Historia

Sección a cargo de

Antonio J. Durán[1]

Una cuestión de placer

por

Antonio J. Durán

Placer: *Goce, disfrute espiritual; satisfacción, sensación agradable producida por la realización o suscepción de algo que gusta o complace; diversión, entretenimiento. Agradar o dar gusto.*
Diccionario de la RAE

Placer: *Sensación producida en los sentidos o en la sensibilidad estética por algo que gusta mucho; como un manjar exquisito, un baño en el mar o un trozo de música.*
Diccionario María Moliner

La RSME y la SAEM Thales han iniciado, como aventura conjunta, la edición de una colección de facsímiles de obras clásicas de las matemáticas acompañadas de un volumen crítico con traducción anotada y artículos explicativos. El primero de estos facsímiles, traducido y anotado, corresponde a la *Introductio in analysin infinitorum* de Leonard Euler y ya estará disponible a la salida de este número de la Gaceta.

Confieso que mi intención, como promotor de la idea dentro de la RSME, es, principalmente, la procura de placer para las socias y socios de la RSME, para los de Thales —la otra sociedad implicada— y, también, para todos aquellos interesados por este tipo de iniciativas culturales. También, pero en otro orden de cosas, soy consciente de la responsabilidad que una sociedad con

[1]Los interesados en colaborar con esta sección pueden dirigir sus contribuciones a la siguiente dirección: Antonio J. Durán; Sección Historia Gaceta RSME; Departamento de Análisis Matemático; Facultad de Matemáticas; Universidad de Sevilla; Aptdo. 1160; 41080–Sevilla; `duran@cica.es`

la RSME tiene de promover la constitución de un fondo editorial de clásicos de las matemáticas debidamente editadas en castellano.

Pero aquí me interesa tratar sobre todo la cuestión del placer; conviene, cuanto antes, explicar con detalle las claves para llevar a buen fin tarea tan ardua como es esta de dar gusto. Y, dado que ya está listo el primer ejemplar de la colección, las analizaré sirviéndome de él.

Primera clave: El facsímil.

El criterio general para la realización de la obra ha sido, y seguirá siendo, dotarla de capacidad para evocar los clásicos matemáticos editados en la dimensión y con la textura histórica de su época; por eso, el primer tomo de cada título de la colección será un cuidado facsímil de alguna edición significativa de la obra en cuestión.

En el caso de la que nos ocupa, la *Introduction in analysin infinitorum* de Leonard Euler, se ha preparado un facsímil correspondiente al primer tomo del ejemplar conservado en el *Real Instituto y Observatorio de la Armada* en San Fernando de la primera edición de 1748. La edición del facsímil ha estado a cargo de Javier Pérez —que ya editó para Thales en 1998 el facsímil del *Cours d'Analyse* de Cauchy—.

Un libro facsímil tiene mucho de fetiche y una enorme capacidad para evocar la época en que fue elaborado el original: los grabados y otras peculiaridades propias de la manera de editar de su tiempo, la tipografía usada, la notación matemática empleada, etc., facilitan singularmente el acercamiento a la época en que la obra original fue compuesta. Pero, además, es un objeto precioso y, si se me permite la expresión, *lujosamente carnal*: se puede hojear —y escuchar la sonoridad de las hojas al pasar—, ojear, oler —y apreciar como evoluciona su aroma conforme el tiempo va macerando papel y tintas entre sus guardas—, tocar, deslizar los dedos por sus páginas y sentir la textura del magnífico papel en que está impreso. En resumen: gozar con la *satisfacción, con la sensación agradable producida por la realización o suscepción de algo que gusta o complace.*

¡Ah!, se me olvidaba algo importante: el libro también se puede leer, salvando, claro está, las dificultades del idioma en que esté escrito —latín, en este caso—. Lo que nos lleva de lleno al asunto de la traducción y, por extensión, a la edición crítica.

Segunda clave: la edición crítica.

Según escribí arriba, queremos que la obra tenga capacidad para evocar el texto clásico —la *Introductio* de Euler en el ejemplo que desarrollo— en la dimensión y con la textura histórica de su época; pero, añado ahora, haciéndola asequible a un lector actual, interesado en leer y aprender directamente de los clásicos sin perder un ápice de su sentido histórico. El punto crucial aquí radica en que, en principio, no se le requiera al lector los conocimientos imprescindibles de historia de las matemáticas para comprender la dimensión y profundidad histórica de la obra, ni los suficientes de latín, en el caso de la *Introductio*, que le permitan leerla tal cual la escribió Euler. Por tanto, para solventar una u otra ausencia, si se dan, acompaña al facsímil un segundo tomo con una edición crítica en dos partes. Conforma la primera parte una serie de artículos relacionados con el contexto histórico, científico y matemático del autor y la obra; y, la segunda, el texto traducido al castellano y anotado. En el caso de la *Introductio* el esquema es el siguiente:

Sobre el autor. Mariano Martínez Pérez ha elaborado una sucinta biografía de Euler que facilite a los lectores la trayectoria vital y científica del autor de la *Introductio*. Acercar al lector los avatares de la vida de Euler a lo largo de gran parte del siglo XVIII le facilitará la evocación de su figura y, por extensión, de la obra editada.

Sobre el autor y su época. Javier Ordoñez ha esbozado la figura de Euler dentro de la época histórica que le tocó vivir, en especial su relación con la ciencia y, también, la cultura de su tiempo. En conjunción con el artículo anterior, se tendrá una idea cabal del autor y de su momento histórico, lo que facilitará, como se dijo arriba, la evocación histórica del texto con el referente adecuado de su época.

