

# Origen y desarrollo del pensamiento numérico durante la infancia

por

José Domingo Villarroel Villamor, Universidad del País Vasco

## 1. Introducción

*Poco antes de cumplir cuatro años, Xabier jugaba con tres de sus cinco coches de miniatura. Su padre intentó averiguar dónde estaban los que faltaban. Xabier contestó que los había perdido. “¿Cuántos has perdido?” – le preguntó “Dos, el primero y el cuarto”.*

Referirse a conjuntos de objetos con palabras es una habilidad genuinamente humana y es también, una de las primeras destrezas matemáticas que se exterioriza durante el desarrollo. A partir del trigésimo mes de vida, niños y niñas comienzan a utilizar con creciente habilidad las palabras-número para referirse a grupos de elementos relacionados con diversas situaciones de la vida cotidiana.

Ciertamente la investigación relativa a cómo se adquiere estas incipientes habilidades matemáticas resulta de gran interés. Por una lado al referirse a una de las capacidades más características del ser humano, la investigación en torno a cómo se adquiere la comprensión de los números permite inmiscuirse en el desarrollo de la propia esencia cognitiva que nos determina para percibir, interpretar y comunicar la realidad con el sesgo típicamente humano [52].

Por otro lado, la creciente demanda que nuestro contexto cultural exige con relación a una educación infantil de calidad [37, 44] y los objetivos que nuestra

sociedad tiene marcados con el fin de potenciar la educación matemática [28] obligan a reflexionar sobre prácticas educativas eficaces, en este caso, para favorecer la comprensión temprana de las primeras nociones aritméticas. Sobre este particular, se ha comprobado que la aprehensión temprana (referida, en nuestro contexto cultural, a la etapa infantil) de determinadas destrezas matemáticas tales como el desarrollo de estrategias de conteo, la identificación de números y el conteo súbito predicen de manera muy notable el éxito futuro de aprendizajes ligados no solo a la matemática sino también a ámbitos aparentemente no relacionados con este conocimiento, como el relativo a la lectoescritura [12].

En consecuencia, se puede considerar que actualmente asistimos a un creciente interés en torno a la investigación sobre el origen y desarrollo de la comprensión numérica que se traduce en un mayor número de publicaciones en torno a esta cuestión desde los campos de la educación matemática, la psicología del desarrollo, la psicología experimental y las neurociencias [6,47,52,63,67].

En lo que respecta al desarrollo de la comprensión de la noción de número durante la infancia, éste dista de ser un proceso simple y breve, considerando el hecho de que niños y niñas necesitan casi un lustro para completar dicho proceso. Atendiendo por tanto a su extensión en el tiempo y a la consideración de los distintos momentos evolutivos durante la infancia en los que acontece el desarrollo de la comprensión numérica, parece difícil suponer que se puede abordar la investigación de este fenómeno desde una perspectiva única. Más al contrario en este momento resulta forzoso aceptar una perspectiva multiparadigmática [10] de la cuestión que tenga en cuenta la construcción de la noción de número no sólo como un proceso de elaboración activa e individual a partir de la propia experiencia sino que también considere el papel que ineludiblemente deben jugar el desarrollo de las estructuras cognitivas innatas propias del ser humano en un contexto con una prácticas culturales determinadas.

A lo largo de este escrito se presenta una revisión sobre la investigación sobre el origen y desarrollo de la comprensión numérica desde distintas perspectivas que, presentadas en conjunto, permiten hacerse una idea cabal de las principales líneas de estudio en torno a las cuales progresa el conocimiento sobre cómo niños y niñas avanzan en el entendimiento del concepto de número. El inicio del proceso se situará necesariamente en los primeros meses de vida, bastante antes de se adquiera la capacidad de referirse verbalmente a conjuntos. Continúa en el momento que aparecen las primeras palabras número y éstas son paulatinamente empleadas con mayor frecuencia y precisión en tareas de conteo, por lo demás, cada vez más extensas. Finalmente, alrededor del séptimo año de vida son aprehendidos los fundamentos lógicos de la comprensión numérica que certifican una adecuada comprensión de la noción número.

En cualquier caso, parece necesario subrayar el hecho de que aunque el proceso

antedicho y la propia organización de este artículo siguen una estructura lineal, casi cronológica, la investigación en torno al desarrollo de la noción de número en la infancia se lleva a cabo desde paradigmas diferentes que parten de formas diferenciadas de entender la mente, el desarrollo humano y el diseño experimental. Sin embargo, la consideración de las necesidades que pueden surgir a la hora de planificar intervenciones educativas eficaces a pie de aula puede justificar la estructura gradual que se presenta.

