Historia

Sección a cargo de

José Ferreirós Domínguez[1]

El Teorema de Fermat y sus Historias

por

Leo Corry

Introducción

La demostración del último teorema de Fermat (UTF) a manos de Andrew Wiles, completada en 1994, fue uno de los logros matemáticos más prominentes de finales del siglo pasado, y sin duda uno de los eventos científicos que recibió la mayor atención de los medios de comunicación y del público general. No todos los días se resuelve un problema que ha estado abierto por más de 350 años y no todos los días se reporta el trabajo esotérico de un matemático puro en la primera plana del *New York Times*.

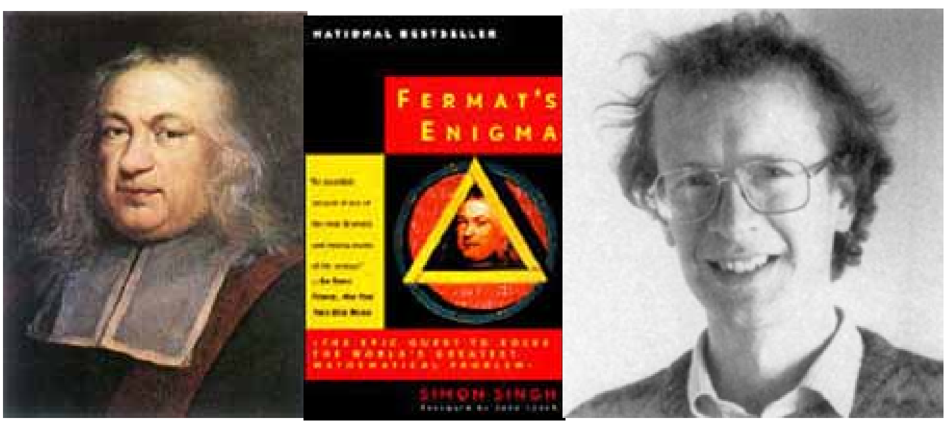
En el margen de su copia de la *Aritmética* de Diofanto, Fermat había anotado su resultado: No es posible escribir un cubo como suma de dos cubos o una cuarta potencia como suma de dos cuartas potencias, y en general, no es posible que un número que es una potencia mayor de dos se escriba como suma de dos potencias del mismo tipo. "Tengo una demostración realmente extraordinaria de este hecho -agregó- pero los márgenes del libro son demasiado estrechos para contenerla". La prueba de este resultado tan fácil de enunciar resultó ser tremendamente escurridiza y habría que esperar hasta 1994 para llegar a ella usando técnicas muy sofisticadas. Con toda seguridad no fue ésta la prueba que Fermat pensó tener.

La cobertura mediática y popular del trabajo de Wiles y de UTF ofrecieron al público no matemático una oportunidad sin precedentes para conocer más

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: José Ferreirós Domínguez; Departamento de Filosofía y Lógica, Universidad de Sevilla; C/ Camilo José Cela, s/n; 41018 – Sevilla; Correo electrónico: josef@us.es

de cerca el arcano mundo de la investigación en este campo en general y en la teoría de números en particular. Nadie mejor que Simon Singh llevó la batuta en este esfuerzo de popularización que se manifestó ante todo en el programa televisivo de la BBC (junto con John Lynch) y en su best-seller *El Enigma de Fermat*. La carátula del libro nos anuncia que se trata del "mayor problema matemático del mundo" ("the world's greatest mathematical problem"). En el *website* de Singh, así como en otros lugares, podemos leer que el problema ha obsesionado y hasta atormentado a los matemáticos durante siglos en lo que constituye de una de las más fabulosas ("greatest") historias imaginables[2]. Se nos dice que Euler, el más destacado matemático del siglo XVIII, "tuvo que admitir derrota" en sus intentos. Además:

> Vidas enteras han sido dedicadas a la búsqueda de una solución. Sophie Germain tuvo que adoptar la identidad de un hombre para investigar en un campo prohibido a las mujeres. El flamante Evariste Galois garabateó los resultados de su profunda investigación bien entrada la noche antes de caminar lentamente a su muerte en un duelo. El genio japonés Yutaka Taniyama puso fin a su vida sumido en la desesperación, mientras que el industrialista alemán Paul Wolfskehl declaró que Fermat lo había salvado del suicidio.



Pierre de Fermat, portada del libro *Fermat's Enigma* de Simon Singh y Andrew Wiles

El importante esfuerzo de popularización de las matemáticas de Singh es tal vez el más conocido pero ciertamente no el único digno de mención de entre aquellos que se publicaron en los últimos diez años y los cuales no

[2]El libro de Singh apareció en varias ediciones y en numerosas traducciones. En este artículo me refiero a [Singh 1997].

podríamos listar en detalle aquí. Sin embargo, hay dos títulos que me gustaría mencionar por lo que las carátulas de sus libros nos comunican. [Derbyshire 2003] discute la conjetura de Riemann y nos anuncia que se trata del "mayor problema no resuelto de las matemáticas" (*The Greatest Unsolved Problem in Mathematics*). [Devlin 2002], por su parte, describe los "siete problemas del milenio" propuestos en el año 2000 por el *Clay Mathematics Institute* (CMI), y anuncia que se trata de los "siete mayores acertijos matemáticos no resueltos de nuestro tiempo".

El lector no iniciado en las matemáticas (y tal vez más de un matemático profesional también) puede quedar un poco perplejo ante tal profusión de problemas matemáticos que reclaman para sí, cada uno por separado, el cetro tan codiciado. Los matemáticos profesionales que trabajan cada uno en su campo podrían hasta ofenderse ante la afrenta ya que, a fin de cuentas, cada cual cree estar dedicando su vida científica a problemas importantes y no quiere que anden divulgando por ahí que son otros, y no el suyo, el que es en realidad el "más importante" de todos.

El logro de Wiles ha sido realmente contundente y su demostración es un verdadero *tour de force* matemático digno de la mayor admiración. La historia personal de Wiles en relación con UTF es sin dudad dramática, tanto por haberse él puesto como meta desde joven la resolución del problema y haberlo logrado décadas después, como por los largos años que dedicó en completa soledad a su prueba y el error que se descubrió en ella en el último momento. Pero los 350 años de historia de UTF han sido enormemente sobredramatizados en varios de los lugares donde se han discutido, sobre todo después del logro de Wiles. Esencialmente, UTF fue un teorema al cual pocos matemáticos, y sobre todo muy pocos investigadores destacados de la teoría de números, dedicaron esfuerzos investigativos sostenidos y dignos de ese nombre. Con contadas excepciones, siempre fue muchísima mayor la curiosidad incitada por el teorema que la cantidad de trabajo serio que se le dedicó.

En el presente artículo expondré en líneas generales el contorno de lo que en mi opinión una historia moderada de UTF, en la cual no abundan los grandes dramas, debería comprender. No encontraremos aquí suicidios, ni disfraces, ni engaños, y tampoco trescientos cincuenta años de actividad matemática febril en torno a un enigma, aunque sí muchas ideas ingeniosas que se fueron sumando a lo largo de los años. Sin embargo, para poder discutir seriamente la pregunta cual fue la actitud de los matemáticos a lo largo de la historia hacia UTF, quisiera dedicar la primera sección del artículo a la pregunta más general: "qué es lo que los matemáticos consideran un problema matemático importante".

1 Problemas matemáticos importantes y problemas no resueltos

En vez de intentar definir yo mismo qué es lo que caracteriza a un problema como importante a los ojos de un matemático, dejaré a los maestros hablar. El maestro en este caso es David Hilbert (1862-1943), uno de los matemáticos más influyentes de principios del siglo XX. Junto con Jules Henri Poincaré (1854-1912), Hilbert fue uno de los últimos universalistas, capaz de alcanzar un panorama comprehensivo de la disciplina entera de las matemáticas y así como de su relación con disciplinas vecinas, y sobre todo con la física. Hilbert dio una respuesta explícita a la pregunta que nos ocupa en una ocasión especialmente festiva, a saber, el segundo congreso internacional de matemáticos, realizado en París en 1900. Para aquel entonces Hilbert era una estrella en ascenso cuya prominencia en el mundo matemático estaba siendo definitivamente consolidada. La invitación implicaba la expectativa de que él presentara una descripción del estado actual de la investigación en la disciplina en su totalidad o en alguna de sus ramas principales en las que él era un experto. Hilbert, sin embargo, prefirió "levantar el velo detrás del cual se oculta el futuro" y "echar un vistazo a los próximos avances" de las matemáticas. Presentó una lista de veintitrés problemas matemáticos que en su opinión deberían ocupar los esfuerzos de los matemáticos en el siglo que estaba por comenzar. La lista pronto se convirtió en un hito histórico de las matemáticas modernas. Más de un matemático alcanzó la gloria profesional al solucionar uno de los problemas en la lista, o aún al demostrar cómo cierto progreso podría ser alcanzado. No es éste el lugar para discutir detalladamente los problemas en la lista[3]. Lo que nos interesa aquí es la sección introductoria, donde Hilbert habla en general sobre el papel desempeñado por los problemas en el desarrollo de las matemáticas. Esto es lo que dijo al respecto:

> La significación profunda de ciertos problemas para el avance de la ciencia matemática en general y el papel importante que juegan en el trabajo del investigador individual no pueden ser ignorados. Una rama de la ciencia seguirá en vida mientras siga ofreciendo problemas en abundancia. La carencia de problemas presagia su extinción o el fin de su desarrollo independiente... Es a través de la solución de los problemas que el investigador pone a prueba el temple de su acero; encuentra nuevos métodos y nuevas perspectivas, y alcanza un horizonte más amplio y más libre.

Los problemas no resueltos son, en opinión de Hilbert, como el oxígeno que respiran las teorías matemáticas. Teorías matemáticas dignas de ese nombre se han desarrollado típicamente para solucionar problemas importantes, bien

[3]Una reciente discusión detallada aparece en [Gray 2000].

definidos. ¿Pero, qué es un problema matemático “importante”? Hilbert lo caracteriza como sigue:

> Es difícil y a menudo imposible juzgar correctamente por adelantado el valor de un problema, ya que su trofeo final depende de la ganacia que la ciencia obtiene de él. Sin embargo podemos preguntarnos si hay criterios generales que distinguen al problema matemático valioso. Un viejo matemático francés dijo: “una teoría matemática no puede ser considerada como completa hasta que se ha clarificado al punto que podemos explicarla a la primera persona que encontremos en la calle”. Esta claridad y facilidad de comprensión en la que insisto con respecto a una teoría matemática, la demandaría más aún para un problema matemático que quiere ser perfecto. Es que lo claro y lo fácilmente comprendido nos atrae, mientras que lo complicado lo rechazamos.
>
> Por otra parte un problema matemático debe ser suficientemente difícil para tentarnos, pero no totalmente inaccesible, para que no se burle de nuestros esfuerzos. Debe ser para nosotros como un poste de guía en las laberínticas trayectorias hacia las verdades ocultas, y en última instancia un recordatorio del placer que nos aguarda en la solución acertada.

¿Conocemos problemas famosos que satisfacen los criterios antedichos? Hilbert mencionó en su charla los siguientes ejemplos:

> Los matemáticos de los últimos siglos estaban acostumbrados a dedicarse con celo apasionado a la solución de problemas particularmente difíciles. Ellos conocían el valor de los problemas difíciles. Les recuerdo el “problema de la trayectoria de más rápida pendiente”, propuesto por Johannes Bernoulli. La experiencia nos enseña, explicó Bernoulli al anunciar publicamente este problema, que las mentes elevadas son llevadas a esforzarse en pro del avance de la ciencia con tal de que se pongan ante ellas difíciles y al mismo tiempo útiles problemas. Esperaba él, por tanto, ganar las gracias del mundo matemático siguiendo el ejemplo de hombres como Mersenne, Pascal, Fermat, Viviani y otros, al plantear a los analistas más distinguidos de su tiempo un problema a través el cual, como por piedra de toque, pueda probar el valor de sus métodos y medir su fuerza. El cálculo de variaciones debe su origen a este problema de Bernoulli y a otros problemas similares.

Tenemos aquí, entonces, un ejemplo paradigmático de un problema importante: encontrar la trayectoria que une dos puntos que se encuentran a diversas alturas, de manera que una bola que se deje rodar sobre esta trayectoria cubra la distancia entre los dos puntos en el menor tiempo posible. Esto es de hecho un problema bastante difícil, que fue formulado cuando el cálculo infinitesimal estaba en sus principios y, como Hilbert bien lo dijo, se convirtió efectivamente en una piedra de toque que hizo evidente el enorme potencial implícito en el nuevo cálculo. Por otra parte, las técnicas específicamente desarrolladas para solucionarlo crearon un campo matemático totalmente nuevo, el cálculo de variaciones, lleno de problemas difíciles, que continúa proporcionando grandes desafíos profesionales a hordas de matemáticos talentosos. Además proporciona herramientas básicas de primera magnitud a la física matemática. De hecho, Hilbert mismo se convirtió en un gran maestro de este campo en el curso de su vida profesional, y algunos problemas de la lista de 1900 llevaron a una mejora significativa de las técnicas básicas de ese ramo matemático. Resulta totalmente natural, pues, que Hilbert se refiriera a este asunto como caso ejemplar de un problema matemático importante.

