Sudokus y modelización

por
María Merino Maestre, Universidad del País Vasco

" The essence of mathematics is not to make simple things complicated, but to make complicated things simple" (Stan Gudder)

"There are things which seem incredible to most men who have not studied mathematics." (Aristóteles)

1. Motivación

El sudoku se ha convertido en un fenómeno, como lo manifiesta el hecho de que multitud de diarios y revistas lo hayan añadido en la sección de pasatiempos. Ha alcanzado tal popularidad en prensa internacional que se le ha llamado *el rompecabezas con un crecimiento más rápido en el mundo*. Se ha extendido desde foros de puro entretenimiento, páginas en internet como [21], hasta publicaciones científicas. Como ejemplo anecdótico del efecto de su repercusión, podemos encontrar el sudoku más grande del mundo en la M4, a las afueras de Bristol, que podía ser visto a una milla de distancia. Fue construido en 2005 para publicitar el primer programa de televisión basado en el juego, *Sudoku live*, presentado por Carol Vorderman para la cadena británica Sky One.

Pero, ¿qué matemáticas se encierran detrás de este juego? ¿Sería sencillo modelizar este problema, representarlo mediante un sistema de ecuaciones? Lo que a mano se resuelve en pocos minutos o varias horas, ¿cuánto tiempo tardaría un programa de ordenador en resolverlo? Si completáramos uno al día, ¿cuánto tiempo necesitaríamos para resolver todos los posibles sudokus? ¿Cuál es el mínimo número de entradas que hacen falta para que exista una única solución?

A lo largo de estas páginas trataremos de responder, entre otras, estas preguntas. Acorde a la serie de conferencias en que nos encontramos realizaremos dos paseos. El primero, en la Sección 2, a lo largo de la rama de la Matemática Aplicada encargada de la modelización de problemas, conocida como Investigación Operativa. Y el segundo, en la Sección 3, a través del entretenido mundo del sudoku. De esta forma, llegaremos a nuestro destino en la Sección 4, en la que se aborda la modelización matemática del pasatiempo en cuestión y se recorren brevemente alguna de las propiedades más interesantes que se pueden analizar matemáticamente.

2. Investigación Operativa

2.1. Introducción

Pero, ¿en qué consiste la Investigación Operativa? Veamos algunas de las definiciones dadas:

- Un método científico para dotar a los departamentos ejecutivos de una base cuantitativa para las decisiones que tengan que ver con las operaciones bajo su control (McCord y Kimball, 1951)

- El uso de la lógica y de la matemática de forma que no interfieran con el sentido común (Woolsey, 1980).

- Rama interdisciplinaria de la Matemática Aplicada que emplea la modelización, estadística y algoritmos para alcanzar soluciones óptimas (o cuasi) a complejos sistemas reales, con la finalidad de mejorar su funcionamiento. Ayuda en el proceso de toma de decisiones utilizando métodos científicos (Wikipedia, 2010).

Entre los objetivos de esta ciencia interdisciplinaria, están los clásicos de maximización de beneficios o rendimiento y minimización de pérdida, costes o riesgo, a los que se suman -entre otros- los objetivos de eficiencia (asignación de recursos a actividades), la optimización espacio-temporal (mínima espera en una cola o mínima distancia a recorrer en un viaje) y la mejora en términos de equidad (minimización de diferencias entre individuos en cuanto al reparto de trabajo o la distribución de vacaciones).

Esta ciencia, también conocida como Ciencia de la Gestión, Teoría de la Toma de Decisiones, Programación Matemática, Optimización, Ciencia para la Mejora, cuenta con aplicaciones en todos los campos: industrial, económico y científico (véase [12]). Así como en beneficio de la Humanidad y de la Sociedad (pueden consultarse algunos libros -por ejemplo, [1] y [4]- de Russell Lincoln Ackoff (1919-2009), de la Universidad de Penssylvania y Charles West Churchman (1913-2004), de la de California, Berkeley).