## 2. El número sin palabras

Los primeros estudios que intentaron determinar si el ser humano es sensible al reconocimiento de cantidades antes del desarrollo de las capacidades lingüísticas comenzaron en la década de los 80 del pasado siglo. En un trabajo pionero, Starkey y Cooper [53] establecieron que bebés de entre 4 y 6 meses perciben variaciones cuantitativas en los estímulos. El diseño experimental de estos trabajos iniciales se basaba en el hecho de que la conducta atencional de los bebés está estrechamente ligada a la novedad de los estímulos y que la exposición repetida a los estímulos deteriora el interés por los mismos. Este fenómeno se ha venido en denominar habituación [67] y continúa siendo la pauta experimental en un gran número de trabajos, también en nuestros días.

A partir de finales de pasado siglo y muy especialmente en estos últimos años, un número significativo de estudios han ratificado las conclusiones propuestas por Starkey y Cooper (para una revisión ver [6]) y se ha confirmado que durante la etapa previa al advenimiento de las capacidades verbales existen al menos dos sistemas cognitivos vinculados al procesamiento de la información numérica; uno de estos sistemas permitiría la comparación aproximada de cantidades relativamente grandes y otro estaría relacionado con la determinación exacta de cantidades pequeñas.

Con relación al primero de los sistemas, al cual la bibliografía se refiere como approximate number system (ANS), (para una revisión: [14,41]), éste parece codificar la información cuantitativa relativa a eventos u objetos discretos en forma de representaciones mentales continuas tal como representaría la intensidad lumínica de un foco o el transcurrir del tiempo. Por otro lado, una característica propia de este sistema cognitivo es que éste no podría representar de forma exacta el número sino que, más bien, resultaría eficaz a la hora de discriminar de forma aproximada la diferencia entre dos cantidades. Por otro lado, la capacidad de discriminación entre cantidades del sistema no estaría determinada por la diferencia absoluta entre éstas sino por su razón. De esta manera a la temprana edad de tres meses los seres humanos demuestran la capacidad de diferenciar un estímulo visual compuesto por 16 puntos de otro en el que sólo aparecen 8 (2:1) pero fallarían en diferenciar 24 de otro 16 (3:2) (ver [29]). Con todo, la sensibilidad del ANS progresa y se refina a lo

largo de la niñez [27], de forma que a finales del primer año los bebés son sensibles a alteraciones cuantitativas en los estímulos visuales sujetas, también, a la razón de 3:2 (ver [40,67]). De hecho, la capacidad adulta para discriminar cantidades se sitúa en razones cercanas 7:8 (ver [1]).

Otro aspecto señalado del ANS está relacionado con las evidencias recogidas a partir de estudios en los campos de desarrollo cognitivo [16,21], la cognición comparada [9,25], las investigaciones tras-culturales [48] y la neurobiología [5,14] que parecen indicar que este sistema cognitivo ligado a la discriminación imprecisa de aspectos cuantitativos de los estímulos no sería específico de ninguna edad o cultura e incluso que sería compartido con otras especies de primates no-humanos [18].

Con relación al segundo de los sistemas cognitivos mencionados, al que se conoce en la bibliografía sobre la cuestión como *object file system*, éste permite a los sujetos seguir la pista de un número pequeño de objetos y registrar información cuantitativa precisa sobre los mismos [62,66]. Este sistema cognitivo repartiría recursos atencionales entre un número concreto y limitado de estímulos de forma que se establecería una correspondencia uno-a-uno entre cada uno de los elementos de un conjunto pequeño de elementos y su correspondiente representación mental. De esta manera el sujeto puede seguir la pista de los objetos en el espacio y considerar cambios u alteraciones, también, cuantitativas [31,43].

Aspectos esenciales de este mecanismo son, por un lado, que estaría disponible sólo para un número muy limitado de estímulos que no va más allá de cuatro elementos en adultos y de tres durante la infancia (ver [15]) y, por otro lado, que a diferencia del ANS, no estaría ligado a la razón numérica sino a la cantidad total de objetos. Por ejemplo, Feigenson, Carey y Hauser [16] registran que niños y niñas de un año no eligen al alzar ante la situación de tener que optar entre 1 versus 2 objetos e, igualmente, entre 2 vs. 3. Sin embargo, sí lo hacen de forma aleatoria ante la elección de 3 vs. 4; 2 vs. 4; 3 vs. 6 y 1 vs. 4. Similares conclusiones han sido publicadas en otros trabajos partiendo de diferentes supuestos experimentales [11,53].

En concordancia con el ANS, el *object file system* ha sido descrito como un sistema relativamente independiente de los procesos de enculturación de forma que está presente, con distintos niveles de precisión, en individuos de todas las edades [30] y de diferentes antecedentes culturales [24] e, igualmente, en otras especies de primates no-humanos [26].