Sobre el autor y su texto. Un tercer artículo, del que soy autor, situará la obra en cuentión dentro de la producción matemática de Euler. De su lectura se podrá concluir que el texto es para un matemático actual profundamente novedoso: muestra al sorprendido lector el mundo de los infinitos —los infinitamente grandes y los infinitamente pequeños— como herramienta para el estudio de las funciones. En la *Introductio* no hay ni derivadas ni integrales, sólo análisis con infinitos: unos bisturíes potentísimos y casi mágicos que muestran los adentros de las funciones permitiéndole a Euler resolver multitud de difíciles problemas. Y todo ello lo cuenta Euler de una manera clara, con una calidad expositiva fuera de lo normal: la mayor parte del libro se sigue simplemente leyendo, casi sin necesitar lápiz y papel. No es, pues, ninguna exageración lo que escribió E.W. Hobson sobre la *Introductio*: «es difícil encontrar otra obra en la historia de las matemáticas que produzca en el lector una impresión tan fuerte de la genialidad de su autor»; ni tampoco que C.B. Boyer la comparará con los *Elementos* de Euclides: por su significado para el análisis —marcó, de hecho, el comienzo del análisis matemático— y su influencia posterior, que la mayoría de grandes matemáticos reconocieron explícitamente —ahí está la conocida cita del Marqués de Laplace: «leed a Euler, leed a Euler, él es el maestro de todos nosotros»y, también la de Gauss: «el estudio de todos los trabajos de Euler es la mejor e insustituible escuela para los distintos campos matemáticos».

La traducción.

Quizá la pieza fundamental para potenciar la capacidad de evocación de un texto es su traducción. A la hora de traducir la *Introductio* se contemplaron dos opciones: una más sencilla consistente en la traducción del texto a partir de alguna de las ediciones francesa o inglesa, y otra, algo más complicada y arriesgada, que consistía en traducir directamente del latín. Dado que las traducciones francesa e inglesa son excesivamente libres, quedó descartado su uso por contradecir nuestro decidido espíritu de fidelidad a Euler y su texto. Se decidió, pues, traducir del latín; se quería, además, que el castellano resultante de la traducción reflejara la época en que la *Introductio* se escribió, esto es, mediados del siglo XVIII. Afortunadamente se encontró, perdido en una pequeña aldea de Soria, a José Luis Arantegui, un excelente traductor aquejado, como yo, de una acentuada neurosis por la fidelidad al texto clásico. Como se puede comprobar por los extractos incluidos al final de esta presentación, su traducción, en un castellano de inconfundible sabor a siglo XVIII, es, sin duda, excepcional: *un manjar exquisito.* Su sola lectura supone, por sí misma, *un goce, un entretenimiento.* Además, preserva para nosotros toda la textura histórica del texto original. Sólo restaba ya, aderezar la traducción con una anotación adecuada que pusiera de manifiesto toda la profundidad histórica escondida en el texto de Euler.

La anotación.

Dado que soy el autor de las notas, no entraré en calificaciones, aunque sí diré que estoy razonablemente satisfecho con el resultado.

La anotación supone un análisis múltiple de la obra: de la forma —terminología y notaciones— y del significado histórico de conceptos y resultados; a este enfoque de las notas, habitual por otra parte en un texto de matemáticas, le he añadido una dimensión singular, pocas veces presente en las notas de un texto de matemáticas, si alguna, pero imprescindible, a mi entender, para una adecuada degustación del libro de Euler: una valoración estética de la *Introductio.* Paso a explicar con algo más de detalle este esquema:

1. *Sobre la terminología y notación del texto original.* La adecuada anotación de este apartado era especialmente importante por cuanto la fidelidad al texto original nos ha hecho usar nomenclatura hoy desaparecida y notaciones algo distintas a las actuales. Antes de nada aclarar que, en ningún caso, esto supone una dificultad para leer o entender el texto: la nomenclatura es suficientemente natural como para entenderla casi sin ninguna explicación adicional, sin contar, claro está, la claridad expositiva de Euler. En cambio, al mantenernos fieles a su texto se consigue reflejar con mucha más fidelidad los matices con que Euler, o su época —sus circunstancias, que diría Ortega—, dotaron al texto. En cualquier caso la terminología usada está suficientemente apoyada, como se recoge en las notas, por citas y textos de autores clásicos —tanto españoles como extranjeros— que, además, son una buena muestra de la evolución de la nomenclatura en matemáticas —y, por supuesto, de los

conceptos ocultos tras los nombres—. Especial atención se ha prestado a la notación, respetando escrupulosamente la de Euler, muy cercana ya a la nuestra, y explicando en cada caso, su evolución anterior y posterior, si la hubo.

2. *Sobre la significación histórica de conceptos y resultados.* Euler, desde luego, no facilitó el seguimiento histórico de los conceptos y resultados de la *Introductio*; en el prefacio avisa: «Por lo demás, como aparecen aquí no pocas cosas ya tratadas por otros, es oportuno que pida indulgencia por no hacer honrosa mención de quienes trabajaron antes de mí en el mismo género de asuntos. Como mi propósito era tratarlo todo con la mayor brevedad posible, la historia de cada problema habría aumentado en no poca medida la magnitud de la obra». En cualquier caso he rastreado de manera intensa y extensa la interesantísima historia encerrada tras las páginas de este libro —desvelando algún que otro jugoso *secretillo*—. En este sentido se ha atendido no sólo a los textos generales de historia de las matemáticas, a los más específicos sobre temas cercanos a la obra, o a los artículos de investigación histórica dedicados a la *Introductio* o a alguna de sus partes, sino también y, especialmente, a las fuentes, ya sean de obras cercanas a esta de Euler o las suyas propias. En el caso de Euler la obra de referencia es, claro está, la serie I de sus obras completas —dedicada a su producción matemática—, especialmente los tomos 8, 9 y 10 —que contienen la serie formada por la *Introductio* y las *Institutiones calculi differentiali* e *integrali*— y los 14, 15, 16 y 17 —que esencialmente contiene los trabajos sobre series de los que se surte, en gran parte, la *Introductio*—; aunque también se han manejado ejemplares originales de esas obras y de las revistas donde publicó sus artículos —esencialmente los *Commentarii* y los *Novi Commentarii* de la Academia de Ciencias de San Pertersburgo y, en menor medida la *Miscelanea Berolinesa*— de los que existe una magnífica colección en la biblioteca del *Real Instituto y Observatorio de la Armada* en San Fernando.