Dos problemas ejemplares adicionales aparecen en la introducción a la lista de 1900. Primero es el problema de Fermat, que nos ocupa aquí, y segundo es el "problema de los tres cuerpos". Este último proviene de los inicios de la mecánica celeste en el marco de la física newtoniana, especialmente a manos del genial Leonhard Euler (1707-1783) en siglo XVIII. Se trata de la descripción de la trayectoria de cuerpos celestes que obedecen las leyes newtonianas de la gravitación. Es fácil solucionarlo en el caso de dos cuerpos, pero se complica increíblemente cuando se agrega un tercer cuerpo. Siguiendo las tentativas iniciales de Euler, varios matemáticos importantes invirtieron considerables esfuerzos en solucionar este problema. Algunos años antes de la charla de Hilbert en París, Poincaré logró considerables avances, por lo menos para ciertos casos particulares importantes. Éste fue tan sólo uno de sus muchos logros prominentes [Barrow-Green 1997]. Su solución contenía las semillas de muchas ideas matemáticas que se desarrollarían a lo largo del siglo XX. Entre éstas cabe mencionar lo que se ha llamado "ciencia del caos", que recibió mucha atención en círculos extra-matemáticos por medio de libros de popularización en los años 90. Visto en retrospectiva, entonces, la elección de Hilbert del problema de los tres cuerpos nos aparece como una ilustración muy acertada de su criterio para caracterizar problemas importantes, aunque antes de 1900 él estaba muy lejos de comprender con certeza hasta qué punto serían las ideas de Poincaré en este campo fructíferas. Además, es posible que Hilbert haya querido proporcionar un implícito, y bien merecido, *homage* al matemático francés en esta conferencia que se desarrollaba en su país.

Los dos problemas mencionados aquí por Hilbert son esencialmente diferentes. Mientras que el problema de Fermat es una "invención libre de la razón pura, que pertenece al reino abstracto de la teoría de los números", el de Poincaré "se nos impone desde la astronomía y [es] necesario para una cabal comprensión de los fenómenos fundamentales más simples de la naturaleza". Éstas son dos fuentes de motivación totalmente diferentes, pero ambas conducen a problemas que los matemáticos consideran como altamente importantes, cada uno a su propia manera. El centrarse en problemas como hilo conductor fundamental en el desarrollo de la ciencia llevó a Hilbert a formular su bien conocido credo sobre las matemáticas y las ciencias:

> Esta convicción de la solubilidad de todo problema matemático es un potente incentivo para el investigador. Oímos dentro de nosotros la llamada perpetua: He aquí el problema. Busca su solución. Puedes encontrarla por medio de la razón pura, porque en matemáticas no hay *ignorabimus*.

El rechazo insistente de Hilbert del *ignorabimus* en matemáticas era ante todo una reacción a la bien conocida declaración del fisiólogo Emil du Bois Reymond (1818-1896) concerniente a las limitaciones inherentes de la ciencia como sistema capaz de proporcionarnos conocimientos sobre el mundo [Du Bois-Reymond 1872]. La actitud de Du Bois Reymond reflejaba la de muchos científicos e intelectuales europeos a fines del siglo XIX. Pero Hilbert, optimista incurable, se oponía totalmente a ella. El ICM de 1900 en París le proporcionó un podio excelente para hacer público su mensaje.

Es importante enfatizar que si bien Hilbert fue un pensador muy versátil que contribuyó a una variedad muy amplia de campos matemáticos diversos, tanto puros como aplicados, lo cierto es que hay un campo en el cual él sobresalió más que en cualquier otro, y cuyas ideas impregnan muchas de sus contribuciones en otros campos. Ese campo es sin duda la teoría de los números. De hecho, entre los veintitrés problemas de la lista 1900 encontramos no menos de seis relacionados directamente con esta disciplina, así como algunos otros que se relacionan indirectamente con ella. Por esta razón, y por el hecho de haberlo mencionado en la introducción, uno no puede dejar de sorprenderse al ver que Hilbert decidió no incluir UTF entre los veintitrés. La sorpresa se atenuará al ver, en lo que sigue, que Hilbert nunca dedicó esfuerzos serios a la investigación de este problema. Pero en todo caso, uno naturalmente esperaría encontrar el nombre de Hilbert entre aquellos matemáticos que se "obsesionaron" con "el más difícil problema de las matemáticas" y "estaban dispuestos a sacrificarlo todo en la búsqueda de la verdad" [Singh 1997, xvi]. Pero si describimos a UTF en estos términos es necesario clarificar por qué esta expectativa no corresponde a la realidad histórica en el caso de Hilbert.

Pues bien, Hilbert era un personaje muy vistoso, alrededor de quien se tejieron muchas leyendas. Cabe traer a colación aquí dos de estas leyendas. La primera, mencionada también en el libro de Singh, describe la respuesta de Hilbert a una pregunta supuestamente dirigida a él a menudo, a saber, por qué él mismo nunca buscó una demostración de UTF: "antes de comenzar –dijo Hilbert según la leyenda– tendría que disponer de tres años de estudio intensivo, y no tengo mucho tiempo para malgastar en un probable fracaso".

Pero si Hilbert dijo alguna vez lo que la leyenda le atribuye, sería incorrecto interpretarlo según lo implicado por Singh, a saber, que Hilbert temió confrontar el riesgo implicado en la dificultad evidente del problema. La carrera de Hilbert indica claramente que él no vaciló en abordar a lo largo de los años problemas de la más alta dificultad. De hecho, su ascenso a la fama en

1888 se debió a la solución del "teorema de la base finita" para los invariantes algebraicos, solución que los más destacados matemáticos contemporáneos buscaron por décadas. Asimismo en 1909 Hilbert publicó una sorprendente demostración del problema de Waring en la teoría de números, propuesto por primera vez en 1770. Resolver el problema de Waring significó una incursión en una subespecialidad de la teoría de los números esencialmente distante de aquellas en las que él destacaba. Pero tampoco esto lo disuadió en lo más mínimo ya que se trataba de un problema abierto verdaderamente difícil y al mismo tiempo, en su opinión, importante. En un campo totalmente distinto, Hilbert también encontró en 1912 la solución de la ecuación de Boltzmann en teoría cinética de los gases, ecuación formulada en 1872. En 1915 se vio envuelto en una carrera amistosa con Einstein en vías a la formulación de las ecuaciones de covariancia general de la teoría general de la relatividad, luego que Einstein mismo hubiera pasado más de tres años de enormes esfuerzos intentando hacerlo[4]. No era Hilbert, quien veía una afrenta personal en la mera posibilidad que en matemáticas pueda emerger un caso de *ignorabimus*, un matemático que se abstuviera de tratar un problema atractivo e importante tan sólo porque otros habían fracasado antes de él. Mucho menos en la teoría de números, que como ya se dijo era una de sus mayores especialidades. Antes bien, esto añadiría interés y estímulo. La pregunta relevante para él sería, en general, si la importancia del problema ameritaba sus esfuerzos.

Una segunda leyenda digna de mención se refiere al premio ofrecido en 1908 a la primera persona que demuestre UTF, premio cuya existencia se volvió con el tiempo no menos famosa que el teorema mismo. El premio, entonces valorado en cien mil marcos, fue financiado por el industrial judío-alemán Paul Wolfskehl (1856-1906), hijo de una rica familia de banqueros. Según la leyenda, repetida por Singh en su libro en todo detalle, la razón que llevó a Wolfskehl a establecer el premio fue el rechazo amoroso de una "mujer misteriosa" cuya "identidad nunca se ha establecido". Wolfskehl, deprimido por el rechazo, decidió suicidarse, pero a fin de cuentas no llevó a cabo su decisión, según la leyenda, porque en sus últimas horas comenzó a hojear algunos trabajos importantes sobre el teorema de Fermat, y particularmente los de Ernst Eduard Kummer (1810-1893). Profundamente absorto en la lectura y en pensar que tal vez él mismo podría contribuir a resolver el problema, Wolfskehl dejó pasar inadvertidamente la hora que había establecido para realizar su trágico proyecto –la medianoche, claro está– y "su desesperación y dolor se evaporaron". En su testamento Wolfskehl legó el dinero a la universidad de Göttingen, la prestigiosa institución de Hilbert, como símbolo de reconocimiento al valor de las matemáticas y, particularmente, al teorema que "renovó su deseo de vivir".

La historia no es muy exacta, como veremos más abajo, y representa el típico ejemplo de sobre-dramatización que encontramos en estos casos. Pero

[4]Para detalles adicionales sobre estos logros de Hilbert, véase [Corry 2004], así como [Corry 2003, Ch. 3].

sí es totalmente correcto que Hilbert estuvo a la cabeza del comité que supervisaba la utilización de los intereses producidos por el fondo, y que él utilizó ese dinero de manera brillante para organizar reuniones científicas de altísima categoría en Göttingen a lo largo de los años. La mayoría de estas reuniones fueron dedicadas a discutir preguntas fundamentales de la física teórica, y Hilbert usó el dinero para invitar a los más prestigioso físicos de la época a exponer sus ideas en desarrollo. Algunas de estas reuniones se convirtieron en verdaderos hitos en la historia de esta disciplina, tal como por ejemplo una serie de "Conferencias Wolfskehl" dictadas por Niels Bohr (1185-1962) en 1922, en las cuales presentó sus ideas más recientes sobre la estructura del átomo [Corry 2004, 412]. De esta manera, Hilbert ayudó a producir el más significativo, y algo inverosímil, caso en la historia de las matemáticas en que la teoría de los números contribuyó significativamente al progreso de la física teórica.

Mientras que este episodio histórico verdaderamente importante que conecta a Hilbert con el premio –el de las Conferencias Wolfskhel en Física– queda típicamente excluido de los relatos populares de UTF, una segunda leyenda relatada con frecuencia explica la negativa de Hilbert a enfrentarse él mismo con el problema, citando su supuesta respuesta a todo el que inquiriese: "¿Para qué querría yo matar a la gallina que pone los huevos de oro?" Esta presunta respuesta se ha interpretado como si Hilbert quisiera implicar que no solucionaría el problema para preservar el fondo y los intereses que producía. No sorprendería realmente el que Hilbert haya dicho alguna vez algo parecido a esto[5], pero en mi opinión sería bastante forzado asumir que el espíritu matemático de Hilbert renunciaría conscientemente a resolver un problema matemático verdaderamente importante solamente porque su mente administrativa hubiera querido ahorrarse el dinero para otras metas.

Es conveniente a estas alturas agregar algunas clarificaciones referentes al contexto más amplio de la lista de Hilbert y de sus elecciones, mencionando uno de los problemas que sí se incluyó, a saber, la conjetura de Riemann. Cualquier matemático llamado hoy en día a elaborar una lista de problemas similar a la de Hilbert incluiría sin duda la conjetura de Riemann. Pero cerca de 1900 la opción estaba lejos de ser obvia, entre otras porque había sido formulada relativamente recientemente y muy pocos esfuerzos habían sido dedicados a ella hasta entonces. Retrospectivamente, ésta es otra elección que añade peso a la evaluación de la excelente comprensión que Hilbert tenía en aquel entonces del panorama general de la teoría de números, y de hecho de las matemáticas en general. Aquí vemos a este matemático universal, enfrentando el dilema de elegir un puñado de problemas matemáticos importantes para el nuevo siglo, y decidiendo incluir el de Riemann pero no el de Fermat. Hilbert afirmó clara y explícitamente que "después de una discusión exhaustiva de la fórmula de Rie-

[5]Una referencia temprana, que repite la leyenda pero no señala la fuente, aparece en [Jungk 1956, 23]: "Qué suerte que probablemente sea yo el único que pueda quebrar esa nuez. Pero yo me las arreglo para no matar este gallina que nos pone tantos huevos dorados".

mann para los números primos, quizás podamos alguna vez estar en posición de encontrar la solución rigurosa del problema de Goldbach". Al conectar esta conjetura con la de Riemann como justificación posible para su la inclusión de ésta última en la lista, Hilbert establecía otro criterio claro e importante para decidir sobre la importancia relativa de cualquier problema, a saber, su impacto en clarificar y posiblemente solucionar una gran cantidad de problemas matemáticos adicionales. Entre aquellos otros problemas de la lista que se relacionan con la teoría de números se encuentran el "problema de reciprocidad de órdenes superiores", la cuestión de la existencia de un algoritmo general para solucionar cualquier ecuación diofántica dada, y otro problema más referente a las formas cuadráticas. La teoría de números ocupó un lugar muy especial, central en la visión total de Hilbert de las matemáticas, y no encontró ninguna dificultad en precisar esos problemas que debían ocupar a sus colegas en los cien años que estaban por venir. UTF no estaba entre estos problemas.