Por otro lado, más allá de las comparaciones cuantitativas entre estímulos a través de los sistemas cognitivos expuestos, se ha constatado que entre las habilidades numéricas pre-verbales se encuentra también la capacidad de detectar cambios en conjuntos de objetos como consecuencia de adición o sustracción de algún elemento. Esta línea de investigación tienen sus orígenes en trabajos de Wynn [64]

utilizando un paradigma de la transgresión de la expectativa (para una revisión sobre los aspectos metodológicos de la investigación ver [58,59]) y ha resultado un ámbito de trabajo muy fructífero con interesantes publicaciones entre las que puede destacarse los estudios llevados a cabo por el equipo del profesor Toshikazu Hasegawa de la Universidad de Tokyo [34]. Según este trabajo bebés menores de 1 año son capaces de elaborar representaciones mentales de la cantidad independientes de la naturaleza de los estímulos (visual o auditivo) de forma que podrían predecir las consecuencias que se derivan de la adición o eliminación de objetos en conjuntos pequeños de no más de tres elementos.

En conjunto los datos publicados en los últimos años sugieren de forma insistente la existencia de capacidades cognitivas vinculadas a la comprensión cuantitativa de los estímulos y, asimismo, de incipientes habilidades aritméticas independientes de la propia utilización de símbolos que podrían constituir la base cognitiva del un originario *sense number* [13,17,15,2] que, se propone, jugarían un papel determinante en el desarrollo de las futuras habilidades aritméticas derivadas de la enculturación matemática.

### **3. Las palabras-número y el desarrollo de las habilidades de conteo**

En algún momento entre los 28 y 36 meses de edad niños y niñas comienzan a utilizar las palabras-número para sus actividades de enumeración e identificación de cantidades. De forma progresiva aprenden el uso de estas palabras y refinan sus habilidades para el conteo. Es precisamente esta última destreza, la capacidad de dotar de valor cuantitativo a las palabras-número, el puente entre las destrezas cognitivas nativas expuestas en los apartados anteriores y las habilidades aritméticas más avanzadas consecuencia de los procesos de enculturación [6,49]. El conteo debe entenderse, en consecuencia como una actividad trascendente y un prerrequisito indispensable en el desarrollo de la comprensión numérica futura (ver [55]) que se sostiene sobre los sistemas cognitivos primarios (ver [30]) pero que proyecta al sujeto hacia la futura comprensión del concepto socialmente establecido de número.

El primer eslabón en el desarrollo de las habilidades para el conteo constituye una progresiva habilidad para identificar y elaborar conjuntos de objetos pequeños [39,50]. En este sentido a través de un modelo experimental que expone a niños y niñas ante tareas de elaboración de grupos de objetos (para una revisión metodológica pueden resultar útiles [60,64]) se ha constatado que a partir del trigésimo mes de vida y por un periodo de aproximadamente 15 meses se va desarrollando la capacidad de delimitar conjuntos de, progresivamente, 1, 2 y 3 elementos que termina desembocando en el advenimiento del conteo como estrategia para la determinar el cardinal de un conjunto.

Entre los 30 meses y tres años de edad se comienzan diferenciando 1 de los que no lo es; de forma que los niños y niñas seleccionan de manera exclusiva un solo objeto cuando la actividad que están realizando incita a ello y, por otro lado, a pesar de que no sean capaces de reunir correctamente conjuntos de dos o más elementos, los errores nunca son por confusión de otra cantidad con la palabra-número uno. Consecutivamente, cuatro o cinco meses después, aparecen conductas coherentes con la comprensión de a qué se refiere la palabra-número dos; de forma que en este momento los sujetos son capaces de crear conjuntos de 1 y 2 elementos y de diferenciarlos de resto de las palabras-número. Cuatro o cinco meses después ocurre lo propio con la palabra-número tres.

Hasta este momento, los niños y niñas recurren al conteo súbito para determinar la cantidad de objetos a seleccionar de forma que no enumeran los objetos para distinguir la cantidad precisa sino que delimitan, sin contar, de entre un grupo de objetos aquellos que corresponden con los subconjuntos correspondientes a 1, 2 o 3 elementos [42]. Sin embargo, nuevamente en torno a cinco meses después de demostrar la capacidad de seleccionar correctamente hasta tres objetos, comienzan a utilizar por primera vez el conteo verbal para seleccionar conjuntos de cuatro o más objetos. Es éste, un momento clave en la evolución cognitiva y, en particular, en la comprensión del significado de las palabras-número. Anterior a este momento las palabras-número son empleadas como etiquetas a las que en ningún caso se recurre con el fin de determinar el cardinal de un conjunto. Sin embargo el paso ulterior al desarrollo de la capacidad de reunir 1, 2 o 3 objetos de manera eficiente, resulta ser, precisamente el empleo de las palabras-número y su correspondiente conteo verbal, para seleccionar conjuntos de objetos.