Las Sociedades de Investigación Operativa están organizadas bajo la federación mundial fundada en 1959 IFORS (International Federation of Operational Research Societies, [11] a la que pertenecen unas 30000 personas y cuya misión es la promoción de esta ciencia como disciplina académica y como profesión. La Federación agrupa unos 45 países en cuatro regiones geográficas: Asia Pacífico, Europa, América del Norte y América Latina. Cada región a su vez cuenta con su propia asociación que agrupa las sociedades creadas en su entorno, las primeras constituídas a mediados del siglo XX: en Europa se encuentra EURO (Association of European Operational Research Societies, 1976) a la que pertenece la española SEIO (Sociedad de Estadística e Investigación Operativa, 1962); América del Norte cuenta con la Asociación NORAM (Association of North American Operations Research Societies, 1987) y el Instituto INFORMS (Institute for Operations Research and Management Sciencies, 1995); a Asia Pacífico pertenece APORS (Association of Asian-Pacific Operational Research Societies, 1985); y por último en Latinoamérica se establece ALIO (Asociación Latino-Iberoamericana de Investigación Operativa, 1982).

2.2. Clasificación

Los problemas que aborda la Investigación Operativa se pueden clasificar de diferentes formas. Atendiendo a la certidumbre de los datos, se dividen en (a) modelos *determinísticos*, (b) modelos *probabilísticos* y (c) modelos *híbridos*. Según el objetivo del problema se pueden clasificar en modelos de *optimización*, cuando el objetivo es maximizar o minimizar una cantidad, sujeta a una serie de limitaciones que restringen la decisión; y modelos de *predicción*, cuando el objetivo es predecir o describir sucesos dadas ciertas condiciones. Entre los modelos de **optimización**, se encuentran:

- Problemas de *secuenciación*, como puede ser decidir el orden a procesar en el mínimo tiempo un número de trabajos en varias máquinas que requieren tiempos diferentes.
- Problemas de *localización*, como los problemas de *asignación* de recursos limitados de la manera más eficiente o los problemas de *transporte*, que distribuyen objetos desde ciertos orígenes a varios destinos.
- Problemas de *rutas*, tratan de encontrar la ruta óptima desde un origen a un destino cuando existen varias alternativas posibles, como el del *viajante de comercio*.
- Problemas de *búsqueda* de información para tomar una decisión, como realizar exploraciones de la tierra para encontrar recursos naturales.

En cuanto a ejemplos de modelos de **predicción**, están los siguientes:

- Problemas de *reemplazamiento*, se pueden realizar de manera preventiva o correctiva, por vejez, desgaste o muerte súbita. Se ocupan de decidir el tiempo adecuado para sustituir un equipo.
- Problemas de *inventario o existencias*, consisten en determinar la cantidad ideal de productos que se deben tener disponibles en una tienda o almacén. Responden a cuántos artículos reponer y cuándo hacerlo.
- Problemas de *colas*, se ocupan de estudiar el número de clientes que solicita un servicio en función del tiempo de llegada y de espera hasta ser atendido en un banco o supermercado.
- Problemas de *competencia o teoría de juegos*, cuando dos o más sujetos compiten por un recurso. Como la obtención de un contrato para prestar un servicio o la efectividad de las campañas publicitarias.

2.3. Programación Lineal

Una de las áreas más importantes y activas de la Investigación Operativa es la *Programación Lineal*. Los problemas que trata se basan en la optimización (minimización o maximización) de una función lineal conocida como *función objetivo*, sujeta a una serie de *restricciones* lineales de igualdad o desigualdad.

Matricialmente, se puede expresar como:

$$\begin{array}{ll} opt & c^t x \\ s.a & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde $x \in \mathbb{R}^{+n}$ representa el vector de variables a determinar, $c \in \mathbb{R}^n$ es el vector de costos asociado a las variables, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ es la matriz de coeficientes y $b \in \mathbb{R}^m$ el vector de términos independientes.