3. *Valoración estética.* Como ya se dijo antes, este aspecto de la anotación supone una novedad en una obra de matemáticas, aunque, como también mencioné con anterioridad, es imprescindible en el caso que nos ocupa. El análisis estético de la *Introductio* irá, además, más allá del mero sentido matemático. Así, no sólo se han buscado y analizado, por ejemplo, los aspectos marcados por Hardy en *A mathematician's apology* en relación con la belleza de las ideas y razonamientos matemáticos, sino que también se han rastreado y localizado categorías estéticas generales como puedan ser, por poner un par de ejemplos, la de lo *sublime*, descrita por Immanuel Kant en su *Crítica del juicio* o, la capacidad de conmoción donde sitúa Theodore Adorno el logro estético.

Una aclaración final sobre las notas. No he intentado explicar el texto, que es, redundando en comentarios anteriores, excepcionalmente fácil de seguir debido al método genético como procede habitualmente Euler —esto es, deduciendo a partir de ejemplos sencillos—. Sólo en contadas excepciones, he añadido notas que sirven para ilustrar algún razonamiento de Euler fundamentado en la especial forma de entender las curvas en aquella época, o cuando, para facilitar la lectura, se ubican determinados resultados y razonamientos sobre series cuando el número de estas manejado por Euler —ingente— hace, más que complicada, incómoda la lectura.

Y, para finalizar, la inevitable cuestión de los dineros.

Tanto la RSME como la SAEM Thales son asociaciones sin ánimo de lucro, de manera que el precio de cada número de la colección se ajustará al máximo con el único objetivo de cubrir gastos. El estuche con la obra completa —el primer tomo conteniendo el facsímil y el segundo con la traducción anotada y los artículos introductorios—, tendrá un precio especial de salida: para aquellos socios que ya hayan hecho reserva de la obra o para quienes la adquieran antes del 1 de marzo será de 8.500 pesetas; a partir de entonces el precio de compra será de 10.000 pesetas para socios y 14.000 para no socios. El ajustar tanto los precios tiene la ventaja, para el socio individual, de poder conseguir una magnífica obra a un precio muy bueno; pero a cambio, las sociedades, esto es, la colectividad de socios, asumen un riesgo que podría resultar en un quebranto económico que hiciera inviable la colección. Dicho de otro modo, la acogida que los socios le vayan dando a los primeros facsímiles determinará la continuidad de la colección.

Queridos socias y socios, espero sinceramente que a resultas de este esfuerzo colectivo logréis, con el trasteo y posterior lectura de la *Introductio*, un cierto *disfrute espiritual*, unos momentos de *satisfacción, diversión o entretenimiento, como cuando te bañas en el mar o escuchas un trozo de música*; ese es el objetivo último que esperamos lograr con esta colección: algo tan necesario, tan simple, pero a la vez tan complicado de conseguir como es *agradar o dar gusto*.

Antonio J. Durán
Catedrático de la Universidad de Sevilla
Presidente de la Comisión de Historia de la RSME

Anexo

A continuación sigue un extracto de las páginas iniciales y finales de la traducción antotada de la *Introductio*:

[3]

CAPÍTULO PRIMERO

De las funciones en general

1. Es cantidad constante [2] *la cantidad determinada que conserva siempre el mismo valor.*

Son cantidades tales los números de cualquier género, con que conserven siempre el mismo valor constante que en su momento obtuvieron: y si conviene indicar tales cantidades constantes mediante caracteres, se les asigna las letras iniciales del alfabeto $a, b, c, \&c.$[3] Cierto es que en el análisis común, donde tantas cantidades determinadas se consideran, estas letras primeras del alfabeto suelen denotar cantidades conocidas, y las posteriores, en cambio, incógnitas[4]; esta distinción, empero, no es de esperar en tal grado en el análisis superior, por cuanto aquí se atiende principalmente a aquella otra distinción que establece a unas como constantes y a otras en cambio como variables.

[4]

[2]Según Youschkevitch (Youschkevitch, 1976: 59) los términos *constante* y *variable* fueron introducidos por Leibniz en 1692, aunque su difusión se debió a que aparecieron en la definición primera del *Analyse des infiniment petits* del Marqués de L'Hospital (1696): «se llaman cantidades variables aquéllas que aumentan o disminuyen continuamente; y por lo contrario, cantidades constantes las que permanecen siendo las mismas mientras las otras cambian» —traducción tomada de (L'Hospital, 1998: 27)—.

[3]Como es habitual, se ha optado por sustituir la letra & por *y* cuando aparece en texto, pero se ha mantenido la notación &c. para indicar *etc.* cuando se use como notación matemática, esto es, en listados de expresiones matemáticas, como aquí, o en sumas —finitas o infinitas— y productos —también finitos o infinitos—, como aparecerá más adelante. Esta notación se remonta a mediados del siglo XVII; fue usada por J. Wallis en su *Arithmetica infinitorum* (Wallis, 1655: —algunos ejemplos— 26 (sucesión infinita), 145 (suma finita), 175 (producto infinito)) y posteriormente por N. Mercator, J. Gregory, Newton o Leibniz . Fue la habitual durante el siglo XVIII, aunque Euler y otros autores también usaron, esporádicamente, los puntos suspensivos que acabarían imponiéndose como notación canónica (Cajori, 1928: I, 214 y II, 58-9).