En suma, los niños y niñas comienzan trazando el significado de las palabras-número sobre conjuntos pequeños de elementos a través del conteo súbito y posteriormente aprenden el valor del conteo para determinar el cardinal de conjuntos y emplean esta mecánica para conjuntos de más de cuatro elementos [42,48].

Un aspecto accesorio e igualmente interesante por sus implicaciones a la hora de valorar la influencia de los procesos culturales en el aprendizaje temprano de conceptos matemáticos, se relaciona con el hecho de que el proceso de comprensión del conteo anteriormente expuesto parece ser influenciado de algún modo por la manera en que cada idioma emplea la distinción plural/singular asociada al empleo de las palabras número (véase [51,61]).

A partir de los cuatro años de edad se espera, por un lado, que niños y niñas demuestren, aún en niveles diversos, un conocimiento procedimental de la actividad de contar, es decir de la noción fundamental en torno al modo de determinar cuántos elementos hay en un conjunto a través de las palabras-número y, por otro lado, que este conocimiento sea coherente los siguientes principios de conteo [22,32]:

- Todos los objetos a contar deben ser enumerados y deben serlo solamente

una vez; es decir, correspondencia uno a uno entre las palabras-número y los objetos a contar (principio de correspondencia uno a uno).

- La serie de palabras-número debe ser utilizadas en un orden estable (principio de orden estable).
- La última de las palabras empleadas en el conteo tiene un valor especial vinculado es la palabra que sirve para determinar la cantidad total de objetos contados (principio de cardinalidad).
- El orden a partir del cual se cuentan los objetos no afecta al  $n$  (principio de irrelevancia del orden).
- Cualquier tipo de objeto, real o imaginario puede ser contado (principio de abstracción).

Existe un amplio consenso en torno a la idea de que la comprensión numérica durante la primera infancia (previa a los 6 años) gira en torno a la aprehensión de los citados principios de conteo pero todavía no está claro cuál es el papel que estos principios juegan en el desarrollo de las habilidades numéricas [54]. Mientras que algunos autores, basándose en el hecho de que los indicios de estos principios parecen detectarse a edades tan tempranas como a los 30 meses, defienden la naturaleza innata de los tres primeros principios y su función estructural en el desarrollo de la comprensión numérica [20,23]; otros investigadores entienden que los principios de conteo, lejos de ser innatos, son más bien consecuencia del esfuerzo cognitivo que niños y niñas realizan por dar sentido a las rutinas de conteo verbal a través de un proceso de proyección de las palabras-número sobre los sistemas de representaciones de cantidades pequeñas (para una revisión, ver [38,39]).

#### 4. La construcción del concepto de número

Resulta difícil referirse al estudio de cómo se desarrolla la comprensión de los conceptos matemáticos durante la infancia, y en particular de la noción de número, sin mencionar las aportaciones que Jean Piaget realizó en este ámbito (véase la bibliografía [35,45,46]). Gran parte de la investigación en los campos de la educación matemática, de la psicología del desarrollo y del desarrollo cognitivo ha sido influenciada por las ideas de Piaget relacionadas con la cuestión de cómo los niños y niñas construyen conceptos y qué tipo de comprensión alcanzan a lo largo del desarrollo [36].

Por obvio no deja de ser llamativo que una de las principales aportaciones de Piaget en el campo del estudio de la evolución del pensamiento matemático se refiere a la constatación de que a lo largo de la infancia y la adolescencia el

pensamiento pasa por etapas esencialmente diferenciables, no simplemente desde la perspectiva de que los niños y niñas van aprendiendo más a medida que crecen sino que, fundamentalmente, éstos piensan de forma diferente a cómo piensan los adultos [19].

En relación con estas ideas, la investigación sobre el desarrollo del pensamiento matemático iniciada por Piaget en la segunda mitad del siglo pasado y continuada por las corrientes neo-piagetanas, intenta esclarecer las peculiaridades que el pensamiento humano tiene en las distintas fases del desarrollo. Esta línea de estudio ha sido interesante tanto desde una perspectiva científica como desde el punto de vista del mundo de la educación ya que ha ayudado a consolidar el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje durante la infancia y ha sugerido metodologías didácticas alternativas que han ayudado a superar la falta de comprensión característica de las rutinas de aprendizaje escolar tradicional de la matemática.

