zenbakiak nola idazten diren, sistema bitarren aplikazio batzuk (ordenagailuak, CDak, informazio bidalketa, magia,…). 4) Azkenik, sistema bitarrean oinarritutako irabazteko estrategia azal dakieke, adibide bat baino gehiago landuta.

2. Jarduera (7 urtetik aurrera). Nim. Gazteenekin lantzerakoan, gure iradokizuna da Nimen bertsio erraz batekin egitea, esate baterako 2-3-4 bertsioarekin, eta azken fitxa kentzen duen jokalariak galtzen duen bertsioan. Beste behin ere, oinarrizkoena jokatzea eta beraiek beraienez irabazteko bideak bilatzen saiatzea da. Askotan jokatu ostean, esan dakieke fitxa eskema errazagoak azter ditzatela, adibidez 1) bi lerrotan txanpon kopuru berbera egotea (2 edo 3); 2) txanpon bat lerro batean, bi hurrengoan eta hiru hirugarrenean; ikus dezaten irabazi egingo dutela eskemotako bat uzten diotenean aurkariari. Jarraibide horiekin, lehenengo jokalariak beti irabaziko du, edo bigarrenak irabazteko estrategiaren berri ez daukan norbaiten kontra jokatuz gero. Aparteko jarduera bat honako hau izan daiteke: 2-3-4 kasuan hasierako mugimendu egokia zein den bilatzea beti irabazi ahal izateko (beheko lerroko hiru fitxa kentzea, hain zuzen ere). Interesgarria izango litzateke jarduera honetan ikasleei jokatutako partidak idazteko eskatzea, beraien ondorioak atera ditzaten.

3. Jarduera (8 urtetik aurrera). *Nim sinplifikatua*. Beste behin ere, garrantzitsua da ikasleen lehenengo kontaktua jokatzea izatea. Beraiek berez ez badute irabazteko estrategia zein den deskubritzen, bukaeratik hasteko gomenda diezaiekegu, partida zelan irabaziko luketen ikus dezaten eta partida hasierara arte berregiten joan daitezen. Bigarren jokalariaren irabazteko estrategia da lehenengoak kendu duen kopurua ez den beste kopuru bat kentzea (lehenengoak fitxa bat kentzen badu, bigarrenak bi kendu beharko lituzke, eta alderantziz), horrela, bigarren jokalariak jokatu ostean izango genukeen sekuentzia 7, 4, 1 izango litzateke. Apartekoa: Zer gertatuko litzateke 11 txanpon izango balira? Zer gertatuko litzateke 1, 2 edo 3 fitxa kendu ahal izanez gero?

4. Jarduera (8 urtetik aurrera). Katea. Joko hau oso erraza da, eta simetria ezinbestekoa da irabazteko estrategia lortu ahal izateko. Baina lehenengo, jokatu, jokatu eta jokatu. Irabazteko estrategia aurkariak egin duen ekintzaren simetrikoa egitea da. Lehenengo jokalariak fitxa bat edo bi kenduko ditu, orduan bigarren jokalariak gainerakoetatik erdiko fitxak kenduko ditu, bat kopuru bakoitia geratuz gero eta bi kopuru hori bikoitia izanez gero. Katearen bi zati geratuko dira orduan, eta, hortik aurrera, lehenengo jokalariak bi zatiotako batetik fitxa bat edo bi kentzen dituen bakoitzean, bigarrenak gauza bera egingo du, baina beste zatian.

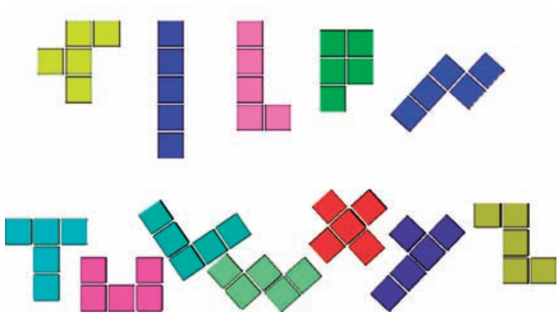
INFORMAZIO GEHIAGO

On-line jokatu: britton.disted.camosun.bc.ca/nim.htm

- El juego y la matemática, Luis Ferrero, La Muralla, 1991.
- Cuentos con cuentas, Miguel de Guzmán, Nivola, 2003.
- Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato, Fernándo Corbalán, Sintesis, 1998.

Pentominoen Jokoa

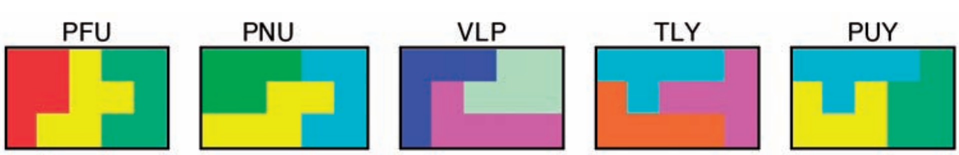
DESKRIBAPENA. **Pentominoen jokoa** buru-hausgarri geometriko bat da, eta piezak (pentominoak deitzen zaie) itsatsitako bost (grekoz penta, horregatik izena) laukiz osatutako figura lauak dira. Ondorioz, gutxienez alde bat komuna dute. Guztira 12 pieza desberdin dira, eta gogoratzeko errazak dira, FILiPiNo hitza eta alfabetoko azken zazpi hizkiak TUVWXYZ buruan gordez gero



Jokoa, funtsean, pieza horiekin figura desberdinak egitea da. Jokorik errazena, 4 urtetik aurrerako ikasle guztientzako egokia, n x 5 (n=3, 4, 5, 6, 7, 8) neurriko laukizuzenak egitea da. Horretarako, jakina, n pentomino erabili behar dira, adibidez hurrengo taulan erakusten den bezala:

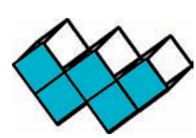
	PENTA 3			4	5	6	7	8
A	L	Y	T	P	W	Z	V	N
B	N	P	U	L	Z	Y	T	W
C	L	V	P	Y	N	U	Z	F
D	Y	P	U	N	V	F	W	T
E	L	N	V	Z	U	T	Y	W
F	P	U	F	Y	T	N	L	W
G	L	V	P	Z	Y	W	N	F

Taula honetan, penta 3ko (3 x 5 laukizuzena) soluzio batzuk erakusten dira.



Goragoko maila batean ere joka liteke, beste forma eta figura batzuk sortuz, esate baterako, 12 pentominoek hartzen duten area osoaren area berdineko laukizuzenak egitea izan daiteke jokoaren helburu.

Aldaera bat da oinarri legez laukiak beharrean bost kubo dituzten piezak erabilita jokatzea. Horrela, soma kuboaren antzeko piezak sortzen dira, esate baterako W piezak sortuko lukeena (alboko irudian).

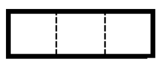
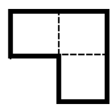


HISTORIA. Pentominoei buruzko lehenengo erreferentzia 1954koa da, eta Hego Karolinako Unibertsitateko Solomon W. Golomb matematikari eta katedratikoari zor diogu. 1957an, Scientific American aldizkariak pentominoei buruzko lehenengo artikulua argitaratu zuen. Harrezkero, joko hau denbora-pasa oso ezagun bihurtu da. Anekdota bezala, esan behar da Tetris jokoaren oinarria pentominoak direla.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

1. Jarduera (8 urtetik aurrera). Lehenengo jarduera izan liteke, behin jokoa deskribatu eta gero, zenbat pieza dituen ikustea, hau da, alde komun bat duten elkarri itsatsitako bost fitxa lauki zenbat eratara lotu daitezkeen asmatzea: 12 pentomino.

Jarduerari ekiteko modu interesgarri bat kasurik errazenetik hastea izan liteke, alegia, zenbat eratara lotu daitezkeen hiru lauki (izan ere, argi eta garbi, 2 fitxa modu bakar batean baino ezin litezke lotu):

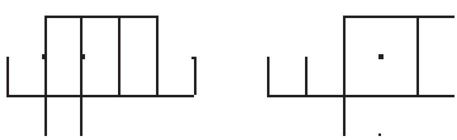
 y 

Ondoren, lortutako bi piezok oinarritzat hartuta, 4 piezarekin zenbat posibilitate dauden aztertzera pasa gintezke (hemen Tetriseko piezekin lotu daitezke), eta, azkenik, pentominoetarako kasuekin bukatu.

Pentominoak sortzeko bost pieza lotzerakoan sortzen diren baliozko piezak lantzeko beste bide bat figura sailkapenak edo familiak egitea izan liteke, ikasleek ematen dituzten balizko soluzioak ordenatzeko (sailkapen bat, esaterako, lerrokatutako gehienezko lauki kopuruan oinarritu daiteke). Ikasleen gaitasunen arabera, simetriei eta errotazioei buruz ere hitz egin daiteke.

Behin maila honetara iritsita, eta kontuan hartuta piezak sortzeko laukietako bakoitzaren azalera azalera-batasuntzat hartzen dugula, 12 pentominoetako bakoitzak 5 unitateko azalera izango du. Hauxe da ikasleei egin diezaiekegun galdera bat: perimetro bera al dute guztiek?

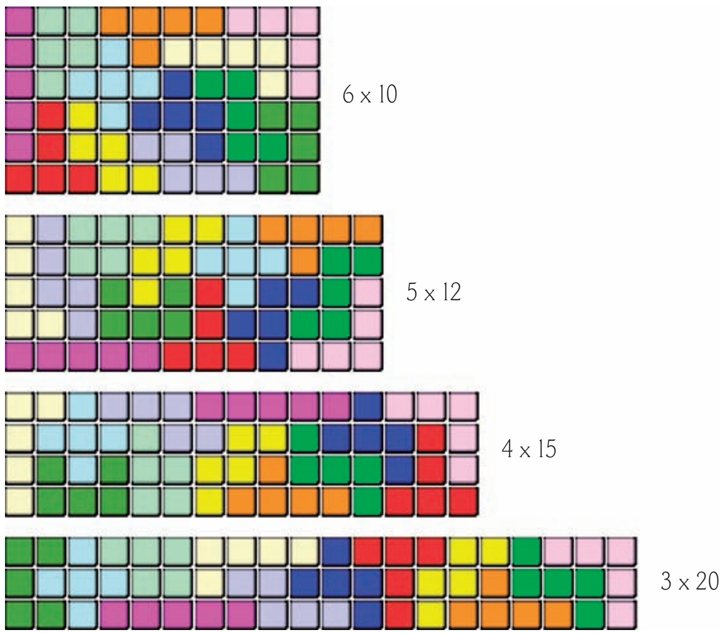
2. Jarduera (8 urtetik aurrera). Ikasleek lor daitezkeen 12 piezak dituztenean, eta kontuan hartuta 5 laukiz osatutakoak direla, argi dago piezetako bakoitza 5 x 5 neurriko azalera lauki baten gainean jar dezakegula. Baina jarduerararen helburua da pentominoen jokoko 12 piezetako edozein har dezakeen azalerarik txikiena bilatzea. Soluzioa, 25 unitateko jatorrizko azalerarekin beharrean, 9 azalera-unitate baino ez dituen batekin lor daiteke. Soluzioak:



3. Jarduera (8 urtetik aurrera). Eman dezagun ikasleek egin dutela dagoeneko 1. jarduera edo badauzkatela aurrean jokoko 12 piezak. Hurrengo jarduera izango da Penta 3 bat (3 x 5 neurriko laukizuzena) eraikitzeko bidea zein 3 piezak ematen duten ikastea eta sailkatzea, gero Penta 4 bat (4 x 5) eta horrela jarraitu daiteke irakasleek interesgarritzat jotzen duten bitartean. Ikusiko den bezala, hasierako taulan kontu honi buruzko erantzun asko ematen dira. Jarduera osatzeko utzi ikasleei beren irudimena erabiltzen eta jokoko piezekin era guztietako objektuak, animaliak… diseina ditzatela.

4. Jarduera (12 urtetik aurrera). Kontuan hartuta pieza guztiak batera jarriz gero, guztira, 60 unitateko azalera daukagula (bost unitateko 12 pieza), egin al genezake, hutusuneak utzi gabe, kutxa laukizuzen bat guztiak gordetzeko. Zein figura har ditzake gordetzeko kutxak?

Ikasleen mailaren arabera, oinarrizko figuren soluzioetako bat eman diezaiekegu, eta eztabaidatu soluzio hori bakarra dela uste duten, soluzio gehiago nola lor daitekeen...