[4]Euler se está refiriendo a la notación establecida de facto por Descartes en *La Géométrie* (Descartes, 1637) y ya canónica en el siglo XVIII; fue la usada, entre otros, por L'Hospital , (L'Hospital, 1998: 30): «se supone normalmente en lo que sigue que las últimas letras del alfabeto z, y, x, etc., indican cantidades variables y, por lo contrario, que las primeras a, b, c, etc. indican cantidades constantes», o Newton, (Newton, 1736): «para distinguir las cantidades que consideraré perceptible pero indefinidamente variando, de las otras que en cualquier ecuación serán conocidas y determinadas, denotaré a estas últimas usando las letras iniciales del alfabeto, a, b, c, etc. A las primeras, las llamaré aquí y después fluentes y las denotaré usando las letras finales del alfabeto v, x, y, z».

2. Es cantidad variable la cantidad indeterminada o universal que comprende absolutamente todo valor determinado.

Así, como todo valor determinado puede expresarse en número, una cantidad variable abarca absolutamente todos los números de cualquier género. Fácil es ver que de igual modo que las ideas de género y especie se forman a partir de las ideas de individuos, así la cantidad variable es el género en que quedan comprendidas todas las cantidades determinadas. Tales cantidades variables se suelen representar mediante las últimas letras del alfabeto, z, y, x, &c.

3. Queda determinada una cantidad variable cuando se le atribuye un valor cualquiera.

Una cantidad variable puede así quedar determinada de innumerables modos, por cuanto admite ser substituida en su lugar por todo número. Y no quedaría agotado el significado de la cantidad variable si no hubiere sido substituida por todos los valores determinados. Así es que la cantidad variable comprende absolutamente todo número, tanto afirmativo[5] como negativo, entero como fraccionario, racional como irracional o trascendente. Sin que que-

[5] Aunque el término *afirmativo*, aplicado a números, no se usa hoy en día, habiendo sido sustituido por positivo, hemos preferido mantenerlo en la traducción por fidelidad al texto de Euler y, si se me permite el juego de palabras, su textura histórica. El término latino *affirmativo*, aplicado a números, era la expresión habitual durante el siglo XVII y gran parte del XVIII; así se encuentra en los manuscritos de las Lecciones de Álgebra de Newton en Cambridge (1673-1683): «quantitates vel affirmativae sunt seu majores nihilo, vel negativae seu nihilo minores» (Newton, 1967/81: V, 58) —esto es, *las cantidades son, o afirmativas, si son mayores que cero o, negativas, si son menores que cero*—; aunque dejó de serlo conforme se acercaba el XIX; así, en la primera página de las *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss (1801), leemos: «Hae notiones de omnibus numeris integris tam positiuis quam negatiuis valent, neque vero ad fractos sunt extendendae» —esto es, «estas nociones rigen para todo número entero, así positivo como negativo, sin ser empero extensibles a los fraccionarios»—. Algo parecido sucede en los textos españoles. En el tomo I del *Compendio mathematico* de Tosca (1707), leemos: «esta señal + significa Más; y esta − significa Menos: de la primera usaremos cuando una cantidad se ha de juntar con otra, o afirmar de ella; y del segundo, cuando una cantidad se ha de quitar, o negar de otra: y por esta causa la señal + se llama afirmativa; y la cantidad que le sigue, se dice afirmada: y la otra señal − se llama negativa; y la cantidad que se le sigue, se dice negada» (Tosca, 1727: 6) —en la cita anterior se ha actualizado la ortografía—; si bien en los *Elementos de matemática* de Bails (1779), se usa ya el término positivo: «Las cantidades que lleven el signo +, se llaman *cantidades positivas*; y las que lleven el signo −, se llaman *cantidades negativas*» (Bails, 1772/83: II, 8). En cualquier caso es raro encontrar el término afirmativo en textos anteriores al de Tosca, en las aritméticas del XVI por ejemplo. Esto responde al hecho de que los números entonces eran, *naturalmente*, positivos, y no había por tanto necesidad de adjetivar en ese sentido la palabra número. Los números negativos no eran considerados números en plano de igualdad con los positivos —a las raíces negativas de las ecuaciones se las llamada falsas, véase un par de notas más adelante la cita de Descartes—. Y, en cierto modo, hasta el siglo pasado no llegaron a ser cabalmente entendidos —por ejemplo, en el artículo sobre números negativos que escribiera D'Alembert para la *Encyclopédie* se puede leer: «las reglas algebraicas de operación con números negativos son generalmente admitidas por todos y reconocidas como

den excluidos tampoco del significado de la cantidad variable la cifra[6] y los números imaginarios[7].

4. Es función de una cantidad variable cualquier expresión analítica compuesta comoquiera que sea por esa cantidad y números o cantidades constantes.[8]

exactas, cualquiera que sea la idea que podamos tener de lo que estas cantidades son» (Kline, 1992: 789).

[6]La cifra es el cero. En el espíritu de máxima fidelidad al texto, al que hacíamos referencia en la nota anterior, se ha mantenido la literalidad del término *cyphra*, empleado por Euler , pues era una de las distintas variantes usadas para referirse al cero. En este sentido, en la presentación de los numerales árabes que Jerónimo de Santa Cruz hace en su *Libro de arithmetica especulativa y practica* (Santa Cruz, 1603) podemos leer algunas maneras de nombrar al cero: «de algunos llamada círculo, y de otros cifra, de otros cero, y de algunos otros nula».