A pesar de la importancia que se ha atribuido a los problemas de esta lista, es importante analizarla críticamente como cualquier otro capítulo en la historia de las matemáticas. Tal análisis estaría bastante más allá del alcance del presente artículo, pero es importante enfatizar que en retrospectiva no todos los problemas en la lista resultaron ser igualmente importantes. Más aun, incluso según los criterios expuestos en 1900 no todos ellos serían "problemas matemáticos importantes". Por ejemplo, muy pocos de los problemas podrían describirse como "fáciles de explicar a la primera persona que encontráramos en la calle", según lo aconsejado por Hilbert. Por el contrario, ese criterio se aplica bien a algunos de los problemas que él no incluyó, por ejemplo UTF y la conjetura de Goldbach. Por supuesto, mientras que la formulación de UTF es explicable al hombre promedio, éste no es de ningún modo el caso para su solución posible. Que la formulación de UTF pueda explicarse tan fácilmente incluso al no-matemático es quizás la razón principal por la que Hilbert lo tomó como ejemplo paradigmático en la introducción a su charla, aunque después no encontró ninguna razón para incluirlo en la lista real.

Y con todo, Hilbert dio una razón muy específica por la que UTF puede considerarse como históricamente importante:

> [UTF] ofrece un ejemplo llamativo de la inspiración que un problema tan especializado y al parecer poco importante puede producir en la ciencia. Kummer, incitado por el problema de Fermat, fue conducido a la introducción de números ideales y al descubrimiento de la ley de factorization única de los números de un campo ciclotómico en factores primos ideales –una ley que hoy, generalizada a cualquier campo algebraico por Dedekind y Kronecker, se yergue en el centro de la teoría moderna de números y cuya significación va más allá de los límites de esa teoría, entrando en el reino del álgebra y de la teoría de funciones–.

La importancia que Hilbert sí atribuye a UTF, entonces, proviene del hecho de que los intentos que se hicieron para resolverlo llevaron a la introducción de conceptos y técnicas de influencia profunda para el desarrollo subsiguiente de las matemáticas. Volveré a este importante punto en mayor detalle abajo.

La fuerza y el impacto de la lista de Hilbert, y de la leyenda que surgió alrededor de ella, se manifiesta no solamente en la manera en que condujo a investigaciones interesantes en muchos campos de las matemáticas a lo largo del siglo. De hecho, ella creó un desafío implícito para las generaciones por venir, que muchos matemáticos e instituciones matemáticas alrededor del mundo se sintieron fuertemente presionados por tratar a su debido tiempo: ¿quién formularía en 2000 la lista paralela para el siglo que viene y, de hecho, para el milenio que viene? Este desafío tan simbólicamente cargado condujo a las varias listas que fueron publicadas al acercarse el año 2000. La más famosa fue la lista ya mencionada de los siete problemas del milenio, publicada por un comité a nombre del CMI en Massachussets. Una comparación detallada entre estas dos listas, Hilbert en 1900 y CMI en 2000, indicaría de manera interesante algunos de los procesos más significativas en el desarrollo de la disciplina a lo largo de cien años de historia, de la profesión matemática y del ambiente cultural en el cual se realiza, y de la opinión pública sobre las matemáticas. En el marco de este artículo quisiera solamente precisar tres características visibles que van directamente al corazón de estas diferencias.

Primero está el hecho de que mientras que Hilbert elaboró su lista por sí mismo y sin colaboradores, en el caso del CMI un comité de varios matemáticos prominentes fue necesario no sólo para elaborar una lista del alcance similar sino, especialmente, para darle el mismo grado de autoridad que la anterior tuvo. Una lista diferente, ésta elaborada por una figura principal tal como Stephan Smale [Smale 1998][6], interesante y cautivadora como puede ser, recibió mucho menos atención de parte de los matemáticos, e incluso menos de parte del público en general. Está en segundo lugar el hecho que para hacer la lista digna de la atención, el CMI consideró conveniente, y quizás hasta necesario, asociar a cada problema un jugoso premio en efectivo. Probablemente, Hilbert no habría podido siquiera concebir en 1900 tal posibilidad. El tercero es la velocidad asombrosa con la cual la lista se dio a conocer entre una audiencia muy amplia alrededor del mundo y, de hecho, no solamente por matemáticos.

Esta breve discusión de la legendaria lista de problemas de Hilbert en 1900 puede proporcionar un vistazo superficial a la dificultad inherente a cualquier tentativa de establecer la importancia relativa de problemas en matemáticas, tanto en un sentido "objetivo" como desde la perspectiva personal de los matemáticos en cualquier período dado. Hilbert intentó hacer una proyección hacia el futuro, lo cual es más difícil aún, pero los historiadores entienden que incluso en retrospectiva es a veces difícil determinar la importancia histórica verdadera de cualquier problema dado y la forma en que fue considerado. Sea

[6]Como Hilbert, también Smale propone una serie de criterios que lo guiaron en la preparación de su lista, y éstos complementan de manera interesante los de áquel.

como sea, parece razonable e intelectualmente sano manejarse con cuidado antes de atribuir títulos como “el problema matemático más grande de la historia”, y mirar con recelo aquellos lugares donde tales títulos se utilizan. En lo que sigue, procuraré proporcionar un juicio histórico equilibrado sobre UTF a lo largo de trescientos cincuenta años de matemáticas.

2 El drama de UTF: una revisión

Como ya indiqué, Simon Singh es uno de los representantes más sobresalientes de una reciente tendencia, muy encomiable de por sí, de popularización seria de las matemáticas y de la ciencia a través de libros, series de televisión y obras de teatro. Para escribir su libro sobre UTF, sin duda dedicó considerables esfuerzos a recolectar y digerir una cantidad enorme de material matemático relevante, y a presentarlo de manera accesible a un amplio público, lo que le mereció en 1999 una distinción especial de parte de la *American Mathematical Society*[7]. Para lograr su difícil tarea, Singh recurrió a una estructura dramática específicamente diseñada para mantener la atención de los lectores a todo lo largo de su texto.

Desafortunadamente, una lectura histórica crítica del texto saca a relucir muchos puntos débiles que muestran que el drama, a fin de cuentas, es esencialmente artificial.

El tono dramático de la historia de Singh es patente desde el primer párrafo del libro, que describe la conferencia de Andrew Wiles en 1993 en Cambridge en los siguientes términos:

> Era la conferencia más importante de las matemáticas del siglo. Doscientos matemáticos estaban totalmente absortos. Solamente un cuarto de ellos entendía completamente la densa mezcla de símbolos griegos y de álgebra que cubría el pizarrón. (p. 1)

El matemático escéptico, ya tan acostumbrado a observar a sus deslumbrados colegas (y a sí mismo) en charlas remotamente menos exigentes que la de Wiles, se preguntará si la cuenta de “*solamente* una cuarta parte” no es un error, y lo que Singh quiso decir es “puede que *hasta* una cuarta parte” (y también eso le parecerá una gran exageración que se refiere más al comienzo de la charla y probablemente menos a su final). Pero más significativa es la manera en la cual Singh conecta directamente UTF con la historia de las matemáticas en general:

> La historia del último teorema de Fermat se liga inextricablemente a la historia de las matemáticas, tocando todos los temas principales de la teoría de números... El último teorema está en el corazón

[7] Ver `http://www.ams.org/notices/199905/comm-jpbm.pdf`, *Notices of the AMS* **46** (5), 568–569.

> de una saga intrigante de valor, truculencia, astucia y tragedia, que involucró a todos los grandes héroes de las matemáticas. (p. xv)

El lector de este pasaje deseará seguramente conocer en detalle las debilidades y las glorias humanas aquí mencionadas, que raramente se asocian a las matemáticas y a los matemáticos. No contentos con esto, los editores del libro indicaron en la cubierta que se trata de "la búsqueda épica para solucionar el mayor problema matemático del mundo", y en la contraportada agregaron que "UTF se convirtió en el santo grial de las matemáticas. Vidas enteras y coloridas se dedicaron, e incluso se sacrificaron, en la búsqueda de una prueba".

Pues bien, vidas "dedicadas, e incluso sacrificadas" a la solución de un problema matemático abstruso es definitivamente un tema digno de atención. Pero si uno analiza este pasaje cuidadosamente y compara su contenido con lo que muestra el expediente histórico, entonces comienzan a presentarse algunos problemas.

El grado de conexión del UTF con "todos los temas principales de la teoría de los números" es un punto importante que discutiré más abajo. Veremos que aunque tal aserción es muy apropiada para describir el trabajo de Wiles, es muy fácil exagerar este aspecto de la *historia* del teorema. Pero antes de hacerlo, podemos simplemente observar que ninguna de las personas mencionadas más arriba, así como en el párrafo citado en la introducción, dedicó su vida y mucho menos la sacrificó sobre el altar de UTF. Tomemos por ejemplo a Euler, realmente el más importante matemático de su época, y otro más en la lista de quienes no solucionaron UTF (en el sentido que no proporcionó una demostración general del teorema). La "admisión" de Euler consiste en algunas líneas a su amigo Goldbach en una carta donde le escribe sobre muchos otros problemas, y en la cual le informa que no ha podido resolver éste en particular. Por otra parte, Euler demostró casos particulares del teorema y, lo que es más importante, desarrolló ideas que serían de utilidad en muchos otros problemas de la teoría de los números. Pero el punto histórico central es que durante los años en que Euler dedicó cierto tiempo a pensar en este problema (y era solamente uno entre docenas de otros problemas verdaderamente importantes en campos totalmente diversos de la física y de las matemáticas), UTF no se consideraba de manera alguna como esencialmente diferente, y ciertamente no de mayor importancia, que muchos otros problemas que Fermat había dejado sin resolver. Era apenas una entre las muchas preguntas planteadas por Fermat a sus amigos y colegas. No imaginemos, entonces, a Euler convocando una rueda de prensa para anunciar dramáticamente su fracaso en solucionar "el problema matemático más grande de la historia".

También la historia de Sophie Germain (1776-1831) es realmente fascinante. Sus talentos matemáticos eran excepcionales en todo sentido. Durante años mantuvo una correspondencia matemática con Carl Friedrich Gauss (1777-1855) y Adrien Marie Legendre (1752-1833), adoptando inicialmente el seudónimo "Monsieur Leblanc". Germain simplemente temía que si sus correspondientes supieran que se trataba de una mujer, sus cartas y sus ideas no serían tomadas seriamente. Y tal preocupación no era de manera alguna infundada, ya que las mujeres no fueron aceptadas de lleno en la vida académica europea, y particularmente en la investigación matemática, hasta muchos años después de esto. De hecho, Sophie Germain fue una de solamente dos mujeres de notable participación en las matemáticas del siglo XIX (la segunda fue Sofía Kovalevskaya (1850-1891)). Sin embargo, afirmar que "Sophie Germain adquirió la identidad de un hombre para investigar un campo prohibido a las mujeres" es engañoso, como mínimo, puesto que el campo "prohibido a las mujeres" era la ciencia en general, y quizás las matemáticas en particular, pero de ninguna manera la investigación específicamente conectada con UTF, como podríamos pensar al leer el texto arriba citado.

Aún más problemática es la mención de Evariste Galois (1811-1832). Uno puede estar seguro de encontrar la personalidad abigarrada de Galois en cualquier presentación popular de las matemáticas. La razón es que las biografías de matemáticos (y hay quien dirá que también sus vidas, no sólo sus biografías) suelen ser aburridas al ser vistas externamente, y similares las unas a las otras ("nació en..., estudió en..., se doctoró en..., publicó su trabajo más importante sobre..., recibió honores tales como..."). Hay por supuesto algunas excepciones a esta regla, ¡pero ningún matemático con excepción de Galois puede jactarse del romántico privilegio de haber muerto en un duelo por el honor de una mujer! Agreguemos a esto su explosiva personalidad, sus firmes convicciones políticas y sus intensas actividades, su precocidad, y el largo tiempo que tomó hasta que sus ideas fueron ampliamente reconocidas, y ahí lo tenemos: un drama increíble que sazonará el cuento más aburrido que uno pueda concebir.

La pregunta investigada por Galois se relacionaba con un problema matemático verdaderamente significativo que seguía sin solución ya muchos siglos: encontrar una fórmula algebraica general para resolver por radicales cualquier ecuación polinómica del quinto grado. Matemáticos como Cardano y Ferrari habían demostrado ya en el siglo XVI cómo hacer esto para las ecuaciones del tercer y cuarto grado. Antes de Galois, al final del siglo XVIII, Paolo Ruffini (1765-1822) y Niels Henrik Abel (1802-1829) señalaron el hecho sorprendente que en el caso de grado cinco es imposible encontrar la fórmula deseada.

Las insólitas ideas de Galois eran mucho más atrevidas que las de sus precursores y de hecho enfocaron una pregunta más general que la de ellos: dada cualquier ecuación polinómica particular de grado arbitrario, decidir si es posible encontrar todas las soluciones por radicales. Él no solamente solucionó el problema de una manera brillante, sino que al hacerlo también creó una herramienta matemática de gran alcance, el concepto de grupo, un concepto sin el cual las matemáticas y la física del siglo XX, tal y como las conocemos, serían simplemente inconcebibles. El concepto de grupo y, más generalmente, la teoría de Galois (en una versión específica de ella, para "cuerpos de formas modulares") juegan un papel importante en la prueba de Wiles, al igual que muchas otras ideas matemáticas que son centrales a la disciplina en general. Pero la conexión implícita entre los enormes esfuerzos que supuestamente fueron dedicados durante los últimos 350 años para probar UTF y el hecho de que Galois "garabateó los resultados de su profunda investigación bien entrada la noche antes de caminar lentamente a su muerte en un duelo" es altamente engañosa y en más de una forma.