5. Jarduera (12 urtetik aurrera). Jarduera hau apur bat zailagoa/konplexuagoa da. Hiru dimentsiotako pentomino joko bat hartuko dugu (hau da, unitate bakoitza kubo bat alboz jarrita egiten da, laukia beharrean, zeina figura laua baita); eraiki al genezake pieza guztiekin paralelepipedorik hutsunerik utzi gabe? Hona soluzioak: 2x5x6 eta 3x4x5. Horiek 60 bolumeneko figurak ematen dituzte. Hauek dira balizko soluzio bi, lortzeko zailak dira ordea:

			2	x	5	x	6															3	x	4	x	5									
P	P	N	N	N		P	P	L	L	L	L		F	F	V	V	V		X	F	F	P	T		U	F	U	P	P		U	U	U	P	P
W	N	N	X	U		F	F	L	Z	Z	U		X	N	N	N	V		X	L	T	T	T		X	L	L	L	L		I	I	I	I	I
W	W	X	X	X		V	F	F	Z	T	U		N	N	Z	Z	V		X	W	W	Z	T		W	W	Y	Z	Z		W	Y	Y	Y	Y
Y	W	W	X	U		V	F	Z	Z	T	U																								
I	I	I	I	I		V	V	V	T	T	T																								

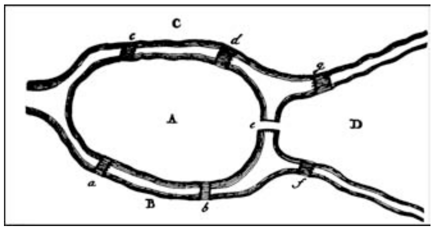
6. Jarduera jarduera (12 urtetik aurrera). Bi jokalarirentzako jokoa. Joko honetan jolasteko 12 pentominoak eta 8 x 8 neurriko taula bat behar ditugu, piezak taula horren gainean jartzeko. Lehenengo jokalariak, zozketaz aukeratua, pentomino bat hartu eta taularen gainean jarriko du, gero bigarren jokalariak gauza bera egingo du, eta txandaka jokatzen jarraituko dute. Irabazlea pentomino bat jartzeko gauza izan den azkena izango da. Aldaera bat jokoa hasi aurretik 12 fitxak jokalarien artean banatzea da.

INFORMAZIO GEHIAGO

- Katamino. Pentominoen jokoaren bertsio komertziala. "BBK-matikak, Matematikak eskola liburutegietan" programaren barruan zabaldu da, eta pentominoekin egiteko moduko puzzle-gida handi bat dauka.
- thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/55_56-2-o-pentomino.html
- On-line jokatzeko: www.yupis.es/juegos/pentamino/#play

Königsbergeko Zubiak

DESKRIBAPENA. Königsberg hirian Kneiphof izeneko uharte bat zegoen, eta Pregel ibaiak inguratzen zuen. Ibai hori bi besotan banatzen zen, eta zazpi zubi zituen (ikus irudia). Hauxe da kontua: egin al liteke ibilbide bat zubi guztietatik pasatzeko, baina zubi bakoitzetik behin soilik pasatuta?



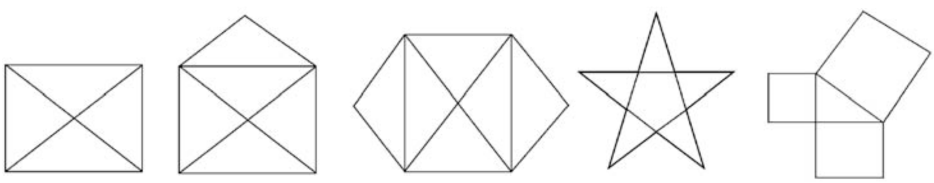
HISTORIA

Diotenez, Prusiako Königsberg hiriko (gaur egun Kaliningrado da eta Errusiarena da) bizilagunen artean oso zabalduta zegoen dibertsio bat zen zubi horietan zehar aipatutako ibilbidea egiten saiatzea. Bizilagun batzuek zioten egin zitekeela eta beste batzuek ezetz, baina inork ere ezin izan zuela soluzioa aurkitu.

Hala ere, Leonhard Euler matematikari bikainak arazoaren konponbidea eman zuen 1735ean, San Petersburgoko Zientzia Akademian aurkeztu zuen "Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis" memoria ospetsuan. Memoria hori matematiketako bi adar oso garrantzitsuren jatorritzat hartzen da, hau da, Topologiaren (Eulerrek "Posizioaren Geometria" deitu zion) eta Grafoen jatorritzat.

ALDAERAK

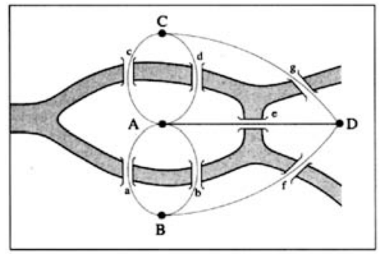
a) *Marra bakarrarekin margotzea*. Irudian agertzen diren moduko irudiak edo bururatu dakizkigukeen beste batzuk marraztu behar dira, baina, marra bakar batekin, hau da, arkatza altxatu gabe, bi bider lerro beretik pasatu gabe eta soberako marrarik egin gabe.



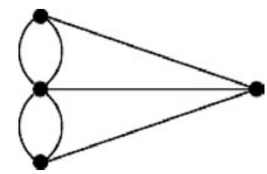
b) *Kimuak*. Bi jokalarirentzako jokoa da. Paper baten gainean jokatzen da, puntu kopuru jakin bat margotuta daukan paper baten gainean (adibidez, hiru). Puntu horiek sare baten korapiloak izango dira. Lehenengo jokalariak puntuetako bi lotu behar ditu, edo puntu bat bere buruarekin, arku batekin, eta beste puntu bat markatu behar du egindako arkuaren erdian. Puntu hori sarearen beste korapilo bat izango da. Gero, bigarren jokalariak gauza bera egingo du eta txandaka jokatuko dute. Bi baldintza hauek bete behar dira: i) arkuek edozein forma izan dezakete, baina ezin dute arkua moztu, ezta beste arku bat ere, eta ezin dira aurreko beste puntu batetik pasatu; ii) beste edozein puntu arku baten ertz bezala erabil daiteke, 3 arkuren ertzak hartzen dituztenak izan ezik (zirkulu batekin ingura ditzakegu jokoz kanpo daudela nabarmentzeko). Jokoaren helburua da beste jokalaria mugimendurik egiteko aukera gabe uztea. Beraz, arku bat margotzea lortzen duen azken jokalariak irabaziko du.

JOKOAREN SOLUZIOA

Königsbergeko zubien problema konpontzeko lehenengo saiakera balizko ibilbide guztiak zenbatzea da, eta banan-banan problema konpontzen duten ikustea. Baina balizko permutazioak asko direnez direnez, ia ezinezkoa da saiakera hori. Ikus dezagun Eulerrek emandako konponbidea.



Lehenengo gakoa garrantzi txikiko elementuak ezabatzea da (abstrakzioa), eta soilik garrantzitsua denarekin geratzea (eredu matematiko bat sortuz). Problema honen oinarrizko datuak probleman azaltzen diren lurraldeak (duten neurria eta forma gorabehera) eta lurraldeok batzen dituzten zubiak dira (dituzten ezaugarri fisikoak gorabehera). Beraz, aurreko maparen ordez sare edo grafo bat erabil liteke, eta lurralde bakoitza puntu (erpin) batez irudikatu da. Zubiak, berriz, puntu horiek lotzen dituzten arkuak dira, irudian agertzen den bezala. Arazoa, beraz, hauxe da: arkatza paperetik altxatu gabe grafoa ezin daitekeela margotu demostratzea, ezta arku beretik birritan pasatuta ere (marra bakar batekin margotzearen arazoa).



Jarraian, eredu matematikoa aztertu behar da, grafoa, eta problema ebazteko behar diren tresnak erabiltzen saiatu. Euler konturatu zen gakoa erpin bakoitzera (gradua) iristen den arku kopurua aztertzean datzal. Horretaz gain, erpin batzuk gradu bakoitikoak zirela eta beste batzuk bikoitikoak zirela ere konturatu zen. Kontuan hartuta erpin batera iritsi ostean, gero horretatik irtenez gero, erpin horretako bi arku izango ditugula, ondorioztatzen da erpin guztiek gradu bikoitia izan behar dutela, hasierako eta bukaerako erpinek izan ezik, erpin berean hastea eta amaitzea eskatzen ez bada behintzat. Azkeneko kasu horretan erpin guztiek izango lukete gradu bikoitia.

Königsbergeko zubien problemari lotutako grafoa aztertzerakoan, ikusten da hiru erpinek 3 gradua dutela eta batek 5 gradua. Erpin guztiak bakoitiak direnez problema ezin da ebatzi.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

1. Jarduera (8 urtetik aurrera). Ikasleei Königsbergeko zubien problema aurkezten zaie, balizko soluzioak bila ditzaten. Adinaren arabera, ibaiaren, uhartearen eta zubien marrazkia zinta itsaskorrez egin liteke ikasgelako zoruan edo klarionaz patioan (areago, oso gazteak badira, fitxak jar litezke "ibilbidean" zehar, eta fitxa horiek biltzeko esan, eta baldintza dela bidean fitxarik ez badago ezin litekeela pasa), edo, besterik gabe, marrazki handi bat emango zaie grafikoarekin, haren gainean lan egin dezaten.

Problema ebazten beraiek bakarrik saiatu ostean, laguntzeko garaia iritsi da. Lehenik eta behin, ikusarazi behar zaie problemako alderdi batzuk ez direla esanguratsuak ebazpenerako, ibaiaren ertzen arteko distantzia esaterako, edo uhartea handiagoa edo txikiagoa izatea, luzanga edo biribila izatea, zubiak estuak edo zabalak izatea, zuzenak edo bihurriak… hau da, azalekoa ezabatu eta funtsezkoarekin geratu behar gara (azal diezakiegu prozesu honi matematiketan abstrakzioa esaten zaiola). Problemarekin lotutako graforа zelan iritsi azalduko zaie, eta grafo hori marra bakar batekin margotu beharreko problema bihurtu dela (hori matematiketan eredu matematiko bezala ezagutzen dena dela esan dakieke). [Zoruan fitxak uzteko bertsioa landu bada, fitxek grafo bat osatzen dutela erakuts dakieke].

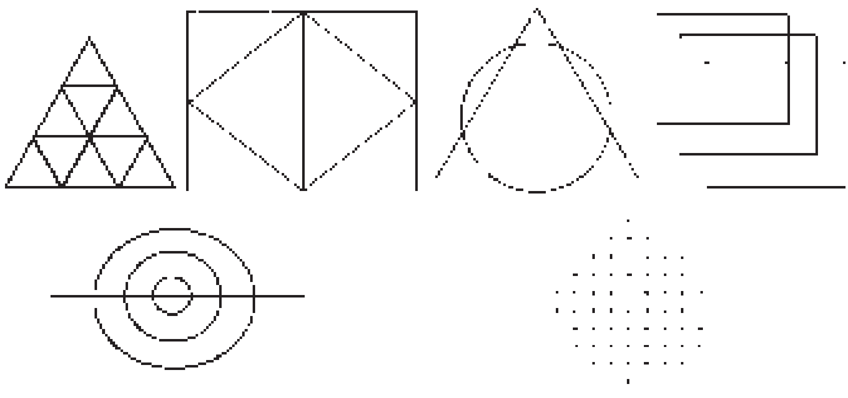
Beste behin ere, beraiek bakarrik egin behar dute Königsbergeko zubiei lotutako grafoa marra bakar batekin margotzeko lehenengo saiakera. Gero, azaldu behar zaie problema, beharbada, ezin daitekeela ebatzi, eta motiboa justifikatzera animatu behar dira. Ebazpena bilatzen ari diren bitartean, apurka-apurka lagunduko zaie, goian emandako azalpenera iristeko.

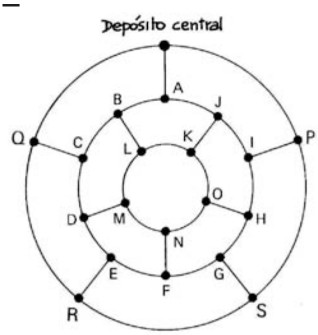
Puntu honetara iritsita, amaitzeko, galdera hauek egin litezke:

a) Kneiphof ibaiko zubiren bat kenduz gero, ba al du soluziorik problemak? Eta zubia gehituz gero?

b) Yakov Perelmanek dio ia Leningrado hiriko parteak lotzen dituzten 17 zubiak gurutza litezkeen (ikus irudia).

c) Margotu marra bakar batekin goian azaltzen diren figurak eta jarraian azaltzen direnak.