Sin embargo, por otro lado, resulta difícil hacer encajar las aportaciones de la perspectiva piagetana con las contribuciones que en los últimos tiempos se han ido realizando en torno a las capacidades numéricas de niños y niñas menores de 6 años, tal y como se ha expuesto en los apartados anteriores de este escrito. En gran medida estas dificultades están ligadas a la propia base conceptual sobre la que se sustentan ambos puntos de vista. Para Piaget el conocimiento es un proceso de construcción esencialmente individual promovido por la propia acción que el sujeto ejerce en el entorno y avocado a transformarse en formas cualitativamente diferentes que permitan dar sentido a una realidad, también, paulatinamente, más compleja. Empero, desde aquellas perspectivas que intentan clarificar la raíz del pensamiento numérico antes de los 6 años (ver apartados iniciales de este artículo) el desarrollo cognitivo es un cambio progresivo y sostenido de mejora y refinamiento de elementos cognitivos inherentes al propio sistema, descartando transformaciones del pensamiento en forma de fases o estadios cualitativamente diferenciables (para una revisión ver [56,57]).

Con todo, resulta innegable que la perspectiva piagetana ofrece un paradigma útil para entender cómo a partir de los 6 años se logra una aprehensión más profunda de la noción de número. Esta posición denominada constructivismo, entiende que el conocimiento lógico-matemático no es accesible directamente desde la realidad (conocimiento físico) ni desde el conocimiento de la realidad social (conocimiento socio-convencional) y que la aprehensión de, en este caso, la noción matemática de número debe tener su origen en la propia mente del individuo y en el mundo de relaciones que éste realiza a partir de sus propias experiencias con los objetos del mundo real [4,33].

A partir de estas ideas el paradigma constructivista entiende que el advenimiento del concepto de número es consecuencia del desarrollo de las bases lógicas que permiten entender su comprensión, más allá de usos lingüísticos rutinarios



que, según Piaget, caracterizan el empleo de los números antes de los 6 años. En concreto estas bases lógicas se relacionarían con las siguientes destrezas del razonamiento: (a) la referida al conocimiento de que la cantidad es una característica de los conjuntos que permanece constante a pesar de las modificaciones que éstos pueden sufrir en cuanto a su apariencia o distribución -conservación-; (b) la vinculada a la habilidad para establecer deductivamente la relación existente entre dos elementos que no han sido comparados, a partir de otras relaciones que sí han sido establecidas perceptivamente (si  $A > B$  y  $B > C$ ; luego,  $A$  deberá ser mayor que  $C$ ) -transitividad- y (c) la relacionada con la capacidad de ordenar estímulos conforme una dimensión cuantitativa -seriación- (véase [3,4]).

De modo que, en correspondencia con este modelo constructivista, el desarrollo de las habilidades lógicas de los niños y niñas no desembocaría en el surgimiento del concepto de número hasta finalizada su primera infancia, en torno al séptimo cumpleaños, momento en el que el pensamiento se hace más flexible, organizado y lógico y, especialmente, menos dependiente de la acción (es decir, de la necesidad de establecer relaciones perceptivas entre las causas y los efectos) y más proclive al empleo de representaciones mentales de esquemas motores [7,45].

De las muchas consecuencias que se derivan de este modelo de comprensión del desarrollo, una de las más destacables es la importancia que se otorga al desarrollo de las destrezas lógicas en el desarrollo del pensamiento matemático; hecho que ha tenido una remarcable influencia en la práctica educativa (interesantes ejemplos pueden consultarse en [8]).

## 5. Conclusiones

Aunque aparentemente simple desde la perspectiva adulta, lo cierto es que la comprensión del concepto de número a lo largo de la infancia dista de ser un breve y sencillo proceso.

Como se ha expuesto a lo largo de este escrito, la comprensión del concepto de número puede iniciarse en los primerísimos meses de vida, cuando los bebés comienzan a desplegar las herramientas cognitivas que les van a facilitar el entendimiento del mundo que les rodea. Continúa en los albores del intrincado aprendizaje del lenguaje, alrededor de los dos años y medio, iniciando las conexiones entre las representaciones internas de los aspectos cuantitativos de los estímulos y las primeras palabras-número. De esta manera dan los primeros pasos en el aprendizaje del conteo, inicialmente, identificando cantidades pequeñas a partir de las palabras-número y más adelante, alrededor de los cuatro años, refinando el conocimiento del conteo y ajustando esta actividad a unos principios procedimentales entre los que destaca el valor que comienzan a otorgar, como característica de todo el conjunto,

a esa última palabra que aparece en la enumeración de grupos de objetos.