No es solamente que no existe conexión alguna entre UTF y los heroicos descubrimientos matemáticos de Galois o su horizonte de intereses. De hecho, no hay indicación de que Galois mencionara o demostrara interés alguno en este teorema. Es también que Singh adopta sin ningún escrúpulo crítico la atractiva pero falsa leyenda (popularizada sobre todo por el muy leído libro de E.T.Bell, *Men of Mathematics*) según la cual las ideas importantes de Galois fueron apresuradamente escritas durante su fatal última noche. Como dije, no es de sorprenderse que la leyenda de Galois haya inspirado tantos libros e incluso películas, y este detalle sobre la última noche sirve en muchas descripciones como culminación de una vida verdaderamente dramática. Lástima nada más que en la vida real el drama fuera mucho menor, inclusive en el caso de Galois.

Es verdad que Cauchy no llegó ni a ver algunos de los textos que Galois le envió, y de hecho hasta los perdió un par de veces, pero algunos de sus otros artículos sí fueron publicados durante el curso de su vida. Es verdad que en su última noche Galois escribió ideas matemáticas mezcladas con el misterioso nombre de Stephanie. Ésto es bastante para justificar el concepto romántico del Galois mítico. Pero no fue allí donde desarrolló sus ideas importantes que fueron publicadas mucho después. Las páginas dedicadas a este interesante cuento en el libro de Singh ciertamente hacen el libro más atractivo para el lector general (lo cual es digno de por sí). Sin embargo, uno puede seguir preguntándose por mucho tiempo de qué manera Galois pertenece en la historia del UTF, incluso cuando esta historia es concebida en los términos más amplios posibles.

Yukata Taniyama

Algo parecido puede decirse de la manera en que Yutaka Taniyama (1927-1958) y su trágico, y quizás algo misterioso, suicidio se mencionan aquí. Es verdad que las ideas de Taniyama "conducirían en última instancia a la solución" del problema. Sin embargo, ninguna de estas ideas, y mucho menos su suicidio, tenían conexión, incluso remota, con la investigación de UTF. En un simposio realizado en 1955 en Tokio, Taniyama presentó dos problemas en base a los cuales una conjetura fue formulada algo más adelante. Esta conjetura establece una inesperada conexión entre dos entidades matemáticas aparentemente muy distantes: "curvas elípticas" y "cuerpos de formas modulares". La conjetura llegó a conocerse como la conjetura de "Taniyama-Shimura", o de Taniyama-Shimura-Weil (TSW), y solamente muchos años más tarde su conexión posible con UTF se hizo evidente (como veremos más adelante). De hecho, el trabajo de Wiles consistió en probar un caso especialmente importante de TSW, y UTF se deriva de este resultado como un corolario altamente no trivial. Taniyama mismo no tenía ni la más mínima idea de esta conexión con UTF al proponer los problemas, al formular la conjetura, y menos aún en el momento de su muerte. La razón de su suicidio en 1958 ha seguido sin aclararse hasta el día de hoy, pero una cosa sí es segura: que no tiene ninguna conexión con la conjetura y mucho menos con UTF. Una lectura precipitada del texto antes citado puede llevar fácilmente a pensar que lo contrario es el caso.

Y el último elemento de interés en la cita, que ayuda a promover su efecto dramático, es un segundo caso de suicidio supuestamente relacionado con UTF, el de Paul Wolfskehl. En este caso el teorema ayudó a prevenir, más bien que a provocar, la supuesta tragedia. Una vez más nos encontramos aquí con un cuento de dinero, amor no retribuido, tragedia, y matemáticas, con el fin de proporcionar un fondo dramático a UTF y a las tentativas de probarlo. Lástima que esto sea ficción pura. En 1997, como parte de las celebraciones por el enorme logro de Wiles, el matemático Klaus Barner de Kassel decidió sacar a la luz algunos hechos sólidos sobre el filántropo más famoso en la historia de las matemáticas [Barner 1997]. Estos hechos difieren sensiblemente de la leyenda conocida de Wolfskehl.

Paul Wolfskehl

Wolfskehl se graduó en medicina en 1880, al parecer con una disertación en oftalmología. Aun como estudiante, síntomas tempranos de esclerosis múltiple comenzaron a aparecer, y Wolfskehl entendió que un futuro como médico era algo incierto para él. Por eso decidió moverse a las matemáticas. Entre 1881 y 1883 estudió en Berlín, participando en las conferencias del gran Kummer, quien, como veremos mas adelante, jugó un papel fundamental en los esfuerzos del siglo XIX relativos a UTF. El interés de Wolfskehl en UTF y sus conocimientos al respecto datan de esos años. Incluso publicó algunos trabajos relativos a la teoría de números algébricos. En 1890 Wolfskehl perdió totalmente su movilidad y la familia lo convenció de que se casara, para poder encontrar a alguien que continuara con su cuidado. Desafortunadamente, la elección de la novia parece haber sido un fracaso y, según la investigación de Barner, la vida de Wolfskehl llegó a ser bastante desgraciada después de la boda en 1903. Y entonces, en 1905, Wolfskehl modificó su testamento a favor del único amor verdadero de su vida, la teoría de los números, la disciplina que dio cierto significado a sus últimos años que al parecer fueron bastante miserables. Quizá el deseo a reducir de algún modo el capital que dejaría a su futura viuda jugó un papel significativo en la decisión. Sea como sea, si

Wolfskehl consideró alguna vez cometer suicidio, la razón detrás de tal decisión habría sido la depresión profunda que lo afectó a raíz de su enfermedad, y no un corazón destrozado por causa de una mujer desconocida. UTF, uno puede estar ser seguro, no lo salvó del suicidio en la manera dramática que refiere la leyenda, aunque puede ciertamente haberlo ayudado a dar sentido a los últimos años de su vida.

3 UTF de Fermat a Euler

Ha llegado la hora de decir algo más concreto y positivo sobre UTF y sobre la historia de las tentativas de demostrarlo. Daré una breve descripción de los momentos principales en esta historia y de ello se verá fácilmente que desde que Fermat escribiera en el margen de su libro (un poco después de 1630) y hasta 1984, la cantidad de investigación matemática seria y sistemática que involucró contribuciones significativas y directas a UTF fue bastante reducida. En contraste, la cantidad de demostraciones falsas, y hasta totalmente absurdas, escritas por matemáticos aficionados fue enorme[8]. Durante más de 350 años, los más prominentes matemáticos no consideraron que este problema realmente ameritara su atención y sus energías, aunque siguió siendo objeto de continuada curiosidad.

Alrededor de 1630 Fermat se dedicó a estudiar el contenido de la *Aritmética* de Diofanto, en una traducción latina preparada en 1621 por Claude Bachet (1581-1638). El problema ocho del libro II de la *Aritmética* es típico de aquellos que Diofanto muestra cómo resolver: escribir un número cuadrado dado como suma de dos números cuadrados. En los márgenes de su copia, Fermat anotó la famosa observación sobre la imposibilidad de hacer algo similar para los cubos, las cuartas potencias, o cualquier potencia más alta, y como ya se dijo, Fermat afirmó tener una prueba notable de este hecho que, desafortunadamente, no podía escribir en los márgenes estrechos del libro.

Éste es el origen no solamente de la historia en sí, sino también del carácter dramático asociado tan a menudo con ella. Pero es importante enfatizar que Fermat escribía constantemente en sus libros resultados de este tipo sin demostración, así como ideas generales, y desafíos matemáticos posibles. Durante su vida, Fermat publicó solamente una de las muchísimas ideas que desarrolló en relación con la teoría de los números. Fermat no era un matemático profesional en el sentido conocido hoy en día, y su idea de comunicar resultados matemáticos era esencialmente diferente a la del *ethos* de "publica o muere". Al considerar su comportamiento típico en estos asuntos uno puede hasta llegar a conjeturar que, poco después de escribir el famoso comentario marginal, Fermat pudo haber entendido que la "notable prueba" que

[8]Según la cuenta de [Lietzmann 1912, 63], tan sólo en los tres años que siguieron al anuncio del premio Wolfskehl se presentaron más de mil pruebas falsas. [Ribenboim 1999, 381-388] añade información sobre pruebas falsas o insuficientes que llegaron a publicarse.

él tenía en mente era realmente incorrecta. En efecto, Fermat enviaba cartas con frecuencia a sus amigos matemáticos en las que les informaba sobre sus nuevos resultados y a veces los desafiaba a encontrar las demostraciones por sí mismos. Curiosamente, no se ha conservado ninguna carta donde Fermat comente el problema general que luego se convirtió en UTF, y de hecho, fuera del legendario comentario marginal, esta pregunta no aparece en ninguna otra parte en sus escritos. Por el contrario, en varias de sus cartas Fermat propuso explícitamente los casos específicos $n = 3$ y $n = 4$ del teorema[9]. Este hecho no ofrece quizás ninguna evidencia tajante para afirmar que Fermat notó su error al pensar inicialmente que tenía una prueba correcta del caso general, pero por lo menos indica que eso resulta posible. Lo que sí es muy claro es que el problema no tenía ningún estatus especial para Fermat en comparación con los muchos otros que se le ocurrieron en sus lecturas de Diofanto y de otros clásicos. Es muy fácil olvidarse de que el mismo término "último teorema" fue acuñado retrospectivamente para referirse a aquella, de entre las muchas otras preguntas y conjeturas aritméticas formuladas por Fermat, ya que se convirtió en la última que seguía sin resolverse.

Además, debe notarse que entre las muchas e interesantes conjeturas matemáticas propuestas por Fermat, no pocas resultaron ser falsas. Uno de los más conocidos ejemplos es el de los así llamados números de Fermat, es decir enteros de la forma $2^{2^n}+1$. En cartas escritas a diferentes personas entre 1640 y 1658 Fermat expresaba su convencimiento de que tales números serían siempre primos, pero confesaba no tener una prueba de ello. Y sin embargo en una carta de 1659 a Pierre de Carcavi (1600-1684) pero destinada realmente a Huygens, Fermat sugirió tener una prueba usando el "método del descenso infinito". En realidad en esa misma carta Fermat afirmaba haber utilizado el método para probar varios resultados entre los cuales figura, pero sólo como un ejemplo adicional, UTF para el caso $n = 3$ [10]. Eventualmente, en 1732 Euler mostró que para $n = 5$, el correspondiente número de Fermat no es primo.

Una gran cantidad de resultados y conjeturas de Fermat en la teoría de números llegaron a conocerse gracias al esfuerzo de su hijo, Samuel. En 1670 publicó Samuel Fermat una versión de la traducción latina de Bachet de la *Aritmética* de Diofanto, incluyendo comentarios y cartas de su padre, las cuales Samuel temía que fueran totalmente olvidadas. Es gracias a esta edición que el mundo llegó a enterarse no solamente de lo qué se convertiría en UTF, sino también de muchas otras ideas. Pero como ya afirmé, solamente una de todas las demostraciones de Fermat en la teoría de números fue publicada en vida, y es la de un resultado muy similar en espíritu a UTF, a saber, que no existen tres números enteros x, y, z que satisfagan la fórmula

$$x^2 + y^2 = z^2$$

[9]Referencias exactas a las cartas aparecen en [Ribenboim 1999, 13 & 24].

[10]Ver [Mahoney 1994, 332-359]. La carta de 1659 aparece en la página 353.

y para los cuales, $xy/2$ es un número cuadrado[11].

Es importante prestar atención a este resultado puesto que nos permite entender cómo Fermat, inspirado por Diofanto, formularía este tipo de conjeturas, de las cuales UTF es solamente una, y no una a la que él hubiera asociado desde un principio una importancia intrínseca particular. Además es este el resultado en donde Fermat presentó por primera vez el método del descenso infinito. El método puede usarse para formular una demostración del caso $n = 4$ de UTF, pero no nos consta que Fermat mismo haya escrito tal demostración. El caso $n = 4$ es importante por una razón fundamental: si UTF es válido para $n = 4$, queda claro que para probar el caso general es suficiente que UTF sea válido para los números primos. Podemos ver esto como una reducción significativa de la envergadura de la tarea, pero pronto se aclararía que la demostración general todavía quedaba muy distante.

Después que Samuel Fermat hubiera publicado en 1630 la *Aritmética* con los comentarios de su padre, y hasta mediados del siglo XVIII, los matemáticos apenas se ocuparon de resolver algunos de los problemas propuestos por Fermat, y nadie se ocupó de UTF. 1753 es el año en que Euler se incorpora a esta historia. La cantidad y el alcance de la producción científica de Euler son casi humanamente inconcebibles. Estuvo involucrado y contribuyó perceptiblemente a todos los campos de las matemáticas y la física que estaban activos durante su vida. Esto incluye también la teoría de números, aunque es importante enfatizar que en tiempos de Euler no había realmente un campo matemático llamado así. Había una colección heterogénea de problemas más o menos complejos y de técnicas que nunca fueron sistematizadas completamente, y que se veían como asociadas al campo de la "aritmética". De hecho, el término "aritmética superior" seguía en uso hasta el siglo XIX (y aún después), que es cuando el término "teoría de números", en uso hoy, comenzó a ser adoptado extensamente. Euler leyó el libro de Fermat, y obviamente se impresionó por las muchas ideas importantes que allí encontró. Solucionó algunos de los problemas allí propuestos, pero algunos de ellos no pudo, o simplemente no intentó solucionarlos.