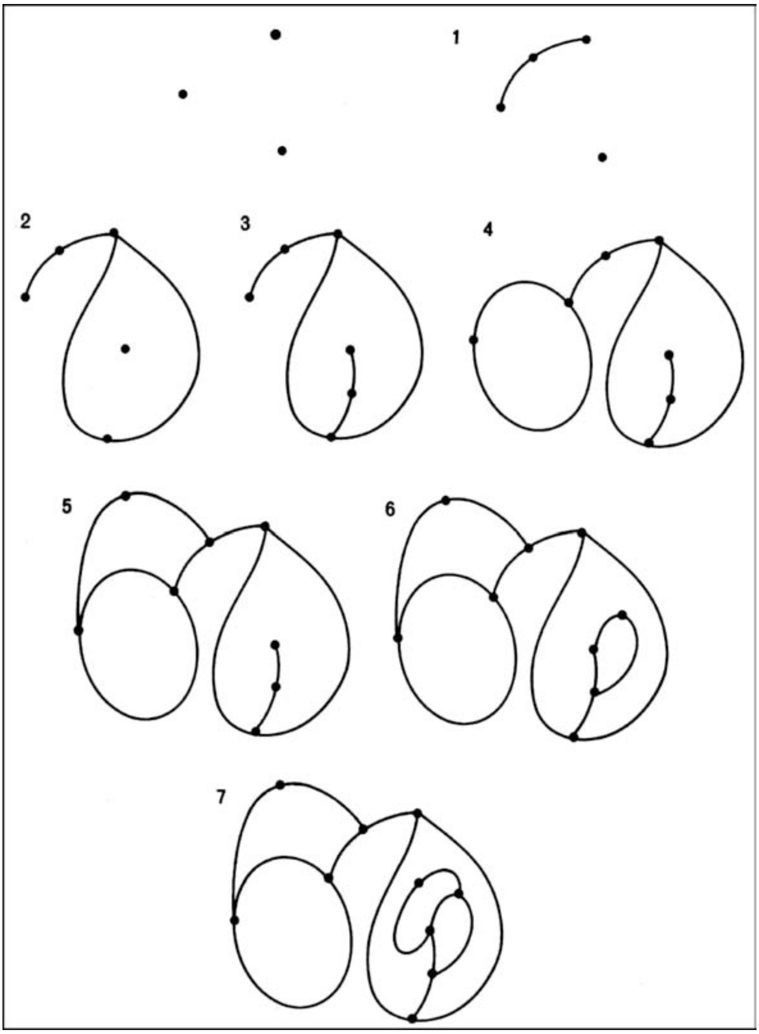




2. Jarduera (8 urtetik aurrera). Zarama biltzea. Hiri handi bateko kale sistema kale zirkularrez eta zeharkako kalez osatuta dago, irudian agertzen den bezala. Kale lotura bakoitzean zarama-edukiontzi bat dago. Erakutsi zarama biltzeko kamioi bateko gidariak, biltegi nagusitik aterata, edukiontzi guztietako zarama bil dezakeela eta biltegira itzuli leku beretik bi bider pasatu gabe.

3. Jarduera (8 urtetik aurrera). Esan ikasleei kimuen jokoan jokatzeko, hiru punturekin, eta utzi denbora (egun batzuk ere bai) diberti daitezen eta beraien kabuz irabazteko estrategiak bila ditzaten. Orduantxe dator jardueretarako garaia. Lehenengo jarduera izango litzateke ikasleei galdetzea zer gertatuko litzatekeen kimuetan puntu bakar batekin hasita jokatuko bagenu: bigarren jokalariak irabaziko luke. Hurrengo jarduera da hasierako bi punturekin izan daitezkeen balizko partidak aztertzeko eta oharrak hartzeko eskatzea, eta bigarren jokalariarentzako irabazteko estrategia bat badagoela erakustea. Hiru puntuko jokorako badago irabazteko estrategia bat lehenengo jokalariarentzat. Aparteko jarduera bat izango litzateke mugimendu kopuru jakin baten ostean jokoa zergatik bukatu behar den azaltzen saiatzea daitezela (jokoa hiru punturekin hasten bada, marrazteko bederatzi arku izango dira, izan ere, puntu bakoitzera hiru arku irits daitezke; baina kontuan hartzen badugu mugimendu bakoitzean bi arku ezgaitzen ditugula eta beste puntu bat gehitzen dela, orduan, mugimendu bakoitzean, arku bat erabiltzeko aukera galtzen dugu eta, beraz, zortzi mugimendu egin ahal izango dira).

Partida baten adibidea:



INFORMAZIO GEHIAGO

Divertimentos Matemáticos, Brian Bolt, Labor, 1988.

- Cuentos con cuentas, Miguel de Guzmán, Nivola, 2003.
- On-line jokatzeko: www.aulademate.com/contentid-200.html

Hamabosteko Puzzlea

15	3	2	4
5	1	10	14
9	11	7	
13	8	12	6

DESKRIBAPENA. Pieza lerradurako jokorik ezagunena da. 4 x 4 neurriko lauki bat da, eta lehenengo hamabost zenbaki naturalak ditu (16a kentzen da).

Zenbakitutako lauki bakoitza bloke lerrakor bat da, eta hutsik dagoen laukira baino ezin da mugitu. Mugimendu bakoitza zenbakitutako lauki bat lauki hutsera mugitzea da. Jokoaren helburua da piezak aurretiaz ezarritako ordena baten arabera kolokatuta geratzea. Ordenatzerik ohikoena piezak zenbaki txikienetik handienera jartzea da, goitik hasita eta ezkerretik eskumara.

Kontuan hartu behar da hasierako posizio guztiek ez dutela soluziorik. Esate baterako, ondorengo figuren posizioak ezin lor litezke batean hasi eta bestean bukatu nahi badugu.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

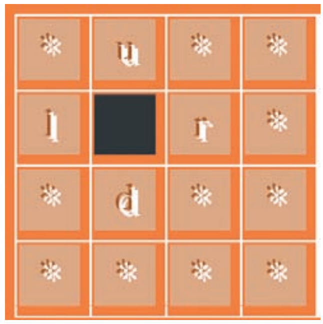
HISTORIA. Puzzlearen asmatzailea Noyes Chapman izan zen (nahiz eta denbora askoan asmakizuna Sam Loydi egotzi izan zaion, adimen problema ugariren eta puzzle askoren egile ezaguna bera).

1870eko hamarkadaren bukaera aldean, puzzleak arrakasta handia izan zuen Estatu Batuetan, eta sukarra berehala zabaldu zen, izurria bailitzan. Europan ere zale ugari izan zituen joko honek, eta edozein bazterretan ikusten zen jendea jokoan buru-belarri sartuta. Lehiaketak eta erronkak berehalako batean hasi ziren puzzle honen inguruan. Honen azalpena da Loydek bere eredua egin zuela hamabost piezak ordenan jarrita, baina azken biak izan ezik, 14.a eta 15.a, zeinak trukatuta jarri zituen. Aurkezten zuen problema zen pieza guztiak ordenan jarri behar zirela, piezak koadroan lerrokatuta soilik.

Lehenengo ebazten zuenarentzat eskaini ziren 1.000 dolarrak ez ziren sekula ere eman; hala ere, jendearengan piztu zen interesaren eraginez hainbat eta hainbat anekdota sortu ziren.

1880an sukarra gorenera iritsi zen, baina berehala baretu zen, Matematikako armak sartu zirenean, hain zuzen ere. Puzzlearen azpian dagoen teoria matematikoak erakutsi zuen aurkez zitezkeen problemen erdiak baino ezin zirela ebatzi, erabilitako estrategia edozein izanda ere. Orduan ikusi zen argi eta garbi lehiaketak antolatzen zituztenek zergatik eskaintzen zituzten hain sari handiak problemak ebaztearren.

JOKOAREN EBAZPENA Ikus dezagun puzzle honetan egin daitezkeen balizko mugimenduak zein diren. Figuran, demagun u, d, l, r, hizkiek hutsik dagoen laukiaren goiko, beheko, ezkerreko eta eskumako zenbakiak irudikatzen dituztela (hutsik dagoena 16. zenbakitzat hartuko dugu), hurrenez hurren, eta * beste edozein zenbaki izango da.



Oinarrizko lau mugimendu daude:

- U = u pieza 16ren lekuan jartzea
- D = d pieza 16ren lekuan jartzea
- L = l pieza 16ren lekuan jartzea.
- R = r pieza 16ren lekuan jartzea.

Puzzlea ebazteko estrategia bat ondorengo urratsak ematean datza:

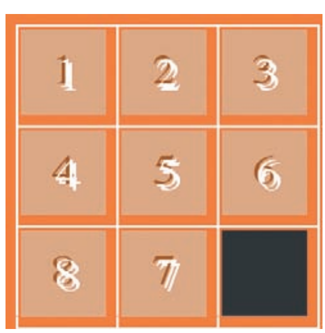
1. Lehenengo lerroa: 1 eta 2 piezak beren lekuan jartzea, gero 4 pieza 3aren lekuan jartzea eta 3a 4aren azpian. Nahikoa da hutsa 4aren lekuan uztea 4a eta 3a beren lekuetara eramateko.
2. Bigarren lerroa: lehenengoa bezala.
3. Hirugarren eta laugarren lerroak: 13 pieza 9aren lekuan jartzea eta 9a haren eskumatara (10aren lekuan). Hutsa 13aren azpian utziz gero, pieza bitzuk beren lekuan jar daitezke eta horrela ezkerreko zutabea osatzen da. Gauza bera egin behar da 10 eta 14 piezekin. Gainerako piezak beren lekuan jartzen dira piezen mugimendu zirkular batekin.

Lagungarri izan liteke lehenengo goiko lerroa eta ezkerreko zutabea ordenatzea ere; horrela, gainerako piezek 3 x 3 neurriko lauki bat osatzen dute.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

1. Jarduera (8 urtetik aurrera). Lehenengo jarduera puzzlea egitea da: 15 kartoi mehe laukirekin eta jasoko dituen euskarri batekin jokoa esperimentatzen has liteke.

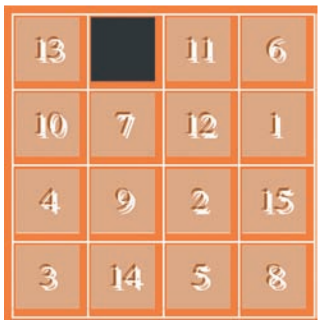
Lehenengo etapa legez 3 x 3ko lauki bat erabil liteke, 1etik 8ra bitarteko zenbakiekin. Jokoak beti soluzioa izateko, pieza bat lauki hutsera lerratu ez ezik, pieza bat beste baten gainetik saltatzea ere baimenduta dago (horizontalean zein bertikalean), hutsik dagoen laukian jausteko. Ondorengo irudian adibide erraz bat proposatzen da: emandako posiziotik abiatuta, jarri piezak ordena naturalean, azaldu berri ditugun arauak jarraituta.



2. Jarduera (8 urtetik aurrera). Beste aukera bat irudi lauki bat 16 piezatan moztu, eta kartoi mehe batean itsastea da. Horietako bat kendu egingo dugu eta gainerako piezak nahasi egingo ditugu. Jokoa da berriz ere jatorrizko irudia berrosatzea, azaldu ditugun arauak jarraituta. Kasu honetan ere, lehenengo eta behin, 9 pieza laukietako irudi bat moztuta has liteke.

3. Jarduera (10 urtetik aurrera). Aldaera erraz bat zortziaren jokoa da: azken lerroko eta azken zutabeko piezak beren lekuan finko utzita, 3 x 3 neurriko lauki bat geratzen zaigu, 1 eta 8 bitarteko zenbakiekin ordena gorakorrean. Zenbaki horien ordena alderantzikatzea da kontua, ordena beherakorrean geldi daitezen. Ebazteko estrategia ulertu eta gero, interesgarria da puzzlea ahalik eta mugimendu gutxienean ebaztea. Horretarako, egindako urratsen kopurua zenbatzea gomendatzen da, eta ibilbidea egokia den egiaztatzen saiatzea.

4. Jarduera (12 urtetik aurrera). Beste aldaera interesgarri bat lauki magiko bat egiten saiatzea da: lerroetako, zutabeetako eta diagonaletako batura beti 30 izan dadin piezak jartzea (hutsak zero balio du). Eredu baliagarri bat ondorengo hau da.