Comprender los últimos pasos del aprendizaje del concepto de número, como se ha explicado, exige un cambio de paradigma hacia modelos constructivistas que sitúan en el cambio de etapa evolutiva que ocurre a los 7 años el momento clave en el que del pensamiento de niños y niñas surge, a partir de la evolución en sus propias capacidades de razonamiento lógico, la noción de número socialmente aceptada.

De esta forma, parece razonable suponer que el proceso de construcción del concepto de número, efectivamente, dista de ser breve y simple. En cualquier caso parece innegable que la investigación en torno a este tema, y más en general sobre el desarrollo del pensamiento matemático, es una cuestión de indudable actualidad. En primer lugar, por las repercusiones que la investigación en este ámbito tiene en la propia concepción del desarrollo humano (en este sentido, los trabajos de Jean Piaget han sido un referente en la conexión entre estos dos ámbitos: pensamiento matemático y desarrollo). Pero por otro lado es también una cuestión candente por la consideración de la influencia que el aprendizaje de conceptos matemáticos durante la infancia tiene en el desarrollo futuro de la comprensión matemática (e incluso de otros áreas de conocimiento, aparentemente, no relacionadas con la matemática), y por la consiguiente demanda de pautas didácticas de aprendizaje matemático eficaz, también, para la edad infantil.

## Bibliografía

- [1] H. Barth, N. Kanwisher, E. Spelke, *The construction of large number representations in adults*, *Cognition* 86, 201-221, 2003.
- [2] H. Barth, K. La Mont, J. Lipton, S. Dehaene, N. Kanwisher, E. Spelke, *Non-symbolic arithmetic in adults and young children*, *Cognition* 98 (3), 199-222, 2006.
- [3] S. Bouwmeester, K. Sijtsmal, *Measuring the ability of transitive reasoning, using product and strategy information*, *Psychometrika* 69 (1), 123-146, 2004.
- [4] P. Bryant, *Mathematical Understanding in the Nursery School Years*, en P. Bryant, T. Nunes (Editors), *Learning and Teaching Mathematics. An International perspective* (pp. 53-67). Psychology Press ltd, Publishers, 1997.
- [5] B. Butterworth, *The Mathematical Brain*, Macmillan, 1999.
- [6] B. Butterworth, *The development of arithmetical abilities*, *Journal of Child Psychology and Psychiatry* 46(1), 3-18, 2005.
- [7] S. Cahan, C. Greenbaum, L. Artman, N. Deluya, Y. Gappel-Gilon, *The differential effects of age and first grade schooling on the development of infralogical and logico-mathematical concrete operations*, *Cognitive Development* 23, 258-277, 2008.

- [8] M. A. Canals, *Gabinet de Materials i de Recerca per la Matemàtica a l'Escola*, Universitat de Girona, 2010; tomado de: <http://gamar.udg.edu/>.
- [9] J. F. Cantlon, E. M. Brannon, *Semantic congruity affects numerical judgments similarly in monkeys and humans*, Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A. 102, 16507-16511, 2005.
- [10] A. Caparrós, *La psicología, ciencia multiparadigmática*, Anuario de psicología 19, 79-110, 1978.
- [11] M. W. Clearfield, K. S. Mix, *Number versus contour length in infants' discrimination of small visual sets*, Psychol. Sci. 10, 408-411, 1999.
- [12] D. H. Clements, J. Sarama, *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*, Routledge, 2009.
- [13] S. Dehaene, *The Number Sense*, Oxford University Press, 1997.
- [14] S. Dehaene, M. Piazza, P. Pinel, L. Cohen, *Three parietal circuits for number processing*, Cognitive Neuropsychology 20, 487-506, 2003.
- [15] L. Feigenson, S. Dehaene, E. Spelke, *Core systems of number*, Trends in Cognitive Sciences 8, 307-314, 2004.
- [16] L. Feigenson, S. Carey, M. Hauser, *The representations underlying infants' choice of more: object-files versus analog magnitudes*, Psychol. Sci. 13, 150-156, 2002.
- [17] J. Féron, E. Gentaz, A. Streri, *Evidence of amodal representation of small numbers across visuo-tactile modalities in 5-month-old infants*, Cognitive Development 21(2), 81-92, 2006.
- [18] J. I. Flombaum, J. A. Junge, M. D. Hauser, *Rhesus monkeys (Macaca mulatta) spontaneously compute addition operations over large numbers*, Cognition 97(3), 315-325, 2006.
- [19] K. C. Fuson, *Avoiding misinterpretations of Piaget and Vygotsky: Mathematical teaching without learning, learning without teaching, or helpful learning-path teaching?*, Cognitive Development 24(4), 343-361, 2009.
- [20] C. R. Gallistel, R. Gelman, *Preverbal and verbal counting and computation*, Cognition 44, 43-74, 1992.
- [21] C. R. Gallistel, R. Gelman, *Non-verbal numerical cognition: from reals to integers*, Trends in Cognitive Sciences 4, 59-65, 2000.
- [22] R. Gelman, C. R. Gallistel, *The child's understanding of number*, Harvard University Press, 1978.
- [23] R. Gelman, E. Meck, *Preschoolers' counting: principles before skill*, Cognition 13, 343-360, 1983.
- [24] P. Gordon, *Numerical cognition without words: evidence from Amazonia*, Science 306, 496-499, 2004.
- [25] M. D. Hauser, E. S. Spelke, *Evolutionary and developmental foundations of human knowledge: a case study of mathematics*, en The Cognitive Neurosciences