Fermat sugirió muchas conjeturas sin demostración. Sus contemporáneos y algunos matemáticos de las generaciones siguientes intentaron solucionarlas. A veces lo lograron y a veces no, ya que algunas resultaron ser más difíciles y requirieron mayores esfuerzos. Algunas de ellas fueron solucionadas por matemáticos prominentes, como Euler, y la solución de algunas escapó incluso a matemáticos como Euler. En 1770, por ejemplo, otro matemático muy prominente, Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813), con contribuciones importantes en muchos campos de las matemáticas y de la física, incluyendo la teoría de números, solucionó otro problema propuesto por Fermat, que Euler tam-

[11] Un detallado y fascinante estudio histórico de este resultado y de la forma en que fue leído, desarrollado y diseminado por sucesivas generaciones aparece en [Goldstein 1995].

bién intentó resolver sin éxito, a saber, que cualquier número entero se puede escribir como la suma de no más de cuatro números cuadrados.

Euler discutió ideas de Fermat primordialmente en correspondencia con su amigo Christian Goldbach (1690-1764), cuya famosa conjetura (que no ha sido probada hasta el día de hoy) ya fue mencionada. La correspondencia se inició en 1729 y duró por más de treinta y cinco años. Euler y Goldbach discutieron ante todo problemas de física matemática, series infinitas e integración, y en cierta medida también problemas de aritmética superior. Cuando el nombre de Fermat es mencionado en este contexto, muy rara vez lo es en conexión con UTF. Desde un principio, Fermat se menciona sobre todo en relación con el problema de los ya mencionados números de Fermat. En 1753 es la primera vez que UTF se menciona, en la última media página de una carta en la cual Euler discutió muchas otras ideas.

Euler le mencionó a Goldbach este teorema "muy hermoso" de Fermat. Declaró tener demostraciones para los casos $n = 3$ y $n = 4$, y añadió que estas dos demostraciones son tan distintas que no sabría cómo llegar de ellas a una que sirva para el caso general. Inclusive la prueba para el caso $n = 5$ no había podido aún encontrarla [Fuss 1843, Vol. 1, 618]. Esto es todo lo que dijo en esa carta. En una carta escrita dos años más tarde, leemos que Euler no tenía duda de que Fermat había en verdad logrado la demostración mencionada en el margen de su libro y en la misma oportunidad repitió que sus esfuerzos para descubrirla por sí mismo habían sido en vano hasta ahora [Fuss 1843, Vol. 1, 623]. En 1770 Euler publicó un texto de álgebra y la prueba ahí publicada del caso $n = 3$ de UTF, a pesar de ser muy ingeniosa, contiene un error no trivial [Euler 1770]. Por otra parte, la idea necesaria para corregir dicha demostración aparece en otros lugares en su trabajo que se relacionan con ideas de Fermat [Euler 1760].

Es importante recalcar que la correspondencia entre Goldbach y Euler abunda en discusiones de problemas numéricos de todo tipo. La atención dedicada a UTF es realmente marginal. Es más, para poner un ejemplo, en la mencionada carta de 1753, Euler añadió su propia idea original sobre cómo generalizar el mismo problema de Diofanto. Como las ecuaciones $a^2 + b^2 = c^2$ y $a^3 + b^3 + c^3 = d^3$ tienen soluciones enteras uno podría conjeturar que $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$ debería tenerla también. Euler no había hallado aún una tal solución, pero sí había encontrado cinco enteros bicuadrados cuya suma es también un bicuadrado. En 1778, refiriéndose una vez más a UTF, Euler sugirió otra generalización (citado en [Dickson 1919, Vol. 2, 648]):

> Muchos geómetras han pensado que este teorema puede ser generalizado. Así como no existen dos cubos cuya suma o diferencia es un cubo, es claro que es imposible encontrar tres bicuadrados cuya suma sea un bicuadrado. Cuatro bicuadrados por lo menos son necesarios para que la suma sea un bicuadrado, aunque nadie ha podido hasta hoy encontrar esos cuatro bicuadrados. Asímismo,

es imposible encontrar cuatro quintas potencias cuya suma sea una quinta potencia y similarmente para potencias mayores.

Esta es, pues, la manera en que Euler reaccionaría frente a una idea como la de Fermat u otra similar. Claro que uno podría ver en esto una muestra más de cómo UTF estimuló a los matemáticos a crear nuevas ideas, pero si es así, no lo es de ninguna manera especial que no podríamos haber encontrado en muchos otros ejemplos parecidos. ¿Quién podría haber dicho a priori cuál de todas estas ideas sería de fácil o de difícil solución, y cuánta energía matemática demandaría cada uno de esos problemas en las décadas (o siglos) por venir? Ciertamente no Euler, quien mostró un interés similar por todos ellos. Y de hecho, esta conjetura en particular, sobre la imposibilidad de encontrar tres bicuadrados cuya suma es un bicuadrado, tuvo una historia interesante de por sí, y fue sólo en 1988 cuando Noam Elkies, en Harvard, encontró un contraejemplo realmente asombroso [Elkies 1988]:

$$2,682,440^4 + 15,365,639^4 + 18,796,760^4 = 20,615,673^4.$$

¿Qué aprendemos de todo esto? Dentro de esta tradición de intentos esporádicos y no sistemáticos de resolver conjeturas aritméticas de todo tipo, con gran ingeniosidad y talento matemático, pero sin una teoría coherente y comprehensiva, muchos de los problemas abiertos que Fermat legó a sus colegas en la teoría de números fueron solucionándose gradualmente. El que nos ocupa aquí se convirtió progresivamente en la "última" conjetura no probada de Fermat. Así fue como comenzó a recibir particular atención. Poco a poco, el hecho de no haber sido resuelta por ningún matemático le agregó un encanto especial. De los 350 años en que el problema supuestamente desafió las mejores mentes matemáticas, en los primeros ciento cincuenta muy pocos esfuerzos se dedicaron realmente a solucionarlo.

4 UTF entre 1800 y 1847

Tampoco en la primera gran codificación y sistematización de la teoría de los números a principios del siglo XIX encontramos un lugar especial para UTF. Me refiero al monumental *Disquisitiones Arithmeticae* publicado en 1801 por Gauss. Este libro, cuya influencia puede compararse solamente a la de los *Elementos* de Euclides, presentó por primera vez, de una manera sistemática y comprehensiva, una cantidad enorme de resultados que hasta entones se veían como una colección de problemas separados y de técnicas diversas. El libro de Gauss esencialmente estableció el campo de la teoría de números tal y como sería conocida y practicada en el siglo XIX, especialmente en Alemania. Es por eso natural que cualquier relato de la historia del UTF plantee la pregunta: ¿cuál fue la actitud de Gauss hacia el problema?

En una carta publicada póstumamente en 1863, Gauss esbozó una posible prueba de UTF para el caso $n = 5$, notando que su método no sería aplicable en el caso $n = 7$ [*Gauss Werke*, Vol. 2, 390–391]. Pero su posición con respecto al problema aparece claramente formulada en una carta de 1816 [*Gauss Werke*, Vol. 2, 629] a su amigo, el astrónomo alemán Heinrich Olbers (1758-1840):

> Confieso que el último teorema de Fermat, como pregunta aislada, tiene un interés muy reducido para mí, porque podría fácilmente imaginar muchas proposiciones matemáticas de ese tipo, que uno no podría ni demostrar ni refutar.

Uno de los ejes principales alrededor del cual gira el contenido de las *Disquisitiones* es el problema de la "reciprocidad cuadrática", que para Gauss proporcionaría un ejemplo clásico de lo que constituye un problema matemático verdaderamente interesante (y, como vimos ya, Hilbert continuaría considerándolo como tal un siglo más adelante; diremos más sobre este problema en lo que sigue). Gauss publicó durante su vida nada menos que siete demostraciones diversas del "teorema de la reciprocidad cuadrática". Había una razón importante para ocuparse tanto con un mismo problema, especialmente después de solucionarlo satisfactoriamente. En cada una de las siete pruebas, Gauss esperaba encontrar una vía que le permitiera generalizarla al problema de la "reciprocidad superior" es decir, para potencias n-ésimas mayores de dos, y, de hecho, él mismo solucionó con éxito el problema para los casos $n = 3$ y $n = 4$[12].

Particularmente importante como parte de sus esfuerzos relativos al problema de la reciprocidad fue la introducción y el estudio de una nueva clase de números, los así llamados "enteros gaussianos", a saber, números de la forma $a+ib$, donde i representa como de costumbre la raíz cuadrada de -1, mientras que a, b son números enteros cualesquiera. Los números enteros gaussianos son un subconjunto de los números complejos, y constituyen de hecho un anillo, puesto que la suma y el producto de cualesquiera dos números enteros gaussianos producen otra vez un número entero gaussiano. Así pues, en muchos respectos, los números enteros gaussianos se comportan como números enteros estándar. Al introducir esta idea como herramienta para investigar el problema de la reciprocidad, Gauss se preguntó hasta qué punto podría extenderse la analogía entre los números enteros estándar y los gaussianos. La idea de obtener información significativa sobre números enteros por medio de dominios que incluyen ciertos números complejos fue introducida por Euler, precisamente al investigar cuestiones del tipo mencionado arriba, pero fue Gauss quien la sistematizó y la hizo conocida extensamente entre los matemáticos. Intentos adicionales de generalizar esta idea vendrían a desempeñar un papel importante en la historia de la teoría de números y en particular de UTF, como veremos a continuación. En su carta a Olbers, Gauss manifestó su clara opinión que el desarrollo correcto de su teoría de enteros gaussianos y sus posibles generalizaciones conduciría a descubrimientos importantes, entre los

[12]Para un breve sumario con referencias, ver [Corry 2003, 81-85].

cuales UTF "aparecería solamente como un corolario, y de hecho uno de los menos interesantes" de tal teoría.

Gauss se conecta a la historia de UTF a través de una figura verdaderamente notable que aparece al final del siglo XVIII, la ya mencionada Sophie Germain. La correspondencia entre los dos es de gran interés y entre otras cosas Germain mencionó en ella sus ideas relativas a UTF. Pero la gran mayoría de las ideas discutidas entre ellos tiene que ver solamente con los dos grandes tipos de problemas que Gauss discute en *Disquisitiones*, a saber, el problema de reciprocidad y el problema de las formas cuadráticas y de grados mayores. Gauss, que participó en esta correspondencia con gran dedicación y hasta admiración por Germain, nunca se refirió a UTF, ni siquiera para comentar lo que Germain le había escrito[13].

La contribución de Germain a la solución de UTF significó un avance decisivo, al probar un teorema realmente importante que desde entonces lleva su nombre: "si n y $2n+1$ son dos números primos (como 5 y 11), y si tres números enteros x, y, z satisface la fórmula $x^n + y^n = z^n$, entonces uno de los tres números x, y, z es divisible por n".

La consecuencia inmediata más importante de este teorema es que UTF puede ahora ser dividido en dos casos separados, a saber:

> Caso I - no existen tres enteros x, y, z que satisfacen $x^n + y^n = z^n$, y tales que ninguno de ellos es divisible por n;
>
> Caso II - no existen tres enteros x, y, z que satisfacen $x^n + y^n = z^n$, y tales que uno, y sólo uno de ellos, es divisible por n.

Esta separación en dos casos, que continúa siendo asociada con el teorema y sus demostraciones hasta el día de hoy, se tradujo en considerable progreso hacia la demostración general. De hecho, Germain misma probó la validez del caso I del teorema para toda potencia n menor que 100, y Legendre amplió su prueba a toda potencia n menor de 197. El caso II resultó ser mucho más difícil. Para $n = 5$, el caso II fue demostrado solamente en 1825 en dos trabajos complementarios de Legendre y Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859). Dirichlet también probó en 1832 el caso II para $n = 14$, y esto lo hizo mientras que intentaba hallar la prueba para $n = 7$. Este último caso resultó ser especialmente difícil, y finalmente fue demostrado en 1839 por Gabriel Lamé (1795-1870)[14].

Estamos ahora más de doscientos años después de la observación marginal de Fermat, y todo lo que tenemos es una colección de resultados dispersos, así como algunas nuevas técnicas, no todas desarrolladas específicamente para solucionar el problema. El teorema de Sophie Germain es un resultado matemático respetable e interesante, directamente motivado por UTF, cuyas

[13]La correspondencia se publicó en [Boncompagni 1880]. Véase también [del Centina].

[14]Explicaciones sobre los teoremas y demostraciones mencionadas en este párrafo aparecen, junto con referencias detalladas a la literatura original, en [Edwards 1977, 59–75].

consecuencias significativas comienzan a clarificarse gradualmente. Ninguno de los matemáticos que han contribuido, incluyendo a Germain, estaban de ningún modo cerca de haber dedicado sus esfuerzos tan sólo a UTF. Al mismo tiempo, algunos matemáticos comienzan a entender que el problema puede ofrecer un interés matemático especial, después de todo, si no se ha solucionado hasta ahora. A principios de los años 1820 la Academia Francesa en París ofreció uno de sus premios a quien encontrara la demostración [Legendre 1823, 2], pero UTF fue incluido en el Gran Premio de la Academia solamente en 1857. La prueba de Lamé para $n = 7$ era compleja, y fue quizás la primera que incluyó el desarrollo de una nueva técnica dedicada específicamente a solucionar el problema. El mismo Lamé estuvo involucrado en el episodio matemático más importante relacionado directamente con UTF, que tuvo lugar en París en 1847, y que merece ahora una discusión más amplia.