5. Jarduera (12 urtetik aurrera). Puzzlea ebatz daitekeen *a priori* egiaztatzeko problema ere ezar daiteke, konfigurazio jakin bat abiaburutzat hartuta. Jarraian azaltzen den bezala, erantzunaren oinarria da piezen arteko alderantzikatze kopurua zenbatzea.

Mugimendu guztiak itzulgarriak direnez eta mugimenduen edozein segidak I. posizioa (pieza guztiak ordena gorakorrean) edo II. posizioa (pieza guztiak ordenan 14.a eta 15.a izan ezik, horiek trukatuta daudelako) eman dezakeenez emaitza bezala, zenbakien banaketen aldaera guztiak bi mota disjuntutan baino ezin daitezke zatitu.

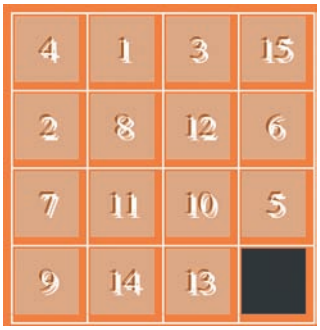
Hala ere, hasierako posizio bat mota batekoa edo bestekoa den jakiteko, nahikoa da piezen arteko alderantzikatze kopurua zenbatzea (ordena naturalean dituzten aldaketak gehi koadro hutsa daukan lerroaren zenbakia). Zenbaki hori bikoitia bada, eredu ebazgarrikoa da, I.ekoa, eta bakoitia bada, eredu ez ebazgarrikoa, II.ekoa.

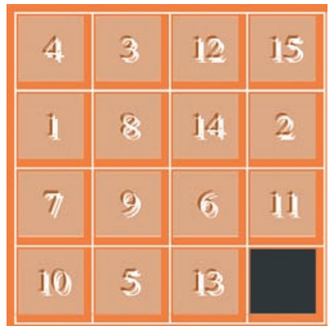
Ikus dezagun zelan zenbatu behar den alderantzikatze kopurua hasierako figuran:

15ak hamalau alderantzikatze ditu, bera baino hamalau zenbaki txikiagoen aurrean dagoelako; 3ak bi alderantzikatze ditu, 1a eta 2a; 2ak alderantzikatze bat du (1a); 4ak alderantzikatze bat du (1a); 5ak alderantzikatze bat du; 10ak lau alderantzikatze ditu (9, 7, 8 eta 6 zenbakiak); 14ak 7 alderantzikatze ditu (atzetik dituen zenbaki guztiak); 9ak bi alderantzikatze ditu (7a eta 6a); 11k hiru alderantzikatze ditu (7a, 8a eta 6a); 7ak alderantzikatze bat du; 13ak 3 alderantzikatze ditu; 8ak alderantzikatze bat du; eta 12ak alderantzikatze bat du.

Guztira, alderantzikatzeak 14+2+1+1+1+4+7+2+3+1+3+1+1= 43 dira. Hutsik dagoen laukia hirugarren lerroan dagoenez, 43+3=46. Zenbaki bikoitia denez, puzzlea ebatz daiteke.

Adibide bezala, parekotasun ezberdina duten bi figura erakutsiko ditugu. Horietako zein den bikoitia eta zein bakoitia aztertu behar da.





INFORMAZIO GEHIAGO

Joko honek makina bat aldaera ditu, guztiak pieza lerradurako buru-hausgarria izen generikoaren azpian, eta hainbat formatutan aurki daitezke. Ordenagailuz ere deskarga liteke doako programa bat, Deslizzzp, Rodolfo Valeirasen orrialdetik:

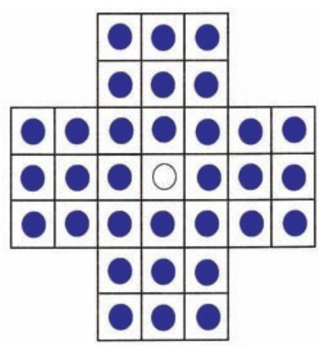
www.rodoval.com/Deslizzzp/Deslizzzp.html

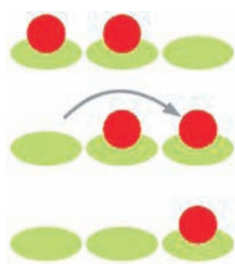
Gurutze-Bakarjokoa

Dame de Qualité Jouant au Solitaire.

DESKRIBAPENA. Denbora-pasa bat da eta, izenak dioen bezala, pertsona bakar batek jokatzeko pentsatuta dago. Herrialde askotan, batez ere Hego Amerikan, Senku izenez ere ezagutzen da. Oinarria taula bateko fitxak jaten joatea da, jauzien bitartez, fitxa bakar bat leku jakin batean utzi arte. Joko honen helburu nagusia estrategiak bilatzea da. Itxura desberdinetako taulak dauden arren, erraz-erraz joka liteke xake taula baten gainean ere, fitxak laukitxoen gainean jarrita.

"Gurutze-bakarjokoan" jokatzeko, 33 laukiko bertsio klasikoan (ikus irudia), 32 fitxa jarri behar dira, eta taularen erdiko laukia hutsik utzi behar da. Jokaldi bakoitzean fitxa batekin ondoko lau laukietako edozeinen gainetik jauzi egin behar da, eta lau fitxa horien aldamenean hutsik dagoen lauki batean erori behar da. Saltatutako fitxa erretiratu egin behar da taulatik. Hala ere, 33 laukiko gurutze-taulari ekin baino lehen, hobe da aurretik beste errazago batzuekin saiatzea, fitxa gutxiagorekin, hurrengo erronketan baliagarri izango zaizkigun estrategiak bilatzeko, hain zuzen ere.

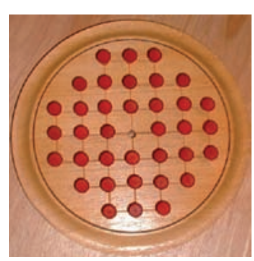




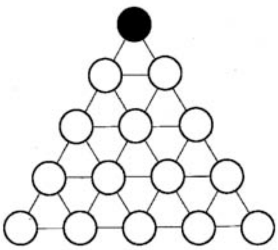
HISTORIA. Bakarjoko hau XVII. mendean asmatu zela diote. Bastillan preso zegoen aristokrata frantziar bat izan ei zen asmatzailea, kartzela-aldia eramangarriagoa izan zedin edo. Jokoak arrakasta izugarria izan zuen Victoria erreginaren Ingalaterran, eta gaur egun ere oso errotuta dago. Gurutze-bakarjokoaren bi bertsio daudela azpimarratu behar da, bertsio ingelesa, gaur egun zabalduen dagoena, eta jatorrizko bertsio frantziarra, 37 laukikoa.

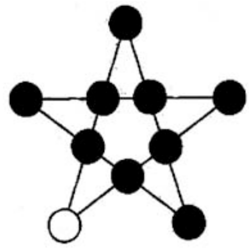
ALDAERAK

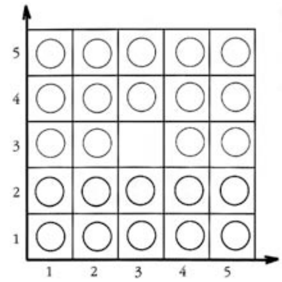
a) *Bastillako bakarjokoa*. Gurutze-bakarjokoarekin, edo bakarjoko ingelesarekin, daukan alde bakarra taula da. Bastillako bakarjokoak 37 lauki ditu, gurutze-bakarjokoaren barruko erpinetan lau lauki sartuta bakarrik. Horrela, jatorrizko joko frantziarraren itxura oktogonala hartzen du.



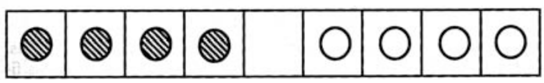
b) *Bakarjokoko taulak*. Joko honen hainbat bertsio daude, taularen itxuraren arabera (hirukiak, laukiak, hexagonalak, izar itxurakoak…).

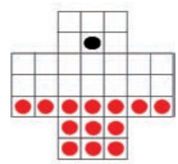






c) *Igelaren saltoa*. Bederatzi laukiko taula lineal bat da oinarria, irudian agertzen den bezalakoa (lauki kopurua hiru, bost, zazpi… ere izan zitekeen). Alde bateko laukietan lau fitxa beltz ditu, gero lauki bat hutsik eta beste aldeko laukietan lau fitxa zuri. Estrategia joko honen helburua fitxa zurien eta beltzen lekua trukatzea da, arau hauek kontuan hartuta: 1) txandaka, fitxa beltz bat eta gero zuri bat mugitu behar dira; 2) fitxak aurre-aurrean dagoen laukira mugitu ahal izango dira, hutsik badago, edo beste fitxa baten gainetik jauzi eginda, horren hurrengoa hutsik badago; 3) aldi berean fitxa baten gainetik baino ezin daiteke egin jauzi; 4) fitxek inoiz ere ezin dute atzera egin.

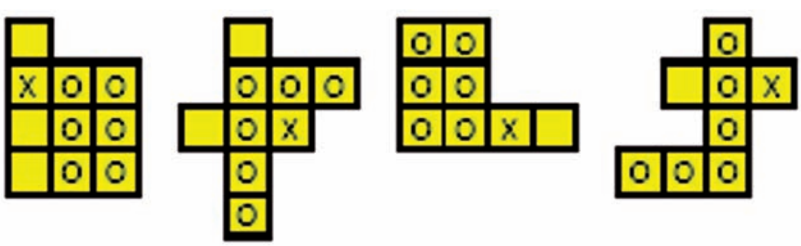




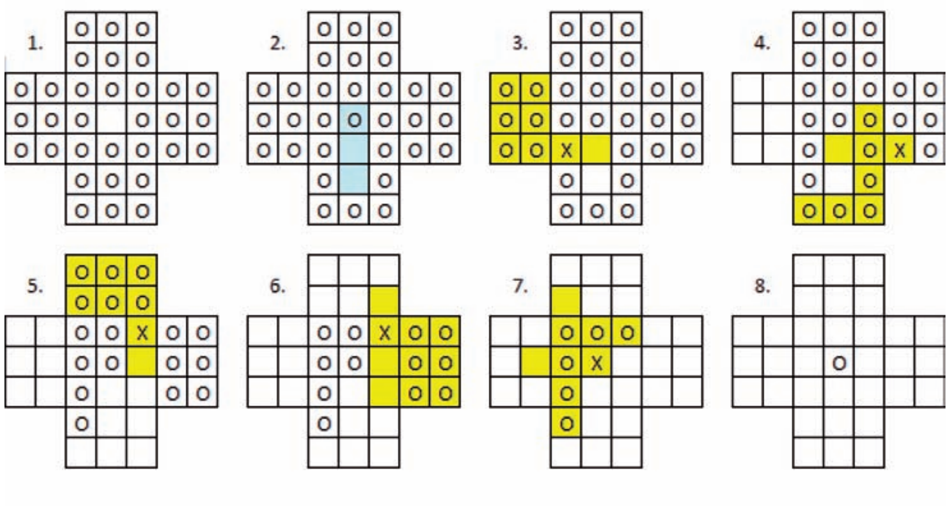
d) *Azeria eta oiloak*. Gurutze-bakarjokoko taula berbera erabil daiteke bi jokalarirentzako joko honetan. Kolore bateko hamahiru fitxa daude (irudikoak gorriak dira), antzarak, eta beste fitxa (beltza) azeria izango da. Irudian agertzen den bezala jarri behar dira. Jokoaren helburua, azeriarentzat, oiloak jatea da, eta oiloentzat azeria inguratzea. Jokalariek txandaka mugituko dituzte fitxak. Azeria edozein norabidetan mugi daiteke (horizontala, bertikala edo diagonala), baina lauki bat bakoitzean, oiloak jateko beraien gainetik jauzi egin behar du, hurrengo laukia hutsik badago (saltatutako fitxa kendu egin behar da), eta bata bestearen atzetik jan daitezke oiloak, dama-jokoan bezala. Hamar oilo janez gero, azeriak irabazten du. Oiloak lauki bat bakarrik mugi daitezke bakoitzean, bertikalean edo horizontalean, eta azeria inguratzeko ibilgetu egin behar dute, hau da, ez diote mugimendurik egiten utzi behar. Lortuz gero, oiloek irabazten dute.