Los problemas lineales se pueden clasificar en cuanto al carácter de las variables en *problemas enteros*, en que las variables toman valores en $\mathbb{Z}$ (las variables representan objetos indivisibles) o en particular problemas enteros 0-1 (decisiones de tipo sí/no, comprar/vender, etc); o bien, *problemas mixtos*, si intervienen variables enteras y reales.

El reconocimiento de la importancia de este tipo de problemas coincidió con el desarrollo en 1947 de un método eficiente, el *método simplex* por George Bernard Dantzig (1914-2005) y un medio, el ordenador, para aplicarlo.

En la actualidad, el algoritmo simplex es una herramienta estandar que ha ahorrado enormes cantidades de dinero a la mayoría de las empresas en los países industrializados y su extensión a otros sectores de la sociedad avanza rápidamente. A comienzos del milenio, este algoritmo aparece en la revista *Computing in Science*

& Engineering [16] elegido como *uno de los diez algoritmos de mayor influencia en el desarrollo y la práctica de la ciencia y la ingeniería en el siglo XX*.

En cuanto a la metodología que emplea la Investigación Operativa, puede reducirse a: (1) análisis de la realidad y formulación del problema; (2) modelado matemático representativo, se deben identificar las variables de decisión, la función objetivo y las restricciones del problema; (3) resolución del modelo; (4) presentación de resultados, representatividad del modelo y análisis de sensibilidad; (5) implementación de resultados: ejecución.

3. Sudokus

3.1. Terminología

Un *sudoku* es un puzle basado en la lógica consistente en la colocación de números. Se rige por la llamada *regla única*, que consiste en rellenar una cuadrícula de 9×9 celdas dividida en cajas de 3×3 con las cifras del 1 al 9 partiendo de algunos números ya dispuestos en algunas de las celdas. No se debe repetir ninguna cifra en una misma fila, columna o caja. Se dice que un sudoku está *bien definido o planteado*, si existe solución y es única.

Se denota como *entrada* a cualquier valor dado inicialmente; por *caja, región o bloque* -indistintamente- se hace referencia a cada una de las 9 submatrices principales de orden 3×3; *celda o casilla* es cada uno de los 81 cuadrados a rellenar; se conoce como *banda*, cualquiera de los 3 bloques horizontalmente adyacentes y como *pilar*, cualquiera de los 3 bloques verticalmente adyacentes. Por último, se dice que un sudoku es *irreducible o minimal* si es un sudoku bien planteado al que no es posible quitar una entrada y que continúe bien definido.

3.2. Historia

Es probable que este rompecabezas numérico tenga su origen en los trabajos de Leonhard Euler (1707-1783), ya que este matemático suizo utilizó el *cuadrado latino*[1] para realizar cálculos de probabilidades. Un siglo después, a finales del XIX, aparecen los primeros puzles numéricos en prensa. En el diario parisino *Le Siècle*, se publicó el 19 de noviembre de 1892 un *cuadrado mágico*[2] 9×9 parcialmente completo con regiones 3×3. No es propiamente un sudoku, pues contiene números

[1] Un cuadrado latino es una matriz de $n \times n$ elementos, en la que cada celda está ocupada por uno de los n símbolos de tal modo que cada uno de ellos aparece exactamente una vez en cada columna y cada fila. Deben su nombre a Euler, quién utilizó caracteres latinos como símbolos, y tienen su aplicación en el diseño de experimentos y en los códigos de detección de errores. Para la relación con las propiedades del sudoku, véase [3].