[7]Euler hace comparecer pronto a los números complejos —durante todo el libro usará el término *imaginario*, acuñado por Descartes en su *Géométrie*: «las raíces, verdaderas o falsas (*positivas o negativas, en nuestra terminología actual*), pueden ser reales o imaginarias» (Descartes, 1981: 348); el de números complejos fue invención de Gauss—, aunque en todo el libro no dará ninguna definición explícita de ellos. Estos tenían ya cerca de dos siglos de existencia desde que fueran considerados por Cardano en el capítulo 37 de su *Ars magna* (1545) para dividir el número 10 en otros dos cuyo producto fuera 40 y, sobre todo, por Rafael Bombelli en su *L'Algebra* (1572): le aparecen, de manera natural, para calcular las raíces reales en determinados casos de ecuaciones cúbicas usando la fórmula de del Ferro-Tartaglia-Cardano; en concreto, si la aplicamos a la ecuación $x^3 = 15x + 4$, de la que se sabía que sólo tiene una raíz positiva y dos imaginarias, se obtiene la solución $\alpha = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}$: Bombelli, dejándose llevar por *idea loca*, calculó una raíz cúbica compleja de cada uno de los números complejos que aparecen en la fórmula, obteniendo entonces $\alpha = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$, que efectivamente da la raíz real de la ecuación. En época cercana a la redacción de la *Introductio*, se habían hecho algunos avances importantes sobre estos *anfibios entre el ser y el no ser*, como poéticamente los calificara Leibniz: De Moivre, en varios trabajos que van desde 1707 a 1739 había establecido su conocido teorema $(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)^n = \cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta$ y la existencia, y forma de cálculo, de las n raíces n-ésimas de un número complejo —véase el parágrafo 138 y la correspondiente nota—; Roger Cotes, editor de la segunda edición de los *Principia* de Newton, había, en cierta forma, anticipado la relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas que aparecerá en el §138, donde será tratada con más detalle. Finalmente, Leibniz y Juan Bernoulli habían discutido, con pasión, sobre la naturaleza de los logaritmos de números negativos e imaginarios; discusión que seguiría Bernoulli con Euler , y éste con D'Alembert, y que será tratada más adelante —véase el parágrafo 103 y la nota correspondiente—.

[8]Hacia mediados del siglo XVII comienza a considerarse una función en términos de asociación de valores, noción esta que acabaría desplazando al concepto de función como una ecuación o relación entre variables, presente en Descartes, Fermat y otros matemáticos de la primera mitad del siglo XVII. Según Youschkevitch (Youschkevitch, 1976: 58), el primero que consideró explícitamente este concepto de función como expresión, en cierta forma *analítica*, mezcla de constantes y variables fue James Gregory en su *Vera circuli et hyperbole quadrature*, publicado en Padua en 1667: «decimos que una cantidad x está compuesta de otras cantidades $a, b, \ldots$ si x resulta de $a, b, \ldots$ por las cuatro reglas elementales (suma, resta, producto y división), extracción de raíces o por cualquier operación imaginable».

Será pues función de z toda expresión analítica en que sean constantes todas las cantidades que componen su expresión, salvo la misma z; así, $a+3z$; $az-4zz$;[9] $az+b\sqrt{}(aa-zz)$;[10] c^z; &c. son funciones de z.

Aunque implícitamente, esta idea de relación funcional está presente en gran parte de los matemáticos de la segunda parte del siglo XVII, Wallis, Barrow, Newton —cantidades que fluyen continuamente, con el tiempo, con cierta velocidad de cambio (Youschkevitch, 1976: 55)—, Leibniz; hasta que de nuevo aparece, explícita y repetidamente, en varias cartas de Juan Bernoulli a Leibniz (1694, 1696) y finalmente impreso (1718) en un trabajo sobre el problema isoperimétrico en la *Academie Royale des Sciences* de París: «una función de una variable es definida como una cantidad compuesta de alguna manera por una variable y constantes». Como se puede comprobar, la definición que considera Euler en la *Introductio* consiste en precisar los términos, *de alguna manera*, de la definición de su maestro como, *expresión analítica*. En el capítulo IV, Euler explica con más detalle el significado de *expresión analítica*. Allí habrá lugar para anotar cómo Euler pronto, el mismo año de la publicación de la *Introductio*, comprendió la necesidad de modificar esta definición de función que había nacido demasiado estrecha. En cuanto a la palabra *función*, fue Leibniz quien la usó por primera vez, de nuevo según Youschkevitch (Youschkevitch, 1976: 56), en un manuscrito fechado en agosto de 1673, aunque para indicar un segmento, o segmentos, asociado a una curva dada. Después lo usaría Juan Bernoulli en 1694 con significado próximo a su definición de 1718. Inmediatamente siguió un intercambio de cartas entre Bernoulli y Leibniz acerca de la notación más adecuada para las funciones, que ya habrá oportunidad de considerar más adelante.

[9]La notación actual para las potencias, esto es, escribir z^n para el producto de n veces z, se remonta a Descartes que la introdujo en su *Géométrie* (Descartes, 1637). Sin embargo, el mismo Descartes prefirió escribir zz por z^2, aunque van Schooten en su versión en latín de la *Géométrie* (Descartes, 1649) escribió generalmente z^2 por zz. La notación zz fue también usada por Huygens, Wallis, Newton, Euler —por esta razón se ha preferido mantenerla en la traducción— y aún por Gauss —alegaba que z^2 no ocupaba menos espacio que zz y, por tanto, no alcanzaba el principal objetivo de un símbolo—, frente a Leibniz, D. Gregory o Pascal que preferían z^2 (Cajori, 1928: I, 349). En 1748, más de setenta años después de que Newton las usara en una carta dirigida a Leibniz —la llamada *Epistola Prior*, que saldrá alguna que otra vez en estas notas— a través de Oldenburg, entonces secretario de la *Royal Society* de Londres, ya eran también de uso común las potencias negativas, racionales e irracionales: $x^{-1}, x^{\frac{1}{2}}, x^{\sqrt{2}}$, y así las usará Euler algo más adelante.