JOKOAREN SOLUZIOA. Joko hau ebazteko, egokiena tarteko diseinuekin hastea da (3. jardueran agertzen diren bezalakoekin), jokalaria joko osoa ebazteko gai den arte. Hemen, bakarjokoaren balizko soluzio bat erakutsiko dugu.

Adibide batzuekin hasiko gara. Abiapuntu bezala fitxak, hutsuneak eta "gakoa" deituko diogun fitxa bat hartuko ditugu. Amaitzeko, fitxa bat geratu behar da posizio horretan, beste fitxa guztiak desagerrarazita. "Gako" fitxaren posizioa X batekin markatuko dugu.



Oinarritzat lau jokaldi horiek erabilita, bakarjokoa ebazteko, hurrengo taula hauek hartuko ditugu erreferentzia bezala.



JARDUERA DIDAKTIKOAK

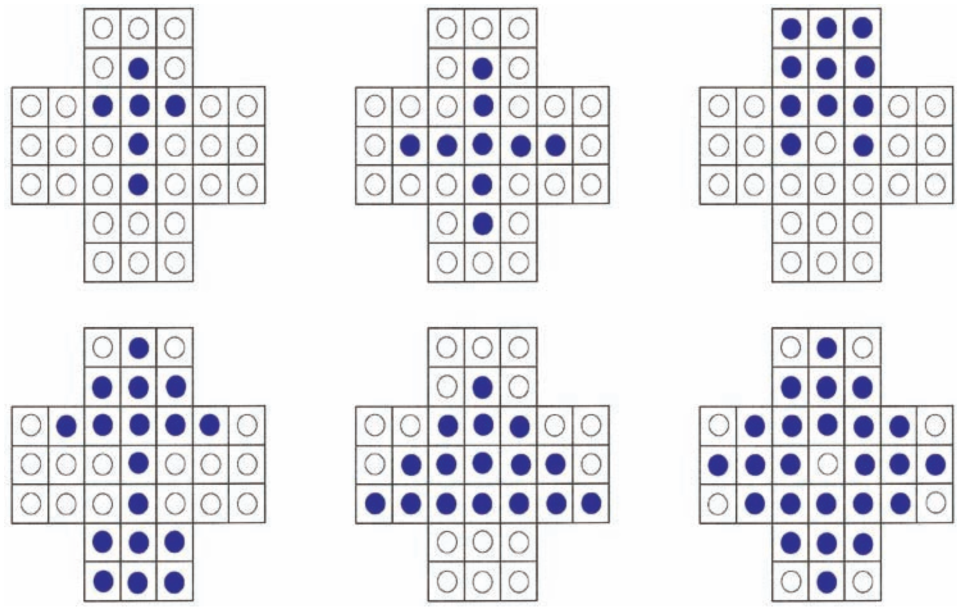
Adin guztietarako jarduera orokor bat izan liteke gurutze-bakarjokoan jokatzeko taula bat eta fitxa batzuk egitea, baita hemen aipatutako beste jokoetan jokatzeko ere. Irakasleek edo liburutegiko langileek ikasleen adinera egokitutako materialak aukeratuko dituzte (kartoi meheak…).

1. Jarduera (6 urtetik aurrera). Igelaren saltoaren jokoa estrategia joko erraza da, lehen hezkuntzako lehenengo urteetatik ikasleekin jokatzeko aproposa.

Lehenengo eta behin, jokoaren berri eman behar zaie beraien kabuz ebazten saia daitezen (gazteenekin, beharbada, zazpi laukiko jokoan jokatzea izango da onena). Beraien kabuz ebazten badute, ederto. Bestela, lagundu egin behar zaie problema sinplifika dezaten esanda, lehenengo jokoaren bertsio errazagoetan joka dezatela, gero eta zailagoak egiten joan ahal izateko. Lehenengo, hiru laukirekin, fitxa beltz eta zuri banarekin. Gero, bost laukiko jokoan, fitxa beltz eta zuri binarekin. Horrela, jokoaren ebazpen orokorra zein den ikasten duten arte.

2. Jarduera (10 urtetik aurrera). Joko hau oso interesgarria da ikasleei aurkezteko, baina beti gogoan izan behar ditugu jokoaren bi helburuak zein diren: –entretenitzea– aurkariari irabazteko estrategiak bilatzea.

3. Jarduera (12 urtetik aurrera). Hurrengo jarduera izango litzateke ikasleei gurutze-bakarjokoa ebazteko eskatzea. Gurutze-bakarjokoaren ebazpen osoari aurre egin ahal izateko, lehenengo fitxa diseinu errazagoei egin behar zaie aurre (horixe da problemaren soluzioaren atalean ematen den ebazpena); horrexegatik eskatzen zaie ikasleei aurretik jarraian erakusten diren moduko diseinuak ebazteko.



Hemen, problema ebazteko, problema sinplifikatzeko metodoa erabiltzeko proposatzen da, jokoa, eta lehenengo errazena ebatzi behar da, gero, apurka-apurka, zailenari aurre egiteko, joko osoari, hain zuzen ere. Problema ebazteko beste aukera bat bukaeratik hastea izan liteke, hau da, problema ebatzita dagoela pentsatzea eta ustez jan ditugun fitxak gehitzen joatea.

INFORMAZIO GEHIAGO

- www.sinewton.org/numeros/numeros/static/almacen_05.php
- El juego y la matemática, Luis Ferrero, La Muralla, 1991.
- On-line jokatzeko: www.mendoza.edu.ar/aninio/juegos/juego/solitario.htm
- Ordenagailura kargatzeko: es.geocities.com/davidalonsogarcia/solitario.zip

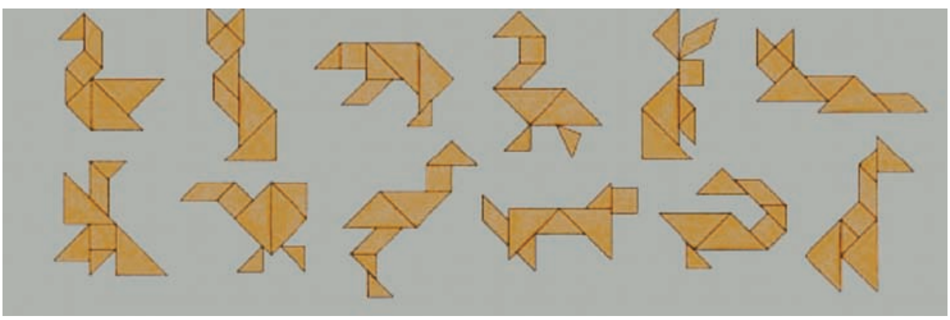
Tangrama

DESKRIBAPENA. Jatorri txinatarra duen joko bat da, oso antzinakoa. Emandako pieza jakin batzuekin, guztiekin, figuren siluetak osatu behar dira. Tans esaten zaien 7 piezekin lauki bat egin dezakegu, hasierako konfigurazioa, hain zuzen ere. Hauek dira piezak:

- Neurri desberdinetako 5 hiruki
- Lauki 1
- Paralelogramo erronboide 1

Tangrama era guztietako pertsonak liluratzeko gauza den puzzle zoragarrietako bat da.

Tangramaren arau klasikoak oso errazak dira: jokoko piezak jarri eta era guztietako formak egin behar dira: geometrikoak, letrak, animalien siluetak, landareak, pertsonak… Hasiera batean, figura bakoitzerako zazpi piezak erabili behar dira, guztiak euskarritu behar dira plano beraren gainean eta ezin dira bata bestearen gainean jarri; eta, horrez gainera, elkar jotzen egon behar dira. Arau erraz horien bitartez nahi beste irudi osa litezke, irudimenak uzten digun beste. Hara hemen horietako batzuk:

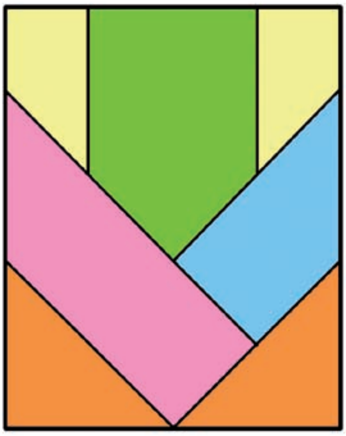


HISTORIA. Tangram hitzaren jatorriari buruzko bertsio asko daude. Horien artean gehien onartzen denetako batek dio hitz hori ingeles batek asmatu zuela, Kantongo "tang" hitza, zeinak txinatarra esan nahi baitu, "gram" hitz latindarrarekin batuta, zeinak idatzia edo grafikoa esan nahi baitu.

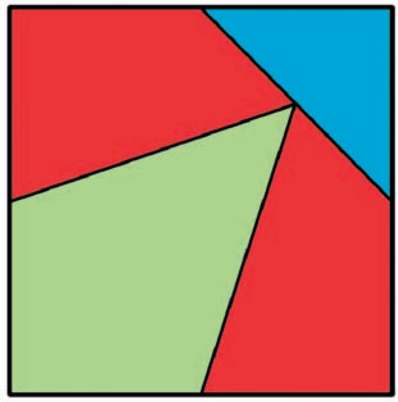
Kondairak dio Txinako enperadore batek beirazko orri lauki bat egiteko agindu zuela, lauki handi bat. Garraiatzen ari zirela, jausi eta zazpi zatitan apurtu omen zen. Zerbitzariek, pieza berregiten saiatu zirenean, ikusi zuten hainbat eratara batu zitezkeela, eta figura geometriko ugari egin zitzaketela. Jauregirako bidea hartu zuten berriz ere, eta txikitutako beirazko orria erakutsi zioten enperadoreari, egin zitezkeen formetako batzuk erakutsiz. Enperadoreari asko gustatu zitzaion oparia. Puzzlea Europan eta Amerikan XIX. mende hasieran zabaldu zen, Txinarekiko merkataritza harremanen ondorioz, eta Txinako buru-hausgarri legez ezagutu zen.

ALDAERAK

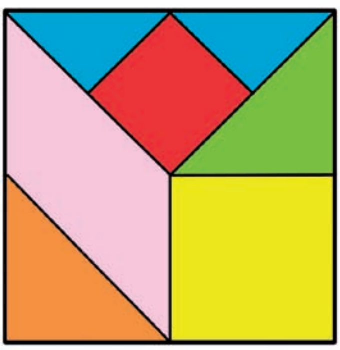
Badaude beste Tangram mota batzuk ere, eta horiek ere oso interesgarriak. Hona hemen esanguratsuenak:



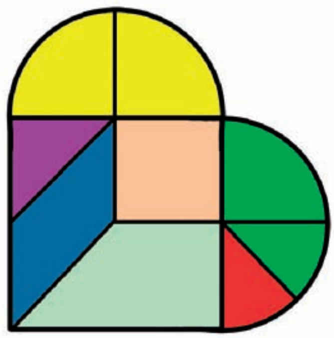
TANGRAM PITAGÓRICO



TANGRAM DE 4-PIEZAS



TANGRAM DE FLETCHER



TANGRAM CARDIODE

JARDUERA DIDAKTIKOAK

Gaur egun, Tangrama ez da soilik denbora-pasa gisa erabiltzen, psikologian, hezkuntza fisikoan, diseinuan… ere erabiltzen da. Matematiken irakaskuntzan Tangrama geometriako kontzeptuak irakasteko erabiltzen da, baita pertsonen gaitasun psikomotoreak eta intelektualak garatzeko ere, izan ere, jolas moduan, materialen manipulazio zehatza ideia abstraktuen formazioarekin eta finkatzearekin lotzen laguntzen du.

Tangramarekin egin litezkeen jarduera ugarien artean, orokor batzuk erakutsiko ditugu: 1) Osatzen duten figura guztiak antzematea; 2) Beste forma geometriko batzuk antzematea; 3) Figura konplexuago batean figura sinpleak antzematea; 4) Figuren siluetak kopiatzea eta Tangrameko figurekin betetzea; 5) Figura geometrikoak sortzea eta deuseztatzea; 6) Paralelismoa eta elkarzutasun kontzeptuak aztertzea; 7) Poligonoak sailkatzea; 8) Poligono ganbilak eta ahurrak eraikitzea; 9) Arearen ideia garatzea; 10) Area edo perimetro berdineko poligonoak aztertzea; 11) Areak neurtzea, batasun bezala hiruki txikia hartuta; 12) Piezak areaka ordenatzea; 13) Area baliokideko figurak aztertzea; 14) Frakzioak aztertzea; 15) Ikasle bakoitzaren sormena garatzea, figura libreak eginez; 16) Pitagorasen teorema egiaztatzea; 17) Antzeko hirukiak aztertzea; 18) $\sqrt{2}$ sartzea.