[2] Un cuadrado mágico es la disposición de una serie de números enteros en un cuadrado o matriz de forma tal que la suma de los números por columnas, filas y diagonales principales sea la misma, la constante mágica.

de dos dígitos y requiere habilidades aritméticas más que lógica en su resolución, pero cumplía las mismas reglas. El 6 de julio de 1895, el periódico rival *La France* modifica el juego anterior, de forma que cada fila, columna y diagonales contengan los números del 1 al 9 (y por tanto, sumen 45), pero no considera las regiones. En el juego creado por M. B. Meyniel, aunque las cajas no están marcadas, de hecho también comprenden los números 1-9. Estos puzles semanales fueron una característica de la prensa francesa durante una década, como el *L'Echo de Paris*, pero desaparecieron con la I Guerra Mundial.

No obstante, se cree que el sudoku moderno fue ideado por el arquitecto jubilado Howard Garns (1905-1989), constructor de rompecabezas nacido en Indiana. Fue publicado por primera vez en Nueva York por la empresa *Dell Magazines* en *Dell Pencil Puzzles & Word Games* bajo el nombre *Number Place*. No está claro si estaba familiarizado con alguno de los periódicos franceses citados, pero es cierto que murió antes de conocer que su creación se había convertido en un fenómeno mundial. En 1984, el japonés Maki Kaji (nacido en 1951) viaja a Estados Unidos donde descubre la revista de pasatiempos. Posteriormente, la editorial *Nikoli* (fundada en 1978) lo exporta a Japón, se publica en el periódico *Monthly Nikolist* en 1984 bajo el nombre *Suji wa dokushin ni kagiru* (los números deben estar solos), que se abrevió a *Su Doku*. En 1986, su presidente Maki Kaji introdujo dos innovaciones que garantizarían la popularidad del juego: el número de entradas estaría restringida a un máximo de 32 y sería simétrico, es decir, las celdas con cifras dadas inicialmente estarían dispuestas de forma rotacionalmente simétrica. Pero su éxito en Europa se debe a otro jubilado, el juez Wayne Gould, neozelandés nacido en 1945 y residente en Hong Kong, que desarrolló durante 6 años un programa de ordenador para producir rompecabezas rápidamente y en la actualidad, el proveedor exclusivo de sudokus del diario inglés *The Times*. Nikoli Co. Ltd ha firmado un contrato con una editorial inglesa que lo distribuye al resto de Europa. Se dice que la particularidad de la editorial japonesa de reducida plantilla (16 empleados) es el sudoku generado a mano, sin ordenadores, que es la marca de Gould.

En 2005, el *International Collegiate Programming Contest*[3] *(ICPC)* lo incluye entre sus 9 problemas y se publica el primer libro sobre sudokus de autor español, [8]. En este año alcanza gran popularidad en prensa británica e internacional, por lo que es apodado *"el rompecabezas con un crecimiento más rápido en el mundo"*. A partir de 2006 se celebra un Campeonato Mundial de Sudoku: el primero tiene lugar en Lucca (Italia) y la ganadora es Jana Tylova, economista checa de 31 años; en 2007 se celebra en Praga y el ganador es el bioingeniero estadounidense Thomas Snyder de 27 años, que repite su triunfo en 2008 en Goa (India); en 2009, en Žilina (Eslovaquia) triunfa Jan Mrozowsky, un ingeniero polaco de 22 años,

---

[3]Concurso anual de programación entre universidades de los seis continentes, patrocinado por IBM y promovido por la *Association for Computing Machinery (ACM)* [2]

que defiende su título en 2010 en Filadelfia (EEUU). Desde 2007 también hay competiciones por equipos resultando los países ganadores de los últimos 4 años: Japón, República Checa, Eslovaquia y Alemania, respectivamente. En 2010 surge la Federación Mundial de Sudoku [26].

¿A qué se debe el éxito de su expansión? Carol Vorderman explica en su libro [22] porqué ella y muchas otras personas disfrutan resolviendo sudokus. Según la escritora, la adicción se debe a cinco factores: la simplicidad de las reglas del juego, la satisfacción de completar un rompecabezas, la rápida mejora de las habilidades, la facilidad de guardarlos para continuar en cualquier otro momento y la facilidad de transportarlos.