[10]El símbolo $\sqrt{}$ para denotar la raíz se remonta al libro *Die coss* (1525) de Christoff Rudolff (Cajori, 1928: 135) —aunque fuera ligeramente retocado por Michael Stifel algunos años después— y ya era de uso universal en 1748; por cierto, Euler pensaba, de manera errónea según Cajori (Cajori, 1928: 366), que el símbolo era una deformación de la letra r, la primera de *radix*. En 1748 también estaba prácticamente unificada la notación para las otras raíces: colocando el índice en la parte abierta del radical: $\sqrt[3]{}$ para indicar la raíz cúbica, por ejemplo —así aparecerá un par de páginas más adelante—. Sin embargo, no había acuerdo en cómo denotar la raíz cuando afectaba a un conjunto de términos, a un polinomio, por ejemplo. Había quienes, como hacemos hoy en día, prolongaban la línea superior de la raíz hasta cubrir todo lo que estaba afectado por ella: así, por ejemplo, encontramos escrito $\sqrt{dx^2+dy^2}$ en el *Examen marítimo* de Jorge Juan publicado en 1771. Otros, en cambio, siguiendo las preferencias de Leibniz , indicaban con paréntesis lo que estaba afectado por la raíz; es el caso de Euler : escribe $\sqrt{}(aa-zz)$ para indicar que la raíz afecta al polinomio $aa-zz$; es la razón por la que se ha mantenido esa notación.

5. La función misma de una cantidad variable será por tanto una cantidad variable.

Comoquiera que la cantidad variable admita ser substituida por todo valor determinado, la función adoptará por ende un sinnúmero de valores determinados; y comoquiera que abarque también valores imaginarios, no queda exceptuado ningún valor determinado que la función no pueda adoptar. Así, aunque la función $\sqrt{}(9-zz)$ nunca pueda recibir valor mayor que tres al substituir z por números reales, no obstante, al atribuir a z valores imaginarios **[5]**
tales como[11] $5\sqrt{-1}$ no se le podría asignar ningún valor determinado que no pudiere resultar de la fórmula $\sqrt{}(9-zz)$. Con todo, no dejan de darse a veces funciones que sólo lo son en apariencia, por cuanto mantienen igual valor sea cual fuere el modo en que la cantidad variable varíe, como ocurre con z^0, 1^z, $\frac{aa-az}{a-z}$, las cuales, si bien se cuentan como una especie de función, en verdad son sin embargo cantidades constantes.

6. El criterio principal para distinguir entre funciones queda puesto en el modo de componerse cantidad variable y cantidades constantes.

Depende así de las operaciones por las que pueden componerse y mezclarse las cantidades entre sí: que son adición y substracción; multiplicación y división; elevación a potencia y extracción de raíz; junto a las cuales hay que referir también la resolución de ecuaciones. Dejando a un lado estas operaciones que suelen llamarse algebraicas, hay otras varias trascendentes, tales como las exponenciales o logarítmicas, y un sinnúmero de otras operaciones que proporciona el cálculo integral.

Al mismo tiempo se puede señalar ciertas especies de funciones, como los múltiplos $2z$, $3z$, $\frac{3}{5}z$, az, &c.; o las potencias de z, como z^2, z^3, $z^{\frac{1}{2}}$, z^{-1}, &c.; así como éstas son resultado de una única operación, así también a las expresiones generadas por operaciones cualesquiera se les asigna el nombre de funciones.

[11]Euler usará aquí la notación habitual de la época para designar la unidad imaginaria desde que Albert Girard usara $\sqrt{-2}$ en su *Inventionen nouvelle en l'Algebre* en 1629. En 1777 Euler introdujo el, ahora habitual, simbolismo i por $\sqrt{-1}$ en un artículo presentado a la Academia de San Pertersburgo que no fue publicado hasta la muerte de Euler . A partir de 1801 lo usaría Gauss convirtiéndolo en canónico (Cajori, 1928: II, 127-8).

7. Divídense las funciones en algebraicas y trascendentes[12]*; son aquéllas las compuestas sólo mediante operaciones algebraicas, éstas en cambio las funciones en que están presentes operaciones trascendentes.*

382. Comoquiera, en fin, que de tales expresiones puedan sacarse a la luz fracciones que conduzcan con la mayor prontitud al verdadero valor de la expresión, podrá aplicarse este método a expresar fracciones decimales mediante fracciones ordinarias que se aproximen a aquéllas. Y no es que no se pueda también, si se propone una fracción cuyo numerador y denominador sean números sumamente grandes, hallar a partir de los números menores tales fracciones constantes que, aun no siendo absolutamente iguales a las propuestas, no obstante discrepen de ellas lo menos posible. Y a partir de ahí, puede resolverse fácilmente el problema del que Wallis tratara en su momento, a saber, buscar fracciones expresadas por números menores que, estén tan cerca de cumplir el valor de una fracción cualquiera propuesta en números mayores como podría estarse con números no mayores[13]. Ahora bien, las fracciones que se originan con nuestro método se acercan al valor de la fracción continua de la que se obtienen en tal medida que no se da ninguna constante de números no mayores