1. Jarduera. Tangrameko bi pieza hartuta, edozein, figura geometriko egitea eta sailkatzea. Ariketa berbera egin hiru piezarekin.

Bi jarduera horien helburua argia da: piezekin apur bat jolas egitea eta lortzen ditugun forma guztiak antzematea edo ezagutzea. Jarduera hau haur hezkuntzatik bigarren hezkuntzako lehenengo ikasturteetara arte egin liteke. Maila bakoitzeko sakontasun maila desberdina izango da. Jakina, hiru piezarekin figurak egitea zailagoa da, eta hausnarketa eta ezagutza handiagoak eskatzen ditu.

2. Jarduera. Tangrameko zazpi piezekin triangelu angeluzuzen bat egitea.

Jarduera interesgarria da, izan ere, hortik abiatuta baliokidetasun ideia landu daiteke, zazpi piezekin lauki bat osatzeko jarduera klasikoagoarekin lotuta. Jarduera hau lehen hezkuntzako bigarren ziklotik aurrera landu daiteke.

Jarduerara lehenengoz hurbiltzeko, oinarrizkoago beste batzuk proposa daitezke, besteak beste:

- Bi piezarekin lauki bat eraikitzea.
- Bi piezarekin triangelu angeluzuzen bat eraikitzea.
- Bi piezarekin paralelogramo bat eraikitzea.
- Hiru piezarekin triangelu angeluzuzen bat eraikitzea.

3. Jarduera. Tangrameko zazpi piezekin balizko lauki guztiak eraikitzea.

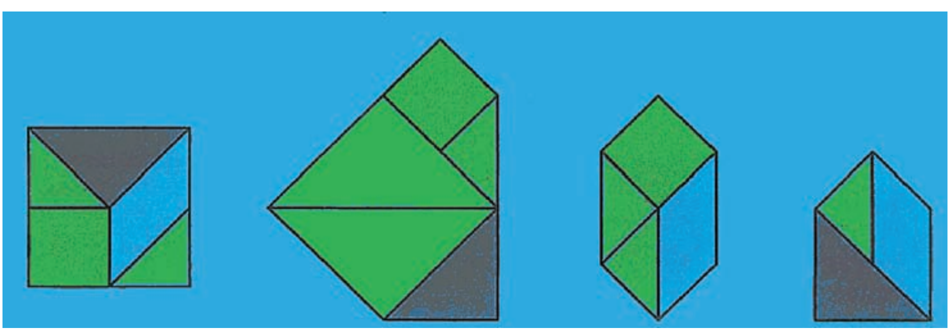
Aurreko jardueran bezala, honetan ere zazpi piezekin jolastu nahi da, kasu honetan era guztietako laukiak aurkitzeko. Komeni da jarduera hau lehen hezkuntzako bigarren ziklotik aurrera egitea. Ikerkuntza jarduera bat da.

4. Jarduera

a) Lauki handia bada area batasuna, laukiaren zein frakzio ordezkatzen du Tangrameko zazpi piezetako bakoitzak?

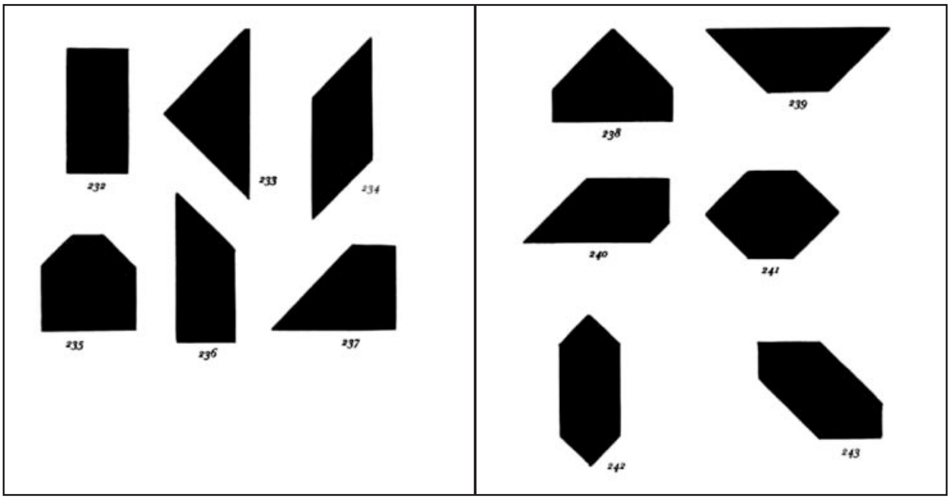
b) Laukiko zein frakzio da ondorengo figuretako bakoitza?

Jarduera hau lehen hezkuntzako azkeneko urteetarako edo bigarren hezkuntzako lehenengo urteetarako pentsatuta dago, eta bere helburua da frakzioaren kontzeptuan sakontzea eta testuinguru geometrikoetan lantzea.



5. Jarduera. Tangrameko zazpi piezekin balizko figura ganbil guztiak eraikitzea.

Jarduera oso interesgarria da, eta figura ganbil bat ahur batetik bereizten lagunduko digu. Bitxikeria bezala, badakigu, gehienez ere, 13 figura ganbil eraiki daitezkeela, hala erakutsi zuten-eta Txinako bi matematikarik 1942an: Fu Tsiang Wang eta Txuan-Txih Hsiung. Hurrengo marrazkian poligono ganbiletako hamabi erakusten dira, 13.a jatorrizko laukia baita.



Beste jarduera batzuk. Aurrekoa bezalako beste ikerkuntza jarduera batzuk:

- Balizko laukizuzen guztiak eraikitzea Tangrameko hiru pieza soilik erabilita.
- Egin al liteke laukizuzenik Tangrameko bi pieza soilik erabilita?
- Egin al liteke hirukirik Tangrameko sei pieza erabilita?
- Tangrameko lau pieza erabilita, laukiak eraikitzea.
- Tangrameko pieza guztiak erabilita, saiatu pentagonoak egiten, ahal dituzun guztiak. Zenbat egin litezke?

INFORMAZIO GEHIAGO

On-line jokatu: www.redestudiantilpr.net/tangram1.htm

- On-line jokatu: www.grandesjuegos.com/juego_swf.php?idjuego=381

- Tangrama eta aldaerak lortzeko: www.uco.es/~ma1fegan/recursos-matematicos/Tangram/Tangram.pdf

Jarduerak:

www.educarm.es/templates/portal/images/ficheros/etapasEducativas/secundaria/3/secciones/129/contenidos/4434/esomate10.pdf/

platea.pntic.mec.es/anunezca/experiencias/experiencias_AN_0607/3_eso/tangram/tangram.htm

Tantrix Discovery

DESKRIBAPENA. **Tantrix Discovery** 10 fitxa hexagonal beltzek osatzen dute, 1etik 10era zenbakituta beheko partean. Fitxa bakoitzaren goiko partean hiru lerro daude, bakoitza kolore batekoa –horia, urdina eta gorria– eta hiru forma posible, zuzenak, kurba irekiak eta kurba itxiak.

Tantrix Discoveryren helburua zirkuitu itxiak egitea da. Jokoa 1., 2. eta 3. fitxekin hasten da, eta hori koloreko zirkuitu bat egin behar da (zirkulua). Fitxak bereizi behar dira, 4. fitxa gehitu eta zirkuitu gorria egin behar da lau fitxekin. Gehitutako fitxa berri bakoitzaren zenbakiaren koloreak adierazten du egin beharreko zirkuitua zein koloretakoa den. Kontuan hartu behar da zirkuitua itxia izan behar dela, eta gainerako koloreen konexioak ere bat etorri behar direla. Gero 5. fitxa (gorria) gehitu behar zaio, eta horrela jarraitu behar da 10. fitxara arte. 10 fitxa baino gutxiagorekin adierazitako koloreko zirkuituak baino ezin daitezke egin (aukera bat baino gehiago dago, esate baterako, zortzi piezarekin balizko 4 diseinu daude), baina 10 fitxekin hiru koloretako zirkuituak eraiki daitezke. Tantrixean hutsunerik uzten ez duten soluzioak hobesten dira.

HISTORIA. Tantrix Mike McManawayk asmatu zuen, Zeelanda Berriko 1991ko Backgammon txapeldunak, eta, harrezkero, jokoa oso ospetsu egin da eta mundu guztian saritu izan dute.

ALDAERAK

a) *Tantrix Game Pack*. Tantrixen joko osoak 56 fitxa ditu, eta, horretan, bideen diseinuari berde kolorea ere gehitu zaio. Joko honetan hainbat eta hainbat bakarjoko egin daitezke, eta hainbat zailtasun maila ditu. Tantrix Jokoa, horrezaz gain, estrategia jokoa ere bada, 2 eta 4 jokalariren artean jokatzeko. Bertan, mosaiko bat egin behar da pieza hexagonalekin, arau batzuen arabera, eta puntuazio sistema bat ere badu.

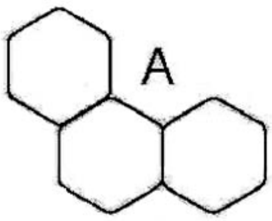
b) *Trax*. Joko hau Tantrix baino lehenagoko estrategia joko bat da, 1980an David Smith zeelandaberritarrak asmatua. Fitxak laukiak dira eta bideak, berriz, zuriak eta gorriak. Fitxa diseinu bat baino ez dago, eta gurutze formako bide zuzenak ditu alde batean eta gurutzatzen ez diren bide kurboak bestean.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

Tantrix joko dibertigarria, erabilgarria eta aldakorra da, baita tresna didaktiko bikaina ere, logika, arrazonamendua, geometria laua, problemen ebazpena, irudimena… lantzeko aproposa delako.

1. Jarduera (5 urtetik aurrera). Sailkapena. a) Bilatu lau fitxa mota desberdinak, lerroen forma kontuan hartuta; b) Mota bakoitzeko zenbat fitxa daude?; c) Fitxa posibleen kopuru osoa, koloreak konbinatuz gero, 14koa da. Bilatu eta margotu paper batean falta diren fitxen diseinua.

2. Jarduera jarduera (5 urtetik aurrera). Jokatu. a) Haurrek, libreki, beraiek nahi dituzten formak edo ereduak eraikiko dituzte (bide irekiak, zirkuitu itxiak, bihotza, bide “espagetiak”…); b) Hasierako posizio sinple bat jarriko zaie, esate baterako, hiru fitxako zirkuitu bat (zirkulua), kolore bakarrekoa, edo lau fitxakoak (obaloa), eta gainerako fitxekin jarraitzeko eskatuko zaie; c) Hiru fitxa jarriko dira, irudian agertzen den bezala, eta hiruren arteko espazioan (A) ahokatuko den fitxa bilatzeko eskatuko zaie; hainbat aldiz jokatu ostean, hiru fitxako posizio bat bilatzeko eskatuko zaie, baina fitxa horien artean laugarren bat sartzea ezinezkoa den posizio bat.



3. Jarduera (8 urtetik aurrera). Jokoa eraikitzea. Materialak: kartoi mehea, erregela, konpasa, arkatza, kartoia, artaziak, margoak.

Lehenengo urratsa, txantiloi hexagonal bat sortzea: kartoi mehearen gainean, konpasarekin, 5 cm-ko erradioko zirkunferentzia bat marraztuko dugu; puntu bat markatuko dugu zirkunferentzia horren gainean, konpasa jartzeko, eta aurreko neurria gordeta beste puntu bi markatuko ditugu zirkunferentziaren gainean. Puntu horiekin ere gauza bera egingo dugu; horrela, sei puntu izango ditugu, eta, arkatzarekin eta erregelarekin puntuak lotuta, hexagonoa izango dugu.

Bigarren urratsa, fitxak egitea: hexagonoak egiteko eredu horrekin, hexagonoak markatu eta moztuko ditugu kartoi mehean.

Hirugarren urratsa, fitxak margotzea: hori, gorri eta urdin koloreko margoekin fitxak margotuko ditugu, goian bideak eta behean zenbakiak (1. jardueran aipatu dugun Tantrixeko 14 fitxak egiteko aprobetxa dezakegu).

Ume txikiei (5 urte) forma hexagonalak eginda dituen kartoi mehe bat eman diezaiekegu, beraiek mozteko eta margotzeko.