(Gazzaniga, M.S.,ed.), pp. 853-864, The MIT Press, 2004.

- [26] M. D. Hauser, S. Carey, *Spontaneous representations of small numbers of objects by rhesus macaques: Examinations of content and format*, *Cognitive Psychology* 47(4), 367-401, 2003.
- [27] J. Halberda, L. Feigenson, *Developmental change in the acuity of the "number sense": The approximate number system in 3-, 4-, 5-, and 6-year-olds and adults*, *Developmental Psychology* 44(5), 1457-1465, 2008.
- [28] ISEI-IVEI, *Graduados en ciencias, matemáticas y tecnología*, tomado de ISEI-IVEI - Instituto Vasco de Evaluación e Investigación educativa <http://www.isei-ivei.net/cast/sviec/historial/2009/Rs7cast-n.pdf>, 2010.
- [29] V. Izard, C. Sann, E. S. Spelke, A. Streri, *Newborn infants perceive abstract numbers*, *Proceedings of the National Academy of Science USA* 106(25), 10382-10385, 2009.
- [30] N. C. Jordan, S.C. Levine, *Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children*, *Developmental Disabilities Research Reviews* 15, 60-68, 2009.
- [31] D. Kahneman, A. Treisman, B. Gibbs, *The reviewing of object files: Object specific integration of information*, *Cognitive Psychology* 24, 175-219, 1992.
- [32] D. Kamawar, A. LeFevre, J. Bisanz, L. Fast, S. Skwarchuk, B. Smith-Chant, M. Penner-Wilger, *Knowledge of counting principles: How relevant is order irrelevance?*, *Journal of Experimental Child Psychology* 105, 138-145, 2010.
- [33] C. Kamii, J. Rummelsburg, A. Kari, *Teaching arithmetic to low-performing, low-SES first graders*, *The Journal of Mathematical Behavior* 24(1), 39-50, 2005.
- [34] T. Kobayashi, K. Hiraki, T. Mugitani, T. Hasegawa, *Baby arithmetic: One object plus one tone*, *Cognition* 91(2), 23-34, 2004.
- [35] E. Labinowicz, *The Piaget Primer: Thinking, Learning, Teaching*, Dale Seymour Publications, 1980.
- [36] F. K. Lester, Jr. , *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, Information Age Publishing, 2007.
- [37] M. J. Lera, *Calidad de la Educación Infantil: instrumentos de evaluación*, *Revista de educación* 343, 187-188, 2008.
- [38] M. Le Corre, S. Carey, *One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles*, *Cognition* 105, 395-438, 2007.
- [39] M. Le Corre, S. Carey, *Why the verbal counting principles are constructed out of representations of small sets of individuals: A reply to Gallistel*, *Cognition* 107, 650-662, 2008.
- [40] J. Lipton, E. Spelke, *Origins of number sense: Large number discrimination in human infants*, *Psychological Science* 14, 396-401, 2003.
- [41] K. McCrink ES. Spelke, *Core multiplication in childhood*, *Cognition* 116(2),

204-16, 2010.

[42] K. S. Mix, *How Spencer made number: First uses of the number words*, Journal of Experimental Child Psychology 102, 427-444, 2009.

[43] K. Muldoon, C. Lewis, N. Freeman, *Why set-comparison is vital in early number learning*, Trends in Cognitive Sciences 13(5), 203-208, 2009.

[44] J. I. Navarro, M. Aguilar, C. Alcalde, E. Marchena, G. Ruiz, I. Menacho, M. G. Sedeño, *Estimación del aprendizaje matemático mediante la versión española del Test de Evaluación Matemática Temprana de Utrecht*, European Journal of Education and Psychology 2 (2), 131-143, 2009.