[12]Euler propone aquí la división que apuntara Leibniz corrigiendo la separación que Descartes hizo en la *Géométrie* (Descartes, 1637) entre curvas geométricas —*las que son precisas y exactas*— y mecánicas —*las que no lo son*—; en relación a las segundas escribió Descartes: «no son de las que pienso deben ser incluidas aquí», esto es, en la geometría. Leibniz les cambió el nombre, llamó algebraicas a las geométricas y trascendentes a las mecánicas y, en su segundo artículo sobre el cálculo (Leibniz, 1686) escribió oponiéndose a Descartes: «me parece bien en este lugar [...] abrir el camino de las cantidades trascendentes, ya que algunos problemas, no son planos, ni sólidos, ni supersólidos o de grado alguno definido, sino que trascienden cualquier ecuación algebraica [...]. Y como tales problemas realmente pueden ser propuestos en geometría, deben ser considerados sin duda alguna entre los primeros» —traducción tomada de (Leibniz, 1987)—.

[13]Se refiere Euler al problema que Wallis propone y resuelve en su *Algebra* de 1685 —aunque, diez años antes, ya hay menciones al problema en cartas a John Collins—: dada una fracción n/m encontrar otra tan cerca de la propuesta como sea posible y cuyo denominador no exceda un número prefijado. La solución de Wallis consiste, como la que Euler expone aquí, en el desarrollo de la fracción inicial en fracción continua , utilizando el algoritmo de Euclides, y elegir la fracción parcial cuyo denominador este más próximo, por defecto, al número prefijado. El problema y su solución también aparecen en trabajos de Huygens anteriores a 1687; allí el método se describe del siguiente modo: «es posible encontrar números más pequeños que describan aproximadamente una determinada proporción; para ello divide el más grande por el más pequeño, después el más pequeño por el resto de la primera división, y a continuación por el nuevo resto. Repitiendo este cálculo tanto como sea posible, se llega finalmente a un resto igual a 1» (Brezinski, 1991: 87). Huygens lo aplicó para obtener aproximaciones de π partiendo de otras ya conocidas, como hará Euler en el primer ejemplo de los que siguen, y en los cálculos para diseñar las órbitas relativas de la Tierra y Saturno en su planetario automático —según se explicará en la nota **??**—, algo parecido, también, a lo que hará Euler en el segundo ejemplo de los que siguen.

que se acerque más[14].

EJEMPLO I.

Exprésese la razón del diámetro a la periferia en números tan exiguos que no quepa presentarla con mayor precisión si no se emplean números mayores. Si se desarrolla al modo expuesto mediante división continua la fracción decimal conocida, $3,1415926535$, se descubrirán los siguientes cocientes,

$$3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, \&c.,$$

a partir de los cuales se formarán las fracciones siguientes:

$$\frac{1}{0}, \frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \&c;$$

ya, la segunda fracción, muestra ser el diámetro a la periferia como $1 : 3$, y, con certeza, no podría darse un número no mayor que fuere más preciso. La tercera fracción da la razón *arquimediana*, $7 : 22$, y la quinta, la *Metiana*[15], **[320]**

[14]Véanse las notas anteriores **??** y **??** para más detalles sobre la mejor aproximación racional mediante fracciones continuas.

[15]En efecto, desarrollando en fracción continua la aproximación para π dada por $\dfrac{31415926535}{10000000000}$ se obtienen los primeros términos de la fracción continua para π:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{242 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}}}.$$

El $22/7$ de la célebre aproximación arquimediana para π: $3 + \dfrac{10}{71} < \pi < \dfrac{22}{7}$, obtenida al estimar la longitud de la circunferencia mediante el perímetro del polígono de 96 lados, corresponde, efectivamente, con la segunda fracción parcial $3 + \dfrac{1}{7}$ del desarrollo anterior para π; la tercera fracción parcial $3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \dfrac{333}{106}$ corresponde con la menos célebre estimación para π debida al matemático e ingeniero holandés Adriaan Anthoniszoon que la encontró hacia 1583 —sin que nunca llegara a explicar cómo, aunque pudiera ser que usase algo parecido a lo hecho aquí por Euler—; la estimación completa de Anthoniszoon fue $\dfrac{333}{106} = 3 + \dfrac{15}{106} < \pi < 3 + \dfrac{17}{120} = \dfrac{367}{120}$. La cuarta fracción parcial, $\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \dfrac{355}{113}$, es la que Euler atribuye a Adriaen Metius, hijo de Anthoniszoon, a pesar de que, cuando Metius la hizo pública en su *Geometría práctica* de 1611, la atribuyera a su padre: en efecto, $\dfrac{355}{113}$ es una media de las halladas por su padre: $\dfrac{355}{113} = 3 + \dfrac{15+17}{106+120}$ (Brezinski, 1991: 71).

que tan cerca está del valor verdadero como para que el error sea menor que $\frac{1}{113.33102}$.[16] Por lo demás, estas fracciones son, alternativamente, mayores y menores.

E J E M P L O I I.