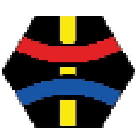

1 (amarillo)


2 (horia)


3 (horia)


4 (gorria)


5 (gorria)


6 (urdina)


7 (urdina)


8 (urdina)


9 (horia)


10 (gorria)


11 (gorria)


12 (horia)

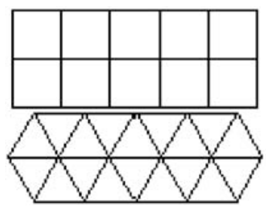

13 (urdina)

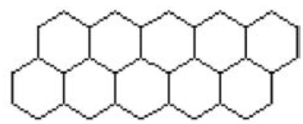

14 (urdina)

[10 piezako Discovery bertsioan 7. pieza gorria da eta 10.ena urdina]

4. Jarduera jarduera (8 urtetik aurrera). Simetriak. Interesgarria izango litzateke ikasleei simetrien gainean hitz egitea (translazioa, biraketa eta islapena). Jokoarekin, egin dituzten bide irekien edo zirkuitu itxien gainean hausnarketa egiteko eskatuko zaie, edo beste diseinu batzuk egiteko, hausnartu eta diseinu berriak egin ondoren aukeratu ditzatela simetrikoak direnak eta horien artean sailka ditzatela biraketak (zein simetriaren ardatzak?).

5. Jarduera (10 urtetik aurrera). Baldosadurak. Aipatu ikasleei poligono erregularrak. Horrez gain, interesgarria izango litzateke gure eguneroko bizitzan zelan parte hartzen duten erakustea.

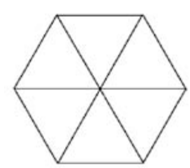




Jarraian, galdetu umeei zein diren lauza txikien balizko formak (poligono erregular itxurakoak eta guztiak neurri berekoak) lurzoru bat baldosatzeko (oso handia dela emango dugu, hormekin arazorik ez izateko edo, matematikariek dioten bezala, infinituraino zabaltzen dena), lauza txikiak alboz albo itsasteko moduan. Ziurrenik hirukiak eta laukiak aipatuko dituzte, gure eguneroko bizitzako parte baitira forma horiek, eta batzuek, beharbada, hexagonoak aipatuko dituzte. Hala ez bada, pista moduan, erleen abaraskak aipatuko ditugu. Ikasleekin jolas egin liteke, inguruan horrelako baldosadurak bilatzeko eskatuta.

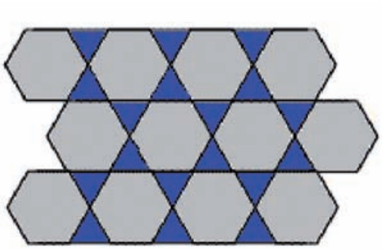
Baina, ba al dago lauza txikiak egiteko forma gehiago? Matematikek erakutsiko digute ez dagoela:

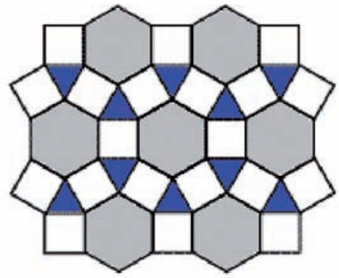
a) poligono erregular baten barruko angeluek neurri hau dute: (n-2)x180º/n gradu (ikasleei azaltzeko, esan dakieke hiruki baten angeluen batura 180º dela, eta n alboko poligono erregular bat n hirukitan zati daitekeela); hiruki alde-berdin baten angeluek 60º neurtzen dute, lauki batenak 90º; pentagonoarenek 108º, hexagonoarenek 120º…

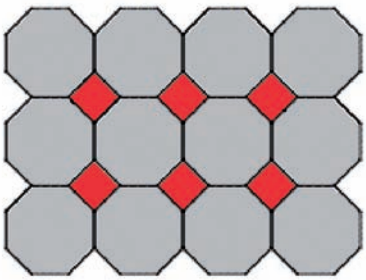


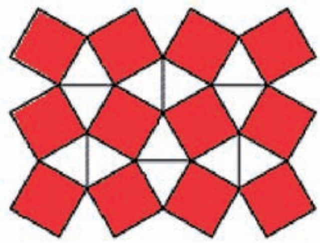
b) mosaikoaren erpin bakoitzean poligono erregular kopuru berbera elkartzen dira, baina, horrez gain, erpin horretan elkartzen diren angeluen batura 360º-koa da; ondorioz, 360º zati erpinean elkartzen den poligono erregular kopurua eginez gero, poligono erregularraren angeluen neurria lor dezakegu, horrela… 360º/2=180º (zeina ez digun poligono batek ere ematen), 360º/3=120º (hexagonoa; hain zuzen ere, mosaiko hexagonalaren irudian ikusten da erpin bakoitzaren inguruan hiru hexagono daudela), 360º/4=90º (karratua; lau karratu daude erpin bakoitzaren inguruan), 360º/5=72º (ez dago poligonorik), 360º/6=60º (triangelua; sei triangelu daude erpin bakoitzaren inguruan), ez dago aukera gehiagorik, izan ere, ez dago 60º baino gutxiago duen poligonorik.

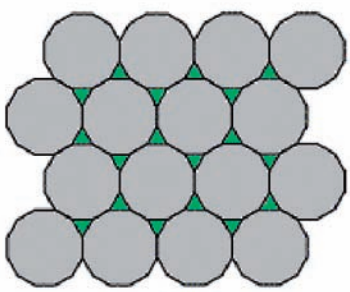
Interesik handiena duten ikasleei galdera hau egin diezaiekegu: plano osoa estaliko duten albo kopuru desberdineko zenbat poligono erregularreko konbinazio egin daitezke (baina, baldintza legez, baldosadurako erpin bakoitzaren inguruan erpinaren irudia berbera izan behar da)? Erpin baten inguruko angeluen baturaren argudio berarekin erakuts daiteke zortzi aukera baino ez daudela, eta, gainera, erraz-erraz kalkula daitezkeela.

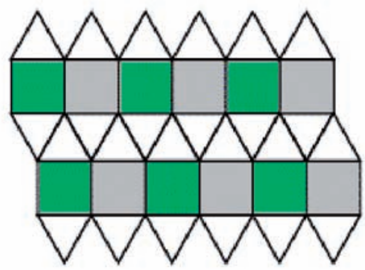


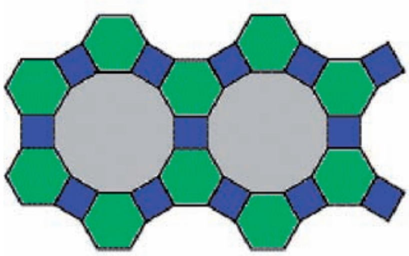


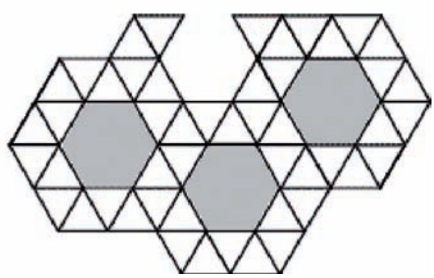












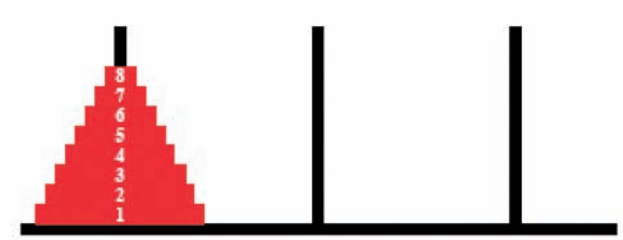
INFORMAZIO GEHIAGO

www.tantrix.com.es

Hanoiko Dorreak

DESKRIBAPENA. Disko multzo batez osatutako dorre bat da jokoaren oinarria –normalena zortzi disko izatea da–. Disko horiek hagatxo baten sartuta daude eta piramide itxura hartzen dute (disko bakoitza hurrengoa baino handiagoa izaten da). Helburua da dorre osoa beste hagatxo batera eramatea, laguntzarako hirugarren hagatxo bat erabilita. Mugimendu bakoitzean disko bat baino ezin daiteke mugi, eta inoiz ere ezin da jarri handiago bat jarri txikiago baten gainean.

HISTORIA. Hanoiko dorrea deritzon puzzlea Édouard Lucas matematikari frantziarrak asmatu zuen 1883an. Matematikari horrek, publizitate eraginetarako, irudi-testu hauek asmatu zituen:



Benaresko tenplu handiko Brahamako dorreak haga bat dauka eta, bertan, kreazioaren egunean, Jaungoikoak urrezko 64 disko sartu zituen, ordena beherakorrean neurriari dagokionez. Disko horiek banan-banan mugitu behar dituzte fraideek beste haga batera, eta beste haga bat ere badute laguntza gisa, baina sekula ere ezin daiteke jarri disko handiago bat txikiago baten gainean. Esaten zuten transposizioa lortuz gero, une horretan, tenplua erori eta lurra desagertu egingo litzatekeela.

JOKOAREN SOLUZIOA. Jokoak oso ondo erakusten du ebazpenerako iterazio metodoa. Ikusiko da soluziorako metodoa ez da disko kopuruaren araberakoa, baina egin beharreko urrats kopurua hazi egiten da esponentzialki.

Soluzio errekurtsiboa. Hiru hagatxoak izendatzeko I (iturria), L (laguntzakoa) eta H (helmuga) sinboloak erabiliko ditugu. Hurrengo soluzio hau ulertzeko eta hobeto antzemateko, disko kopuru txikiko puzzle bat egiten saiatu behar zara, demagun 2, 3 eta, beharbada, 4 diskokoa. Problema ebazterakoan, lehenago edo geroago, beherengo diskoa Itik Hra mugitu beharko da. Une horretan, gainerako diskoak Ln egongo dira neurriaren araberako ordena beherakorrean. Une horretan, problema errepikatu egin behar da, baina disko bat gutxiagorekin, eta I hagatxoa laguntzako hagatxo bihurtuko da eta L hagatxoa iturri hagatxo. Horrela, disko kopurua N bada, problema ebatzita egongo da, hurrengo zereginak zelan egin badakigu:

1. Goiko N-1 diskoak Itik Lra eraman (H laguntza hagatxo gisa erabilita).
2. Beheko diskoak Itik Hra eraman.
3. N-1 disko Ltik Hra eraman (I laguntza hagatxo gisa erabilita).

Ideia hori buruan dugula, mugimendu guztiak ia derrigorrezkoak dira. Ikus dezagun zein diren balizko bi kasuak:

Disko kopurua bakoitia bada, lehenengo mugimenduan diskorik txikiena helmuga hagatxoan jarriko dugu, bigarrena laguntza hagatxoan, txikia bigarrenaren gainean, hirugarrena helmugakoaren gainean, txikia jatorriaren gainean, bigarrena hirugarrenaren gainean, txikia bigarrenaren gainean, eta horrela, hurrenez hurren (konturatu aurreko sekuentziak hiru diskoko problema ebazten duela).

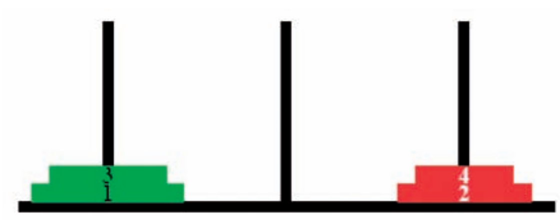
Disko kopurua bikoitia bada, aldatzen den gauza bakarra da disko txikia, hasteko, laguntza hagatxoan jarri behar dela. Beste mugimendu guztiak aurreko kasuko berberak izango dira.

Joko honen bertsio sinpleago bat da ez zehaztea berariaz zein den helmuga hagatxoa. Nahikoa da diskoak beste edozein hagatxora pasatzea, eta hirugarrena laguntza hagatxo bezala erabiltzea. Kasu horretan, ez da kontuan hartu behar disko kopurua bakoitia edo bikoitia den.

ALDAERAK

a) Joko honen aldaera bat *Siva-Vishnúko dorrea* da. Piezak zenbakitu egiten dira handienetik txikienera eta bakoitiak hagatxo batean eta bikoitiak beste batean jartzen dira. Piezak lekuz aldatzea da helburua, baina jatorrizko jokoaren arauak mantenduz.