[45] J. Piaget, B. Inhelder, *The psychology of the child*, Routledge and Kegan Paul, 1969. (Trabajo original publicado en 1967)

[46] J. Piaget, A. Szeminska, *The child's conception of number*, Routledge and Kegan Paul, 1965.

[47] M. Piazza P. Pinel, D. Le Bihan, S. Dehaene, *A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex*, Neuron 53(2), 293-305, 2007.

[48] P. Pica, C. Lemer, V. Izard, S. Dehaene, *Exact and approximate arithmetic in an Amazonian indigene group*, Science 306, 499-503, 2004.

[49] B. W. Sarnecka, S. Carey, *How counting represents number: What children must learn and when they learn it*, Cognition 108, 662-674, 2008.

[50] B. W. Sarnecka, M. D. Lee, *Levels of number knowledge during early childhood*, Journal of Experimental Child Psychology 103, 325-337, 2009.

[51] B. W. Sarnecka, V. G. Kamenskaya, Y. Yamana, T. Ogura, J. B. Yudovina, *From grammatical number to exact numbers: Early meanings of "one", "two", and "three" in English, Russian, and Japanese*, Cognitive Psychology, 55, 136-168, 2007.

[52] E. S. Spelke, K. D. Kinzler, *Core knowledge*, Developmental Science 10(1), 89-96, 2007.

[53] P. Starkey, R. G. Cooper, *Perception of numbers by human infants*, Science 210, 1033-1035, 1980.

[54] P. Stock, A. Desoete, H. Roeyers, *SMastery of the counting principles in toddlers: A crucial step in the development of budding arithmetic abilities?*, Learning and Individual Differences 19, 419-422, 2009.

[55] B. A. M. Van de Rijt, J. E. H. Van Luit, *Milestones in the development of infant numeracy*, Scandinavian Journal of Psychology 40, 65-71, 1999.

[56] J. D. Villarroel, *Zenbakizko pentsamenduaren sorrera psikologia paradigma ezberdinetatik*, Tantak. Euskal Herriko Unibertsitateko hezkuntza aldizkaria 39, 87-109, 2008.

[57] J. D. Villarroel, T. Nuño, *Umeen zenbatze ekintzari buruzko perspektiba berriak: piagetengandik haratago*, Uztaro 65, 55-71, 2008.

[58] J. D. Villarroel, *Origen y desarrollo del pensamiento numérico: Una pers-*

*pectiva multidisciplinar*, Revista Electrónica de Investigación Psicoeducativa 7(1), 130-165, 2009.

[59] J. D. Villarroel, *Investigación sobre el conteo infantil*, Ikastorratza e-Revista de Didáctica 4, 2009, tomado de

[http://www.ehu.es/ikastorratza/4\\_alea/4\\_alea/conteo%20infantil.pdf](http://www.ehu.es/ikastorratza/4_alea/4_alea/conteo%20infantil.pdf)

[60] J. D. Villarroel, T. Nuño, G. Goñi, *The origin of numerical concepts: early meanings of "one", "two", and "three" among Basque - and Spanish - speaking children*, Problems of Education in the 21st Century, 10 (10), 109-123, 2009.

[61] J. D. Villarroel, M. Miñón, T. Nuño, *The origin of counting: a study on the early meaning of 'one', 'two', and 'three' among Basque- and Spanish-speaking children*, Educational Studies in Mathematics (aceptado y pendiente de publicación).

[62] K. van Marle, K. Wynn, *Infants' auditory enumeration: Evidence for analog magnitudes in the small number range*, Cognition 111(3), 302-316, 2009.

[63] M. G. von Aster, R. Shalev, *Number development and developmental dyscalculia*, Developmental Medicine & Child Neurology 49(11), 868-873, 2007.

[64] K. Wynn, *Children's acquisition of number words and the counting system*, Cognitive Psychology 24, 220-251, 1992.

[65] F. Xu, E. S. Spelke, *Large number discrimination in 6-month old infants*, Cognition 74, B1-B11, 2000.

[66] F. Xu, *Numerosity discrimination in infants: Evidence for two systems of representations*, Cognition 89(1), B15-B25, 2003.

[67] F. Xu, E. Spelke, S. Goddard, *Number Sense in Human Infants*, Developmental Science 8(1), 88-101, 2005.

### José Domingo Villarroel Villamor

Universidad del País Vasco  
Escuela de Magisterio de Vitoria  
Didáctica de la Matemática y de las Ciencias  
Experimentales  
Juan Ibáñez de Sto. Domingo 1, 01006 (Vitoria-  
Gasteiz)  
e-mail: [txomin.villarroel@ehu.es](mailto:txomin.villarroel@ehu.es)  
<http://ehu.es/ikastorratza/>