Exprésese, por aproximación, la razón del día al año solar medio con el número mínimo: comoquiera que el año sean 365^d, 5^h, $48'$, $55''$, un año contendrá 365 días más una fracción igual a $\frac{20935}{86400}$ días. Conque será menester tan sólo desarrollar esa fracción, que dará los siguientes cocientes:

$$4, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4,$$

de donde surgen las fracciones

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{55}{227}, \frac{63}{260}, \frac{181}{747}, \&c..$$

Por tanto, las horas, con minutos y segundos, que exceden de 365 días hacen alrededor de un día completo cada cuatro años, en lo que tiene su origen el calendario Juliano[17]. Ahora bien, con más exactitud, completan ocho días 33 años, o 181 días 747 años; de donde se sigue que cuatrocientos años dan 97

También fue conseguida por Valentinius Otho en 1573 y por Viète. Aunque el primero que la encontró fue el matemático chino Tsu Ch'ung-Chih en el siglo V de nuestra era: la llamó el *valor exacto*, frente al arquimediano $\frac{22}{7}$, que también calculó y, al que llamaba, el *valor inexacto* (Hobson, 1953: 24). De todas formas, tiene Euler aquí un olvido imperdonable para protestante tan piadoso como él fue: la primera fracción parcial del desarrollo anterior, esto es, 3, es la aproximación *divina* al número π; así consta, al menos, en la : «Hizo asimismo un mar de fundición, de diez codos del uno al otro lado, redondo, y de cinco codos de alto, y ceñíalo en derredor un cordón de treinta codos» (1, Reyes: 7, 23); se repite otra vez en (2, Paralipómenos: 4,2) —siempre me pareció aproximación grosera y decepcionante para haber sido dictada por Dios—.

[16] De nuevo da Euler una cota del error en esta aproximación que coincide, como se dijo en la nota **??**, con la que se obtiene cuando se aplica el criterio de Leibniz a la serie alternada asociada a una fracción continua —según el procedimiento explicado por Euler en §363 y 364—.

[17] Se refiere Euler al calendario decretado por Julio César en el año 46 a. C. Se basa en los cálculos del astrónomo griego Socígenes de Alejandría que daba, aproximadamente, 365 días y 6 horas para el año —naturalmente hablamos del año trópico: el tiempo que transcurre entre dos pasos consecutivos del sol por el mismo punto equinoccial; luego esta el sidéreo: el tiempo que tarda el sol en volver a pasar sobre el fondo de una misma estrella; la relación entre ambos, teniendo en cuenta estimaciones actuales, es de $0'999961123\ldots$—; esto es, $365'25$ días —frente a $365'242303\ldots$ que maneja Euler aquí—. De manera que tras cada tres años de 365 días seguiría uno de 366 —el año bisiesto—. Según las aproximaciones que Euler encuentra para $\frac{20935}{86400}$, esto equivaldría a tomar la segunda 1/4. El calendario Juliano fue adoptado por la Iglesia católica en el Concilio de Nicea (325).

días de más. Razón por la que el calendario Gregoriano, comoquiera que en ese intervalo el Juliano introdujera 100 días, convierte a lo largo de cuatro siglos tres años bisiestos en comunes[18].

FIN DEL TOMO PRIMERO

[18]En efecto, la diferencia entre la duración del año trópico y la aproximación sobre la que se basaba el calendario Juliano, provoca un atraso de, aproximadamente, 3 días cada 400 años, como pone de manifiesto Euler; hacia principios del siglo XVI, en el Concilio de Letrán (1516) para ser más precisos, la Iglesia católica manifestó su voluntad de reformar el calendario Juliano,—en razón de fijar con precisión la fecha de la Pascua y otras fechas litúrgicas móviles— pues ya se habían acumulado unos díez días de retraso, de manera que el equinoccio de primavera no tenía lugar el día 21 de marzo sino, realmente, el 11. Sin embargo, la reforma no se llevó a efecto hasta 1582 bajo mandato del Papa Gregorio XIII —de ahí el nombre de gregoriano para este calendario—, y consistió en, por un lado, recuperar los díez días perdidos —se pasó del 4 de octubre de 1582 al 15 de octubre— y, por otro, eliminar, como dice Euler, tres años bisiestos cada cuatro siglos —de los acabados en 00, sólo son bisiestos aquellos cuya cifra de millares y centenas sea múltiplo de cuatro; así, 1700 no fue bisiesto, ni 1800, ni 1900, pero sí el 2000—. Según las aproximaciones que da Euler para $\frac{20935}{86400}$, el calendario gregoriano estaría basado en la $181/747$. Por cierto, a la fecha de publicación de la *Introductio*, el calendario gregoriano no había sido aún aceptado por Inglaterra —el cambio se efectuaría en 1752, pasando del 2 de septiembre al 14 y, provocando de paso, una de las *más célebres confusiones* de toda la historia de la ciencia: ¿en qué año nació Newton?: 1642 según el calendario Juliano imperante entonces en Inglaterra, pero 1643 según el gregoriano—, ni por Rusia, donde durante tanto tiempo residiría y, de hecho, moriría Euler —allí entró en vigor en 1918: la enemistad entre católicos y ortodoxos provocó este retraso que la Revolución rusa vino a arreglar—. Conviene, para finalizar, apuntar que lo hecho en este ejemplo por Euler tiene un antecedente, igual de curioso, en los trabajos teóricos que desarrolló Christian Huygens para la construcción de un planetario automático (1682) —trabajos que se publicarían póstumamente en su libro *Descriptio automati planetarii* de 1698—. En este caso, para componer las ruedas dentadas que dieran cuenta del movimiento de los planetas había que comparar sus órbitas con las de la Tierra; así, por ejemplo, mientras la Tierra recorre en 365 días $359°, 45', 41''$, son $12°, 13', 34''$ los recorridos por Saturno. Lo que da una relación para sus órbitas de $\frac{77708431}{2640858}$. Huygens calculó su desarrollo en fracción continua —usando, como Euler aquí, el algoritmo de Euclides—:

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \ddots}}}}.$$

Tomó como aproximación la cuarta fracción parcial: $206/7$. El cálculo del error establecía que, montando una rueda de 206 piñones para Saturno y otra de 7 para la Tierra, el error acumulado a lo largo de un siglo no llegaría a los $40'$ (Montucla, 1968: III, 311-2).