Jokoa soilik lau pieza erabilita has daiteke, irudian bezalaxe:



b) Beste aldaera bat *Hirutasun Santuaren Dorrea* da, 9 diskorekin. Hagatxo batean sartuta 1-4-7 diskoak jartzen dira, beste batean 2-5-8 diskoak eta hirugarrenean 3-6-9 diskoak. Amaieran, ezkerreko diskoak erdian geratu behar dira, erdikoak eskuman eta eskumakoak ezkerrean.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

Jokoa ebazteko metodoa jakinda, ikusiko da disko gehiago gehitu arren zailtasuna ez dela handitzen. Jarduera hauek proposatzen ditugu ikasleek puzzle honen ezaugarri batzuk ikas ditzaten.

1. Jarduera (8 urtetik aurrera). Puzzlea eraikitzea. Hainbat eratara egin daiteke, neurri desberdinetako txanponak pilatuta eta, hagatxorik gabe, posizio batetik beste batera mugituta. Edo, bestela, kartoi mehez edo kartulinaz, diametro desberdinetako zirkuluak moztuta.

2. Jarduera (10 urtetik aurrera). Puzzlea bi pieza erabilita ebaztea eta egin beharreko urratsak zenbatzea. Gero, ebatzi puzzlea bakoitzean pieza bat gehituta eta kasu bakoitzean behar den urrats kopurua zenbatuta. Ikus al liteke nolabaiteko erlaziorik balio horien artean?

Hauxe da erantzuna: N diskoko puzzle bat ebazteko behar den urrats kopuruari T_N deitzen badiogu, erraz egiazta daiteke

$$T_1 = 1,\ T_2 = 3,\ T_3 = 7 \text{ eta } T_4 = 15.$$

$$\text{Oro har, } T_N = 2N\text{-}1,\ N > 1 \text{ denean.}$$

3. Jarduera (12 urtetik aurrera). Aurreko formula lortu ondoren, galdera hau egin daiteke: segundoko disko bat mugitzen bada, zenbat denbora beharko da puzzlea ebazteko?

Erantzuna, harrigarria bada ere, 8 diskorekin 4 minutu baino gehixeago behar dira, 64 diskorekin, berriz, 585 bilioi urte behar dira. Horrek azaltzen ditu Brahmako dorrearen erronka egiteko behar den denborari buruzko hasierako irudi-testuak.

4. Jarduera (12 urtetik aurrera). Zein unetan mugitzen da lehenengoz (eta hurrengo aldietan) piezetako bakoitza?

Erantzuna da piezarik txikiena mugimendu bakoiti guztietan mugitzen dela, txikietan hurrengoa 4., 12., 20., 28., … urratsetan. Oro har, enegarren pieza (1 txikiena da) lehenengoz 2^{n-1} urratsean mugitzen da eta gero 2^n mugimendu bakoitzeko.

5. Jarduera (12 urtetik aurrera). Zein da disko bakoitzaren mugimendu sekuentzia indibiduala?

Kasu honetan, ikus daiteke pieza bakoitzak eredu zirkular bat jarraitzen duela; hiru hagatxoetatik pasatzen da ordena jakin batean, eta, gero, prozesu bera egiten du.

6. Jarduera (12 urtetik aurrera). Aurrerago aipatutako aldaeretan jokatzea, hau da, Siva-Vishnúko dorrea eta Hirutasun Santuaren dorrea.

INFORMAZIO GEHIAGO

Puzzle hau oso ezaguna da konputazioko ikasleen artean, izan ere, datu egiturei edo algoritmoei buruzko ia sarrera testu guztietan agertzen da. Puzzlearen ebazpenak topiko garrantzitsu bi hartzen ditu, "funtzio errekurtsiboak eta metatzeak" eta "errepikapen erlazioak".

- Hanoiko Dorreetan on-line jokatzeko:

members.shaw.ca/orionx/th/Hanoi.html?English

Artzain Jokoa

DESKRIBAPENA. Bi jokalarik jokatzeko jokoa da karratu itxura duen 3x3 neurriko taula batean. Taula hori paperezko orri batean marraz liteke. Jokalari bakoitzak kolore bateko fitxa batzuk dauzka, esate baterako, lehenengo jokalariak zuriak eta bigarrenak beltzak (paper batean jokalari bakoitzak ikur bat erabiliko du, esate baterako, gurutzeak eta zirkuluak). Hauek dira oinarrizko arauak:

1. Jokaldiak txandaka egingo dira, eta hasteko, zozketa egin behar da.
2. Partida hasten duen jokalariak bere lehenengo fitxa taulako edozein lekutan jarriko du. Gero, beste jokalariak bere fitxa bat jarriko du hutsik dagoen laukiren batean.
3. Jokoak modu berean jarraituko du, jokalari bakoitzak fitxa bat jarri behar du lauki huts batean, harik eta jokalarietako batek bere hiru fitxa lerro berean jartzea lortzen duen arte, lerroan, zutabean edo diagonalean izan.

Jakina, irabazteko estrategia fitxak lerroan jartzen da, baina aurkariak, noski, gauza bera egitea eragotzi behar da.

HISTORIA. Uste da jokoak Txinan duela jatorria. Goren aldaera sinple bat da, hau da, munduko estrategia jokorik zaharrena dela uste denaren aldaera, nahiz eta Europan joan zen mendearen hasieran egin zen ezagun.

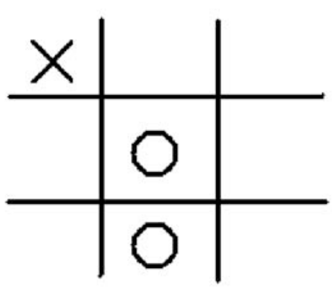
Ingelesez hitz egiten den herrialdeetan *Tic-tac-toe* esaten zaio. Joko honen arauak oso errazak dira eta edonon joka daiteke; horregatik, ziur asko, jokoak lortu duen ospea!

JOKOAREN SOLUZIOA. Jokalari biek estrategia egokia aukeratzen badute, jokoa berdinketaz amaituko da. Beraz, ezinbestekoa da txanda bakoitzean jokaldi egokia aukeratzea eta aurkariaren akatsak igartzea. Irabazteko estrategia eman beharrean, partida ez galtzeko modua zein den azalduko dugu.

Ikus ditzagun balizko bi kasuak:

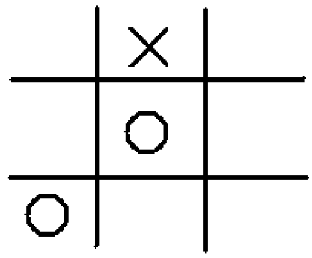
1. Partidako lehen mugimendua egiten duen jokalariak bere fitxa taularen erdian jarri du. Bigarren jokalariak aukera bi ditu:

• Bere lehenengo fitxa izkinetako edozeinetan jartzen badu, lehenengo jokalariak, irabazteko, jarri den azken fitxaren kontrako aldeko lerroaren edo zutabearen erdiko laukian jarriko du fitxa. Kasu horretan, irudi honetan erakusten dugun egoera izango genuke:



Hurrengo jokaldi guztiak partida ez galtzeko jokaldiak izango dira ezinbestean. Jokalari baten edozein akats balia daiteke partida irabazteko.

• Lehenengo fitxa lerro edo zutabe baten erdiko laukian jartzen badu, lehenengo jokalariak partida irabaziko du bigarren jokalariak berea jarri duenaren kontrako lerroaren edo zutabearen ertzean jartzen badu fitxa. Une horretan, egoera irudi honetan agertzen dena izango da:



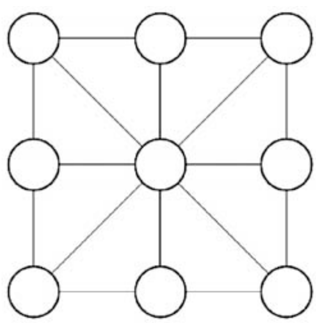
Bigarren jokalariak ezin izango du partida galtzea eragotzi; jokaldi baten edo bitan gertatuko da hori.

2. Lehenengo jokalariak bere fitxa taularen erditik kanpora jarri du. Kasu horretan, ezin izango du partida irabazi, aurkariak akatsik egiten ez badu. Nahikoa da bigarren jokalariak bere lehenengo fitxa taularen erdian jartzea eta hiru fitxa lerroan jartzeko agertzen diren aukera guztiak tapatzea.

Laburbilduz, eta jokalarietako baten okerrik ezean, lehenengo jokalariak lehenengo fitxa erdian jartzen badu baino ezin izango du partida irabazi; bigarren jokalariak berdinketa lortu ahal izango du, bere lehenengo fitxa taulako ertzetako batean jartzen badu.

ALDAERAK

a) *Hiru fitxako artzain-jokoa*. Taula bera da, baina jokalari bakoitzak hiru fitxa baino ez ditu izango. Txandaka jarri behar dira, eta helburua hiru fitxak lerro berean jartzea da.



Horren ostean, eta hauxe da aldaera klasikoarekin duen aldea, norberaren fitxak mugitu egin litezke, hau da, hutsik dagoen aldameneko edozein laukitara, irudiko edozein lerrotan zehar. Bi jokalarietako batentzat irabazteko estrategia lortzea da kontua.

b) *Lau lerroan*. Oso zabalduta dagoen bertsio komertzial bat “ConectaCuatro” izeneko jokoa da. Joko honetan, jokalariek beren fitxak taula bertikal batean sartu behar dituzte. Fitxak bata bestearen gainean eusten dira; ondorioz, ez dago fitxak taulako edozein lekutan jarri ahal izateko askatasunik. Hori dela-eta, irabazteko estrategia ezartzea are zailagoa da.

c) *Bost lerroan*. Paper laukiduneko orri batean joka daiteke bost lerroan egitera. Arauak jatorrizko jokoaren berberak dira, baina ez dago taularen neurriaren gaineko mugarik; partida nahi beste luza liteke, jokalariak nahikoa adituak badira.

JARDUERA DIDAKTIKOAK

Arauak hain errazak direnez, oso garrantzitsua da akatsik ez egitea. Egoera bakoitzean aztertu behar da, batez ere, partida ez galtzeko mugimendua.

1. Jarduera (8 urtetik aurrera). Oro har, aurretik doan jokalariak irabazteko posibilitate gehiago ditu, bederatzi koadro daudelako. Horietatik 5ek irabaztea adieraz dezakete (erdiko koadroak eta lau ertzetakoek); bigarren jokalariak, ostera, 4 baino ez ditu izango. Hala ere, eskarmentu handiko bi jokalarik jokatzen dutenean, goian adierazitako jarraibideak betez gero, batek ere ez du irabaziko; berdinketa izango dute.

Ikasleek behin eta berriz joka dezatela proposatzen da, eta egoera bakoitza eta partida bakoitzaren azken emaitza azter dezatela. Helburua da beraiek ikus dezatela zein den estrategiarik onena, bai lehenengo jokaldia egiten lehenak badira, bai bigarrenak badira.

Txiki-txikitatik ikus dezaketen xehetasun bat da irudia simetrikoa dela. Beraz, itxuraz desberdinak diren posizio asko, benetan, berdinak dira. Simetria horiek aurki ditzaten saiatuko gara.

2. Jarduera (10 urtetik aurrera). Partida batzuk jokatu ondoren, jokoaren goitik beherako azterketa egin genezake, posibilitate guztiak zehazteko eta jokaldi onak eta okerrak aukeratzeko.

3. Jarduera (10 urtetik aurrera). Hiru fitxako artzain-jokoaren jokoa aztertzea. Horretarako, marraztu dagokion irudia paperezko orri batean eta eman jokalari bakoitzari hiru fitxa berdin. Aztertu jokalarietako batek irabazteko estrategiarik izan dezakeen. Aztertu jokoa hasteko posibilitate guztiak. Estrategia on bat taularen erdia lortzea dela ondorioztatzen saiatu.

4. Jarduera (12 urtetik aurrera). Bost lerroan egiteko aldaeran jokatzea. Horretarako, nahikoa da paper laukiduneko orri bat. Jokalari bakoitzak identifikazio ikur bat marraztuko du paper laukidunaren ertz batean. Konturatuko gara kasu hau ez dela aztertzen erraza. Hala ere, posibilitate kopuru handia dagoenez gero, bi jokalariek, adi badaude, irabazteko estrategia bat baino gehiago aurki dezakete.

INFORMAZIO GEHIAGO

- Joko honi buruzko informazio asko orrialde honetan aurkituko duzue:

es.wikipedia.org/wiki/Tres_en_raya.

- "Conecta4" jokoan on-line jokatzeko:

www.aprendejugando.com/juegos/conecta4/index.htm

- "Bost lerroan" jokoaren bertsio erraz bat hemen:

www.yupis.es/juego-YSyp/

Real Sociedad
Matemática Española