Nos encontramos ahora con el primer caso de un grupo de matemáticos prominentes que dedican discusiones serias, específicamente enfocadas en el intento de probar la conjetura. El grupo, reunido en la Academia de París, incluía estrellas tales como Augustin Louis Cauchy (1789-1857) y Joseph Liouville (1809-1882). Sin embargo, para definir la situación correctamente uno debe tener constantemente presente que mientras discutían UTF en la Academia y trataban nuevas vías para resolverlo, estos matemáticos dedicaban simultáneamente sus esfuerzos a varios problemas en otros campos. En marzo, Lamé presentó a sus colegas lo que él veía como una vía posible de solucionar el caso general de UTF. Lamé utilizó una idea sugerida originalmente por Liouville, que involucraba la factorización de una suma de números enteros en factores complejos de cierto tipo, como sigue:

$$x^n + y^n = (x + y)(x + ry)(x + r^2y) \cdots (x + r^{n-1}y)$$

Aquí n es un número natural impar, y r es un número complejo llamado una raíz de la unidad, a saber, un número que satisface la condición: $r^n = 1$ con $r \neq 1$. Partiendo de esta factorización, Lamé aplicaría un argumento basado en el método del descenso infinito, conduciendo así a una contradicción. Así, combinando de una manera muy ingeniosa ideas de varios matemáticos como Fermat mismo, Gauss, y Liouville, creía Lamé haber solucionado el problema.

Desde un principio surgieron dudas sobre la validez del argumento de Lamé, y Liouville mismo estaba entre los que manifestaron tales dudas. Se desarrollaron discusiones muy interesantes, a veces cargadas de tonos personales. Por una parte, se discutía la pregunta quién había sido el primero en introducir la idea decisiva para la prueba. Por otra parte, había un punto técnico bastante delicado, a saber, si el lado derecho de la ecuación antedicha satisface la condición muy importante de la unicidad (o sea, si la suma de la izquierda admite otra factorización diferente de ésta), que es una propiedad básica del caso de los números enteros estándar, y que Gauss había probado también para el caso de los enteros gaussianos. En mayo llegaron noticias decepcionantes en una carta leída por Liouville y enviada desde Alemania por Kummer. En 1844 éste había publicado un artículo, que estaba enviando ahora, que invalidaba retrospectivamente la demostración de Lamé a pesar de la idea brillante que aquella usaba. El artículo de Kummer demostraba directamente que la factorización que empleada no era única, como Lamé asumía tácitamente[15].

Kummer también les informaba que había desarrollado una teoría de "números complejos ideales" destinada a restaurar un tipo de factorización única en dominios como aquellos en que él había notado que tal unicidad puede fallar. La teoría lo había llevado a identificar cierto tipo de enteros primos, que el llamó regulares, y que tienen una relevancia directa al problema de UTF. Kummer probó, de hecho, que UTF es válido para todos los primos regulares. Posteriormente encontró un criterio operacional para identificar si un primo dado es irregular, usando los llamados números de Bernoulli. Calculando directamente en cada uno de los primos menores de 100, encontró que los únicos de entre éstos que no son regulares son 37, 59, y 67. Para ellos, Kummer encontró demostraciones separadas y de esta manera alcanzó el impresionante resultado de que UTF es válido para todos los exponentes hasta 100 [Kummer 1857][16].

Las brillantes ideas introducidas por Kummer abrían una clara vía de investigación que en principio podía ser seguida por cualquier matemático que quisiera continuar con la investigación de UTF. Lo que se necesitaba era buscar dentro de la secuencia de números primos aquellos que no sean regulares, y para ellos el teorema se debería probar por separado. Era claro que esto requeriría un gran trabajo de cálculo, pero no parecería haber obstáculos de principio. Y sin embargo, el hecho histórico es que este camino nunca fue tomado seriamente, a excepción de algunos pocos matemáticos como veremos más adelante.

Esto no quiere decir que las ideas de Kummer no tuvieran resonancia alguna. Por el contrario, ellas sirvieron de punto de partida que llevó al desarrollo de teorías matemáticas de enorme importancia, pero sin relación alguna con UTF. A través de los esfuerzos de matemáticos como Richard Dedekind (1831-1916) y Leopold Kronecker (1823-1891), la elaboración de ideas inherentes en la teoría de los números complejos ideales llevó a una redefinición total de la manera en que el fenómeno de factorización debía ser investigado, y de hecho también la manera en que el concepto de "entero" debía ser definido. La teoría algebraica de números surgió de los trabajos de Dedekind y de Kronecker al sistematizar la teoría de Kummer, y eventualmente, especialmente bajo influencia del enfoque de Dedekind, dio lugar a lo que se conocerá como

[15] Para detalles ver [Edwards 1977, 76–151].

[16] Su demostración contenía algunos problemas que fueron corregidos posteriormente por varios matemáticos, culminando en [Vandiver 1926].

"álgebra conmutativa", de impacto penetrante en las matemáticas del siglo XX[17].

Es por eso que se ha dicho repetidamente (y también Hilbert lo sugirió en su discurso de 1900) que UTF jugó un papel crucial en la historia de las matemáticas, ya que, en sus esfuerzos relacionados con este problema, Kummer desarrolló ideas centrales para el desarrollo de la teoría de números y el álgebra conmutativa modernas[18]. Sin embargo, tampoco este momento específico de gloria puede atribuírsele a UTF sin reservas considerables, como veremos a continuación.

En su carta a Liouville en 1847, Kummer aclaró que la demostración de UTF lo había ya ocupado por un tiempo. En otras ocasiones, sin embargo, explicó claramente su opinión de que UTF era "una curiosidad en teoría de números, más bien que un asunto importante". Como Gauss, también Kummer pensaba que el problema de reciprocidad superior era la "tarea central y el pináculo del logro en la investigación en teoría de números". Realizó una investigación importante en este campo, siguiendo los pasos de Carl Gustav Jacobi (1804-1851), y hasta la notación que usó en su trabajo sobre los complejos ideales era una continuación de la de Jacobi. Solamente tras muchos esfuerzos, y después de haber realizando largos y complejos cálculos con dominios generales de números que generalizaban la idea de los enteros gaussianos, con el fin de entender más a fondo el problema de la reciprocidad superior, fue que Kummer entendió que la suposición tácita de la factorización única podría fallar[19]. Solamente en 1847 Kummer aplicó su teoría de números complejos ideales a UTF, y la interesante demostración del teorema para primos regulares no apareció antes de 1858. En esa oportunidad Kummer recibió el Gran Premio de la Academia Francesa. En esos mismos años Kummer publicó muchos trabajos importantes sobre el problema de la reciprocidad superior. Este último, y no UTF, había sido obviamente la principal motivación que condujo a la introducción de su teoría de números primeros ideales[20].

5 La Teoría de Números deja de lado a UTF

En las décadas que siguieron, pocos matemáticos añadieron contribuciones a la investigación de UTF. Los libros de texto en teoría de números escritos después de 1860 dedican generalmente alguna sección a UTF, típicamente con algún mensaje didáctico en mente. Pero en textos orientados a la investigación,

[17] Ver [Corry 2003, Ch. 2].

[18] Esta opinión, repetidamente citada, se dió a conocer por primera vez a través de [Hensel 1910].

[19] Edwards

[20] Este punto de vista sobre el trabajo de Kummer y sus motivaciones ha sido desarrollado en detalle y propiamente documentado por Harold Edwards, especialmente en [Edwards 1977] y [Edwards 1977a].

el problema apenas es mencionado. En este sentido es interesante considerar la más importante compilación y presentación sistemática de la teoría de finales de siglo, el *Zahlbericht* de David Hilbert. Comisionado inicialmente por la Asociación de Matemáticos Alemanes (DMV) como un informe comprehensivo sobre el estado actual en la disciplina, Hilbert resumió en 1896 el trabajo de sus precursores pero también agregó muchos nuevos resultados y sofisticó técnicas, abriendo de hecho nuevas avenidas para la investigación que muchos seguirían en las décadas por venir. El papel desempeñado a fines del siglo XIX en teoría de números por este importante texto es muy similar al jugado por *Disquisitiones* cien años antes. En muchos sentidos, la historia de la teoría de números algebraicos en el siglo XIX es lo sucedido entre el libro de Gauss y el de Hilbert. Y exactamente como en el primero, el problema de la reciprocidad sigue teniendo aquí un papel central, mientras que UTF recibe mínima atención: solamente en la última sección del libro, cinco páginas discuten una demostración de UTF para primos regulares. Hilbert usaba aquí ideas de un artículo publicado en 1894, donde había corregido un error de Kummer, quien pensó haber demostrado la imposibilidad de $x^n + y^n = z^n$ para enteros ciclotómicos (y no sólo para enteros racionales). La prueba de Hilbert, como gran parte del *Zahlbericht*, reformulaba las ideas de Kummer en términos de los conceptos y las técnicas introducidos por Dedekind en su teoría de los campos de números algébricos.

¿Qué hicieron en relación con UTF los matemáticos que se dedicaron a este campo de investigación? Dedekind y Kronecker dedicaron poco o nada de esfuerzo a este problema. Dirichlet, como ya vimos, contribuyó con una importante demostración para $n = 14$. Antes de ellos, los dos matemáticos con contribuciones más importantes a la teoría de la reciprocidad superior fueron Jacobi y Gothold Eisenstein (1823-1852), ninguno de los cuales dedicó atención alguna a UTF. Entre los investigadores destacados de la teoría de números a fines del siglo XIX o principios del XX la gran mayoría ni contribuyeron a UTF ni mostraron interés en el problema, como por ejemplo sucede con Hermann Minkowski (1864-1909), Alexander Ostrowski (1893-1986), Emil Artin (1898-1962), y Carl Ludwig Siegel (1896-1981).

Hemos mencionado el premio establecido por Wolfskehl en 1908. Es bien sabido que este premio impulsó a cientos de aficionados a enviar a Göttingen sus supuestas respuestas, que obviamente poco tenían que ofrecer en términos de contribución matemática significativa. Lo que es realmente curioso es que el premio parece haber tentado también a algunos matemáticos destacados que de otra manera no demostraron ningún interés especial por este problema y ahora decidieron probar sus fuerzas. Tal es el caso de Erich Hecke (1887-1947), Philip Furtwängler (1869-1940), y Felix Bernstein (1878-1956) cuyos trabajos fueron comunicados por Hilbert mismo a la Academia de Ciencias de Göttingen [Hecke 1910, Furtwängler 1910, Bernstein 1910, 1910]. Bernstein, por ejemplo, jamás publicaría trabajo alguno en teoría de números antes o después de esto. Furtwängler, por su parte, aclaraba en un nota al pié de página que a pesar de que el estado actual de su investigación no lo satisfacía aún plenamente, el reciente despertar del interés en el problema causado por el anuncio del premio lo llevó a publicar ahora sus resultados.

Otra fuente importante para juzgar el valor acordado a UTF se encuentra en la Historia de la Teoría de Números publicada entre 1919 y 1923 por Leonard Eugene Dickson (1875-1954). De las casi ochocientas páginas y treinta y siete capítulos que componen este libro en tres volúmenes, Dickson dedicó un capítulo de cuarenta y cinco páginas para anotar todos los trabajos que de una forma u otra pueden considerase contribuciones a UTF. La lista incluye unas 240 entradas después de los trabajos de Kummer. La gran mayoría son artículos muy cortos (de una a tres páginas) y matemáticamente poco importantes. Entre ellos hay muchos que mejoran marginalmente algún resultado anterior, o que incluyen algún tipo de sumario de lo hecho con anterioridad. Dickson pronunció claramente su opinión con respecto a UTF: "está desprovisto de toda importancia especial intrínseca, y si una demostración completa llega a publicarse perderá para siempre su fuente principal de atracción".

La mayoría de los matemáticos mencionados por Dickson en relación con UTF están lejos de ser prominentes. Por otra parte, matemáticos renombrados que se mencionan en la lista aparecen con trabajos de importancia menor, y de hecho marginales. Un caso interesante es el de Ferdinand Lindemann (1852-1939), quien fue consejero doctoral de Hilbert, y se convirtió en un matemático muy famoso y bien conectado después de la publicación, en 1882, de su demostración de la trascendencia de π. Después de haber publicado este trabajo tan importante, Lindemann nunca publicó algo digno de mención. Sin embargo, un lugar en donde probó sus fuerzas fue precisamente UTF, sobre el cual publicó cuatro intentos entre 1901 y 1909, todos ellos fallidos y a veces de modo trivial. Entre los matemáticos mencionados por Dickson, aquellos cuyas contribuciones se consideraban realmente significativas como avance en la demostración general de UTF después de Kummer fueron Dimitry Mirimanoff (1861-1945) y Arthur Wieferich (1884-1954). Incluso en el caso de estos dos matemáticos, sus trabajos sobre UTF deben verse en el contexto apropiado.