En cuanto a las estrategias de resolución humana, se combinan tres procesos: el escaneo, el marcado y el análisis.

El escaneo, consta a su vez de dos técnicas, la trama cruzada y el recuento. En la primera se rastrean sistémáticamente y por orden de frecuencia, las filas (o columnas) para identificar qué celda, por eliminación, puede contener un número y en la segunda, el recuento, se identifican los números perdidos por fila, columna o caja.

El marcado, se emplea cuando tras el escaneo no es posible descubrir nuevos números, anotando números candidatos en las celdas vacías tras un análisis lógico.

El análisis, puede hacerse por eliminación o por reducción al absurdo. Por eliminación si, por ejemplo, exactamente dos (k) celdas de la misma fila (o columna o caja) contienen el mismo par (k-terna) de números candidatos y no otros, dicho par (k-terna) de números no podrán encontrarse en las demás celdas de la misma fila (o columna o caja), por lo que pueden borrarse como candidatos. En la reducción al absurdo, en el caso más sencillo se selecciona una celda con no más de 2 candidatos y se realiza una conjetura, si tras repetir los procesos anteriores se encuentra una duplicación, el candidato alternativo es solución de dicha celda.

Obviamente, la clave está en encontrar la manera de minimizar el recuento, el marcado y el borrado. En palabras de uno de los padres del sudoku, Maki Kaji, hay dos principios importantes: la atención-deducción y el placer, "la mejor estrategia es no tener estrategia, pero hacerse con una en la práctica, mediante la deducción y de manera lúdica".

3.3. Variantes

Aunque los sudokus de 9×9 celdas con regiones 3×3 son los más comunes, abundan un sinfín de entretenidas variaciones, (véase [20] y [10]). Veamos una muestra, ordenada acorde a la siguiente clasificación:

1. **Variantes según el tamaño**. Podemos encontrarnos sudokus $n^2 \times n^2$ con cajas cuadradas $n \times n$ (con $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$) y sudokus $(r\ c)^2 \times (r\ c)^2$ con cajas rectangulares $r \times c$.

2. **Variantes que incorporan restricciones adicionales**. Por ejemplo: en *Sudoku Asterisk* hay una "caja" extra en forma de asterisco; en *Sudoku X* ambas diagonales deben contener todos los números; en *Sudoku NRC* hay cuatro cajas adicionales; *Sudoku Diskoint Groups* contiene 9 "cajas" disjuntas adicionales cada una con un color distinto; *Magic Sudoku* añade la condición de que en cada caja, las minifilas y minicolumnas de 3 celdas en cada región deben sumar la misma cantidad, 15; el *Sudoku DG* exige que para cada número no se repita su posición en cualesquiera dos cajas; el llamado *Hypercube* añade 3 restricciones adicionales, para la posición, las minifilas de las bandas y las minicolumnas de las bandas. *Sudoku Par (o Impar)* sombrea las celdas con números pares (o impares); el *Sudoku No Consecutivo (o Consecutivo)*, etc.

3. **Variantes que reemplazan cajas por otras formas**. La forma de las regiones puede ser regular (tanto cuadrada como rectangular) o irregular, este tipo de sudokus se conocen por la terminología japonesa *jigsaw* y existen de varios tamaños: 5×5 con cajas pentaminó, 7×7 con cajas heptaminó, 9×9 con cajas nonominó, etc.

4. **Variantes que reemplazan las entradas por condiciones iniciales alternativas**. Uno de los más extendidos es el *Sudoku Killer*, en el que aparecen jaulas de celdas cuyo extremo superior izquierdo se etiqueta con un número que indica la suma de todos los valores dentro de dicha jaula. El *Sudoku Ken Ken* se diferencia del anterior en que se puedene emplear cualquiera de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). El *Sudoku Kakuro*, que goza de gran popularizad en Japón, es una mezcla entre el sudoku tradicional y un crucigrama. *Greater than Sudoku* contiene símbolos de mayor o menor entre celdas adyacentes, que indica la relación entre los números a rellenar. *SuMURko* es una variedad que contiene un reducido número de entradas (no suficientes para completarlo) y varios índices que indican de forma ordenada cuántos unos, doses, etc tiene la solución en los alrededores en cruz de dicha celda, es una creación del profesor Alfredo Marín de la Universidad de Murcia, a la cual debe su nombre.