Wieferich publicó tan solo nueve artículos en su vida. Tratan todo tipo de problemas numéricos, y de ellos cuatro pueden considerarse de importancia. Sólo uno de ellos trata de UTF [Wieferich 1909]. Mirimanoff, por su parte, fue un matemático versátil con importantes contribuciones a la teoría de conjuntos, las probabilidades y la teoría de números. De unos 60 trabajos publicados, unos doce se relacionan de alguna manera con UTF y de ellos unos seis contienen contribuciones significativas. En uno de ellos, [Mirimanoff 1904], él indicaba con cierto asombro que algunos de los criterios importantes que ya Kummer había desarrollado en el Caso I de UTF hubieran recibido tan poca atención y que su importancia no se hubiera apreciado debidamente. De hecho, un solo artículo escrito entre 1857 y 1904 [Cellérier 1894-97] había enfocado la pregunta que ahora Mirimanoff trataba, y eso sin llevar a ningún resultado digno de mención[21].

UTF en el siglo XX: la ruta a Wiles y otras rutas olvidadas

En la primera mitad del siglo XX podemos reconocer algunos esfuerzos adicionales para demostrar UTF. La gran mayoría de ellos tuvo poco que ver con el tren de ideas que eventualmente condujo a la prueba de Wiles. Muchas narrativas populares recientes sobre UTF, publicadas después de la demostración de Wiles, dejan en el olvido todos aquellos trabajos que no llevaron directamente a ella[22]. Así como Singh encontró la manera de introducir a Galois en su narrativa, a pesar de tener poca o ninguna conexión con la historia de UTF, así también todos los matemáticos involucrados en esfuerzos interesantes de solucionar UTF por vías diferentes a las que llegarían a Wiles ni siquiera se mencionan en su libro. En esta sección quisiera describir muy brevemente la vía que condujo a la demostración de Wiles y junto con eso, algunos de los trabajos que se hicieron en el siglo XX siguiendo la vía abierta por Kummer a mediados del XIX.

La prueba de Andrew Wiles es de hecho una demostración de un caso importante de TSW, la conjetura de Taniyama-Shimura-Weil (el caso llamado "semi-estable"). El contexto matemático en donde la conjetura apareció y fue investigada inicialmente en los años de 1950 no tenía nexo alguno con UTF. La primera indicación de un nexo posible se derivó de una conjetura de Gunther Frey en 1985, que sugirió que la validez de UTF podría deducirse de la validez de TSW. En 1985, Kenneth Ribet probó definitivamente que el UTF es de hecho consecuencia directa de TSW. En este punto la prueba de UTF parecía estar realmente por primera vez al alcance de la mano, a través de una tarea claramente definible, aunque posiblemente difícil: probar TSW.

[21] Sobre Mirimanoff y sus trabajos, ver [Vandiver 1952].

[22] Además del libro de Singh, podemos mencionar en este contexto [Vos Savant 1993] y [Aczel 1996].

Kenneth Ribet

En toda la historia de UTF, el episodio que involucra a Wiles es sin duda el que más se acerca al tipo de drama que una narrativa como la de Singh han tratado de sugerir. La palabra "obsesión" tiene cierto sentido al hablar de Wiles y UTF, sobre todo en los ocho años de reclusión autoimpuesta. El drama llegó a su clímax en la famosa charla de Wiles en Cambridge en 1993 donde presentó sus resultados, y el error encontrado seguidamente que obligó a Wiles a dedicar otros ocho meses antes de poder lograr, en colaboración con Richard Taylor, la conclusión final de su prueba.

El interés de Wiles por UTF empezó, según su testimonio, en la niñez, al haber leído el libro de E.T. Bell, *El último problema*. Este libro, junto con el más conocido *Men of Mathematics*, son los dos ejemplos más conocidos de trabajos de popularización de matemáticas en los cuales la sobredramatización y la repetición de leyendas muchas veces infundadas funcionan como estrategia narrativa central. Pero es este enfoque precisamente el que causó esa gran impresión en muchos jóvenes lectores, y llevó a algunos de ellos a ampliar sus conocimientos y a veces hasta seguir una carrera científica. Este fue sin duda el caso de Wiles[23]. Creo que no es muy arriesgado conjeturar que si el joven Wiles hubiera leído una narrativa histórica como la que he presentado aquí –con todos los méritos historiográficos que espero que tenga– es muy baja la probabilidad de que esto lo hubiera movido a pensar que UTF era un problema que merece atención y dedicación, y mucho menos que lo hubiera impulsado a seguir una carrera profesional como matemático con la esperanza de llegar él mismo a resolverlo. El libro de Bell logró esto y con creces.

Andrew Wiles de niño

Sea como sea, al convertirse en matemático profesional, Wiles entendió que los métodos existentes para atacar UTF habían sido esencialmente agotados. Dedicarse de lleno a buscar la solución de UTF no parecía una decisión razonable para quien quería desarrollar ahora una carrera matemática. Sin

[23]Este relato, frecuentemente repetido, ha sido confirmado por Wiles mismo.

perder sus conexiones emocionales con el problema, Wiles efectivamente desarrolló una carrera distinguida trabajando en otros campos, y entre ellos la teoría de las curvas elípticas. Pero al enterarse en 1986 de la demostración de Ribet, su viejo interés se despertó nuevamente y Wiles decidió ahora dedicarse de lleno a la prueba, que eventualmente llegó a completar como es bien sabido.

¿Y qué podemos decir de las vías alternativas exploradas en el siglo XX? Quien quisiera averiguar el estado de la investigación sobre UTF a fines de los años 1970 podía leer una de varias descripciones detalladas escritas por expertos en la materia en forma de libros o artículos profesionales (por ejemplo [Edwards 1977, Ribenboim 1980]). El lector no encontraría en ellas ninguno de los nombres que se asociaron finalmente con UTF, como Wiles, Taniyama o Shimura. Por el contrario, encontraría muchos nombres que no habían aparecido aún en 1918 en el libro de Dickson, o que apenas se mencionaron. Para entender los (relativamente pocos) esfuerzos dirigidos al problema en el siglo XX es necesario mencionar algunos aspectos del desarrollo de la teoría de números en general.

Según lo indicado ya, el desarrollo más importante derivado del trabajo de Kummer sobre números complejos ideales fue la creación de la teoría de los cuerpos de números algébricos a manos de Kronecker y de Dedekind. Estos dos matemáticos dieron un ímpetu enorme a una nueva disciplina matemática, mientras que complementaban mutuamente los teoremas, las pruebas y las técnicas que cada uno de ellos elaboró. Sin embargo, ellos representaban dos enfoques muy diferentes, y en un cierto sentido opuestos, respecto a la esencia misma de la práctica matemática. Kronecker representó lo que se puede llamar un enfoque más "algorítmico", mientras que Dedekind era el representante más puro del enfoque "conceptual". Esto no significa que Kronecker no introdujo ningún nuevo concepto del cual podía derivar nuevos resultados, o que uno no encuentre ningún cálculo en los trabajos de Dedekind. Lo que quiere decir es que el foco principal del interés de los dos era esencialmente diferente. En la teoría de Kronecker, el énfasis está en los cálculos específicos realizados en casos individuales de los sistemas numéricos a investigar. En el enfoque de Dedekind, la tarea principal es encontrar la formulación abstracta más general y adecuada que subsuma la situación investigada, para poder derivar resultados generales como parte de teorías sistemáticamente elaboradas, evitando al mismo tiempo, donde sea posible, los cálculos o el análisis de casos específicos en detalle, aún los más importantes entre ellos.

El énfasis "conceptual" o "estructural" incorporado al trabajo de Dedekind, en contraste con el más "algorítmico" de Kronecker, pronto se convirtió en dominante en la teoría de números algebraicos, y se difundió eventualmente a toda el álgebra y a muchos otros dominios matemáticos, para convertirse de hecho en la corriente principal, característica de la disciplina entera de las matemáticas a lo largo del siglo XX. En este contexto, la influencia enorme del *Zahlbericht* fue quizás el factor decisivo en lo que a la teoría de los números concierne, puesto que al combinar los logros de Kronecker y de Dedekind, dio una precedencia definida al enfoque de este último. Hilbert declaró explícitamente que había hecho todo esfuerzo posible para evitar la "elaborada maquinaria de cómputo" de Kummer, y por seguir el principio de Riemann según el cual una prueba tiene que ser alcanzada no por cálculos, sino más bien por "ideas puras" donde esto sea posible [Hilbert 1897, 180]. También su amigo Minkowski, no menos prominente que Hilbert en la teoría de números, siguió sistemáticamente en sus trabajos un principio similar, que él denominó "el otro principio de Dirichlet", a saber, la idea que en matemáticas los "grandes problemas deben solucionarse con un mínimo de cálculos ciegos y con un máximo de pensamiento planeado de antemano" [Minkowski 1905, 162-163].

No deberíamos sorprendernos, entonces, de que la vía de Kummer, basada como estaba en el cálculo puro (alguno diría cálculo "ciego"), no fuera seguida por muchos matemáticos después de 1860. Y por el contrario, entre quienes sí siguieron los pasos del enfoque abierto por Kummer, es interesante notar que las contribuciones significantes publicadas en la primera mitad del siglo XX vinieron de matemáticos algo alejados de la corriente central. El primero de ellos es un matemático danés bastante desconocido llamado Kaj Løchte Jensen (confundido a menudo con Johan Ludvig Jensen), de quien sabemos apenas que era alumno de Niels Nielsen (1865-1931). Aún en el curso de sus estudios (que aparentemente no completó por razones de salud mental), Jensen demostró en 1915 que existen infinitos primos no-regulares (en realidad demostró que hay infinitos primos no-regulares de la forma $4k + 3$) [Jensen 1915, 82][24].

El artículo de Jensen nos proporciona una perspectiva adecuada sobre el tipo y la intensidad de la atención prestada por matemáticos trabajando en teoría de números a esta parte de los resultados derivados de los trabajos de Kummer. Kummer asumió inicialmente que al demostrar UTF para los primos regulares estaba probando el teorema para un número infinitos de casos. Aunque existen argumentos heurísticos que hacen tal suposición plausible, y el mismo Kummer conocía uno de ellos, un resultado de ese tipo no se ha demostrado hasta hoy. No fue hasta 1915 que alguien pensó seriamente en la pregunta y presentó una prueba directa relacionada con esta pregunta. Lo hizo Jensen, no un matemático de primera línea, y fue para probar que los irregulares, no los regulares, son infinitos. La prueba es realmente sencilla y no requiere ninguna idea que no hubiese sido desarrollada todos esos años. Jensen sostenía además en su artículo que este era un resultado comúnmente asumido, pero nunca demostrado. Es posible que así sea, o que por lo menos esto sea lo que Jensen escuchó de sus profesores, pero no hay realmente evidencia escrita (que yo conozca) que tal suposición se discutiera comúnmente. El resultado de Jensen no se menciona en 1919 en el capítulo correspondiente en la *Historia* de Dickson, sino solamente en una secuela publicada algunos años después

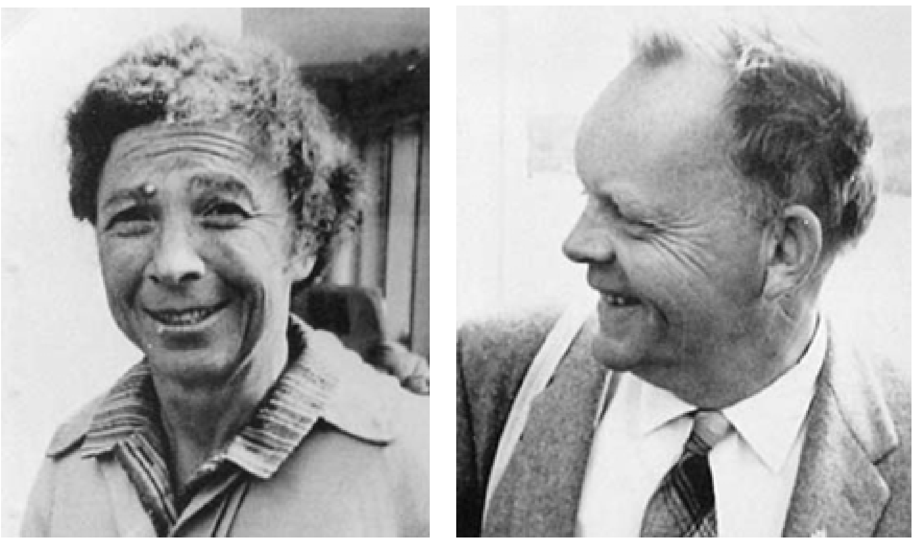
[24]Agradezco a Jesper Lützen y Christian U. Jensen en Copenhagen por haberme proprocionado alguna información (no documentada, desafortunadamente) sobre Jensen. La información proviene de Thøger Bang quien presumiblemente la escuchó de Harald Bohr.

[Vandiver & Wahlin 1928, 182]. Harry Schutz Vandiver (1882-1973) publicó el argumento de Jensen por primera vez en inglés en [Vandiver 1955] enfatizando que todavía no era bien conocido. Un año antes, Leonard Carlitz (1932-1977) demostró un resultado parecido y más general, sin la limitación $4k+3$ [Carlitz 1954].

El mismo Vandiver es el segundo matemático que quisiera mencionar aquí. Vandiver nunca recibió la educación formal típica del experto en teoría de números en su tiempo, y con el tiempo, al alcanzar un estatus más institucionalizado de matemático, también siguió siempre su propio rumbo original. En realidad, Vandiver nunca completó estudios secundarios y lo poco que estudió a nivel universitario lo hizo de manera esporádica y nunca sistemática. En 1900 comenzó a publicar trabajos de investigación original en varias revistas, algunos de ellos en colaboración con George David Birkhoff (1884-1944). Con el apoyo de Birkhoff, el matemático más influyente de su tiempo en los EEUU, Vandiver consiguió una posición en 1919 en Cornell. Ese mismo año colaboró con Dickson en la preparación del último volumen de su *Historia de la Teoría de Números*, preparando entre otros el capítulo sobre UTF. Más adelante Vandiver se trasladó a la universidad de Tejas, en donde obtuvo una posición permanente y trabajó por muchos años. A pesar de que sus investigaciones fueron siempre en álgebra y teoría de números, su posición en Texas estaba definida en el departamento de matemáticas aplicadas, posiblemente por diferencias profesionales y personales con el entonces todopoderoso Robert Lee Moore (1882-1974). A partir de 1924 Vandiver publicó una muy larga serie de artículos sobre UTF, convirtiéndose en el gran experto norteamericano del problema, y tal vez el mayor experto en el mundo. Uno de sus trabajos más importantes, publicado en 1929, le valió el premio Cole de la *American Mathematical Society*, otorgado a trabajos excepcionales en teoría de números [Vandiver 1929]. Vandiver fue tal vez el único matemático activo y de monta que dedicó gran parte de su vida profesional a este tema, pero es posible que muchos dudarían de calificarlo como matemático prominente.

Como parte de su trabajo en UTF, y a diferencia de muchos de aquellos quienes trabajaban a la sazón en teoría de números, Vandiver no vaciló en llevar a cabo, muchas veces en colaboración con un grupo de ayudantes, largos y tortuosos cálculos relacionados con la identificación de nuevos primos no-regulares. En cierto punto, Vandiver decidió usar una calculadora de escritorio, bastante sofisticada para su tiempo. Con ella llegó a probar en [Vandiver 1937] que UTF es válido para los exponentes primos menores que 619, incluyendo 36 casos de primos no-regulares. Las limitaciones técnicas impuestas por su máquina no le permitieron ir más allá de ese límite. Pero otro significativo avance lo logró en 1954 al colaborar con la pareja Emma y Derrick Lehmer de Berkeley. Los tres utilizaron por primera vez una computadora electrónica para un problema de esta clase.

Los Lehmer habían estado involucrados, juntos y cada uno por separado, en intentos de formular pruebas "estándar" relacionadas con UTF, así como en el uso de computadoras electrónicas para cálculos relacionados con números primos. Específicamente, ellos hicieron algunos de los cálculos significativos relacionados con el problema clásico de encontrar "primos de Mersenne". En 1941, por ejemplo, la pareja publicó un artículo que presentaba una síntesis de los métodos entonces aplicados a UTF, y que les permitía probar el caso I de UTF para todos los exponentes menores de 253.747.899 [Lehmer Lehmer 1941]. Más adelante, en un artículo escrito junto con Vandiver en 1954 [Lehmer, Lehmer & Vandiver 1954], utilizaron una calculadora electrónica para demostrar que casi la mitad de los primos menores que 2500 son no-regulares. Probaron la validez del teorema para exponentes menores o iguales a ese valor.



Emma y Derrick Lehmer

Esta colaboración abrió una nueva dirección de investigación, que está plenamente activa hasta el día de hoy. Matemáticos relacionados con esta dirección siguen calculando valores de validez cada vez más altos, a pesar de la demostración de Wiles que es totalmente general. Las técnicas que involucran el uso de computadoras electrónica cada vez más poderosas se siguieron desarrollando con ímpetu después de 1951, y su uso en matemáticas en general y en particular para encontrar pruebas matemáticas ha llegado a ser cada vez más común, aunque aun está lejos de llegar a ser corriente. UTF fue probado por métodos de este tipo para exponentes con valores sobre mil millones, y el caso I del UTF hasta valores mucho más altos que eso.

6 Conclusión

La narrativa que he presentado de UTF no pretende ser enteramente exhaustiva, pero sí quiere ser claramente representativa. En la historia de UTF uno no encuentra suicidios ni vidas enteras (o parciales) dedicadas al teorema, y mucho menos atormentadas o aun obsesionadas por él –excepto el caso de Wiles, y tal vez Vandiver–. Hemos visto matemáticos ocupados con todo tipo de problemas –algunos cercanos a UTF y otros sin ninguna relación– quienes a veces incursionaron e hicieron intentos furtivos de resolver el problema, y a veces lograron alguna contribución interesante. También encontramos muchas ideas ingeniosas –algunas de ellas, pero no muchas, con repercusiones en la teoría de números en general–, y mucha curiosidad (esencialmente pasiva) de parte de la comunidad matemática. Además, la teoría algebraica de los números se inició a partir de la teoría de Kummer, y ésta última se motivó tangencialmente de UTF, pero mucho más crucialmente del problema de reciprocidad.

En resumen: UTF nació en el margen físico del libro de Fermat. Para Fermat mismo y para decenas de matemáticos que se ocuparon de una manera u otra del problema durante más de 350 años él se mantuvo –esencialmente y con contadas excepciones– en los márgenes de sus intereses profesionales y en los márgenes de la investigación matemática en general. Ocasionalmente, el teorema hizo apariciones furtivas en pleno centro del escenario de la teoría de los números. Al final del camino, el trabajo de Wiles significó un profundo y sorpresivo *grand finale*, sin duda digno de admiración.

REFERENCIAS

[1] AMIR D. ACZEL, *Fermat's Last Theorem. Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem*, New York-London, Four Walls Eight Windows.

[2] KLAUS BARNER, "Paul Wolfskehl and the Wolfskehl Prize", *Notices AMS* **44** (1997) 10, 1294–1303.

[3] JUNE BARROW-GREEN, *Poincaré and the Three Body Problem*, Providence and London, American Mathematical Society/London Mathematical Society, 1997.

[4] FELIX BERNSTEIN, "Ueber den letzten Fermat'schen Satz", *Göttingen Nachrichten* (1910) 482–488 & 507–516.

[5] B. BONCOMPAGNI, "Cinq lettres de Sophie Germain à Charles-Frederic Gauss", *Archiv. Der Math. Phys, Lit. Bericht* **257** (1880) 27–31 & **261** (1880) 3–10.

[6] LEONARD CARLITZ, "A Note on Irregular Primes", *Proc. AMS* **5** (1954) 329–331.

[7] C. CELLÉRIER, "Démonstration d'un théorème fondamental relatif aux facteurs primitifs des nombres premiers", *Mém. Soc. Phys. Genève* **32** (1894-7) 7, 16–42.

[8] LEO CORRY, *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, Basel and Boston, Birkhäuser Verlag 2003 (Second, revised edition).

[9] —-, *Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918): From "Grundlagen der Geometrie" to "Grundlagen der Physik"*, Dordrecht, Kluwer, 2004.

[10] ANDREA DEL CENTINA, "Letters of Sophie Germain preserved in Florence", `http://web.unife.it/progetti/geometria/storia/Letteregermain_en.pdf`

[11] JOHN DERBYSHIRE, *Prime Obsession*, New York, Joseph Henry Press, 2003.

[12] KEITH J. DEVLIN, *The Millennium Problems: The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*, New York, Basic Books, 2002.

[13] LEONARD E. DICKSON, *History of the Theory of Numbers*, 3 Vols., New York, Chelsea, 1919.

[14] E. DU BOIS-REYMOND, *Ueber die Grenzen des Naturerkennens*, Vortrag in der 2. öffentlichen Sitzung der 45. Versammlung deutscher Naturforscher und Arzte, Leipzig am 14. August 1872, Leipzig.

[15] HAROLD M. EDWARDS, *Fermat's Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*, New York, Springer, 1977.

[16] —–, "Postscript to: 'The background of Kummer's proof of Fermat's last theorem for regular primes'", *Arch. Hist. Ex. Sci.*, **17** (1977) 381–394.

[17] N. ELKIES, "On $A^4 + B^4 + C^4 = D^4$", *Math. Comput.* **51** (1988) 828–838.

[18] LEONHARD EULER, "Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur", *Novi Comm. Acad. Sci. Petrop.* **8** (1763) 105–28 (Reprinted in *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol. 2, 556–575).

[19] —-, *Vollständige Anleitung zur Algebra*, 1970 (Reprinted in *Opera Omnia*, Ser. 1, Vol. 1).

[20] Philip Furtwängler, “Untersuchugen über die Kreisteilungskörper und den letzten Fermat’schen Satz”, *Göttingen Nachrichten* 1910, 554–562.

[21] P. H. Fuss (ed.), *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, St. Pétersbourg, 1843.

[22] Carl F. Gauss, *Werke* 12 Vols., Göttingen, 1863-1933.

[23] Catherine Goldstein, *Un théorème de Fermat et ses lecteurs*, St. Dennis, Presses Universitaires de Vincennes, 1995.

[24] Jeremy J. Gray, *The Hilbert Challenge*, New York, Oxford University Press, 2000.

[25] Erich Hecke, “Ueber nicht-reguläre Primzahlen und den Fermat’schen Satz”, *Göttingen Nachrichten* 1910, 420–424.

[26] Kurt Hensel, *Gedächtnisrede auf Ernst Eduard Kummer*, Festschr. Zur Feier des 100. Geburststages Eduard Kummers, Leipzig und Berlin, Teubner, 1910, 1–37.

[27] David Hilbert, “Die Theorie der algebraischen Zahlkörper (Zahlbericht)”, *Jahresb. DMV* **4** (1897) 175–546.

[28] Kaj Løchte Jensen, “Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal”, *Nyt Tidsskrift for Matematik* **26** (1915) 73–83.

[29] Robert Jungk, *Heller als tausend Sonnen*, Scherz & Goverts Verlag, 1956.

[30] Eduard E. Kummer, “Einige Satze über die aus den Wurzeln der Gleichung ... ”, *Math. Abh. Akad. Wiss.*, Berlin 1857, 41–74.

[31] Derrick H. Lehmer & Emma Lehmer, “On the First Case of Fermat’s Last Theorem”, *Bull. AMS* **47** (1941) 139–142.

[32] Derrick H. Lehmer, Emma Lehmer & Harry S. Vandiver, “An application of high-speed computing to Fermat’s last theorem”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **40** (1954) 25–33.

[33] Adrien M. Legendre, “Recherches sur quelques objets d’analyse indéterminée et particulièrement sur le théorème de Fermat”, *Mém. Acad. Sci. Inst. France* **6** (1823) 1–60.

[34] Walther Lietzmann, *Der Pythagoreischen Lehrsatz; mit einem Ausblick auf das Fermatsche Problem*, Leipzig, Teubner, 1912.

[35] Michael S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat. 1601-1665* (Second edition), Princeton University Press, 1994.

[36] Hermann Minkowski, “Peter Gustav Lejeune Dirichlet und seine Bedeutung für die heutige Mathematik”, *Jahresb. DMV*, **14** (1905) 149–163.

[37] Dimitry Mirimanoff, “Sur l’équation indeterminée $x^l + y`l + z^l = 0$ et le critérium de Kummer”, *J. für. Math.*, **128** (1904) 45–68.

[38] Paulo Ribenboim, *13 Lectures on Fermat’s Last Theorem*, New York, Springer, 1980.

[39] —–, *Fermat's Last Theorem for Amateurs*, New York, Springer, 1999.

[40] SIMON SINGH, *Fermat's Enigma*, New York, Walker and Company, 1997.

[41] STEPHAN SMALE, "Mathematical Problems for the Next Century", *Math. Intelligencer* **20** (1998) 2, 7–15.

[42] HARRY S. VANDIVER, "Summary of results and proofs on Fermat's last theorem (first paper)", *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* **12** (1926) 106–109.

[43] —–, "On Fermat's Last Theorem" *Transactions AMS* **31** (1929) 613–642.

[44] —–, "On Bernoulli numbers and Fermat's last theorem", *Duke Mathematical Journal* **3** (1937) 569–584.

[45] —–, "Les travaux mathématiques de Dmitry Mirimanoff", *L'Enseignement Mathematique* **39** (1952) 169–179.

[46] —– , "Is There an Infinity of Regular Primes?", *Scripta Mathematica* **21** (1955) 306–309.

[47] MARYLIN VOS SAVANT, *The World's Most Famous Math Problem*. New York, St. Martin's Press, 1993.

[48] ARTHUR WIEFERICH, "Zum letzten Fermat'schen Theorem", *J. für. Math.* **136** (1909) 293–302.

Leo Corry
Universidad de Tel-Aviv
Israel
Correo electrónico: `corry@post.tau.ac.il`