5. **Variantes no numéricas**, que reemplazan los números por letras, símbolos o imágenes. Cabe mencionar el *Codedoku*, que contiene un mensaje oculto en las celdas sombreadas.

6. **Variantes con superposición de regiones**. Son abundantes y artísticas, se denotan por su nombre japonés *Gattai* y el número de sudokus que superponen. Las más famosas tienen nombre propio como el conocido *Sudoku Samurai* que corresponde a la superposición de cinco sudokus, es por tanto,

un Gattai5, como *Flower, Kazaguruma* o *Wing* (que se asemeja asombrosamente al logotipo de la UPV/EHU).

7. **Variantes según la geometría de las celdas**. Aunque en el sudoku tradicional las casillas son cuadradas, podemos encontrarnos variantes como *Clock Sudoku*, de aspecto circular con números del 1 al 12 de forma que cada valor aparece en cada uno de los 6 anillos, en cada uno de los 6 pares de sectores opuestos y de los 6 pares de sectores de igual color. *Sudoku Spring* tiene forma de flor, se deben llenar las celdas triangulares con números del 1 al 9 con reglas adicionales. *Hanidoku* es el sudoku de las abejas, pues utiliza celdas hexagonales.

8. **Variantes de tri- y tetradimensionales**. El *Sudokube* es un Cubo de Rubik con números de 1 a 9. El *Sudoku 3D* está formado por 9 sudokus, se comienza resolviendo la cara superior, en cada uno de los sudokus de las demás caras ha sido eliminada una caja, que se corresponde a una de las cajas del sudoku de la cara superior. El *3Doku* es realmente tridimensional, ya que es un cubo $9 \times 9 \times 9$, en el que 27 sudokus se intersectan a lo largo de los 3 ejes cartesianos, al resolver cada sudoku tradicional hay que tener en cuenta que cada celda pertenece a otros dos sudokus situados en los dos planos ortogonales. Se conoce como *4D Sudoku* el juego formado por 27 cubos (numerados en cada cara) en disposición $3 \times 3 \times 3$ tal que cada una de las 6 caras exteriores contenga los números del 1 al 9 y a su vez, cada una de las doce caras interiores 3×3 también contenga los dígitos del 1 al 9.

9. **Variantes híbridas**, que combinan dos o más características de la clasificación. Hay *Sudokus Educativos*, en los que áreas sombreadas representan, por ejemplo, fechas históricas. *Sidoku* es una variante musical de cajas irregulares, es un jigsaw 7×7 no numérico, en el que los números son reemplazados por las notas musicales y además unas celdas coloreadas corresponden a los primeros compases de la obra musical indicada.

   El *Greater Than Sudoku* de la japonesa Miyuki Misawa [15] combina el Greater Than con el Killer Sudoku. Un híbrido entre el tradicional y el Kakuro es el *Circle Sum Sudoku*, inventado por el editor del blog *Puzzlinks* [18], no contiene entradas, para conseguir estos números (que ocuparán celdas circulares) debemos ayudarnos de las pistas al inicio de cada columna, fila y el recuadro 3×3 externo anexo al juego, que corresponden a la suma de los números circulares. En el *Sudoku Dominó* hay que distribuir 36 fichas de dominó, que contienen en total 8 veces cada dígito, y 9 fichas simples adicionales. El *Sudoku Clueless* está formado por 9 sudokus en disposición 3×3, la caja central de cada uno no contiene entradas y estas 9 cajas disjuntas conforman un décimo sudoku. En el *Curve Sudoku*, variante creada por

David Millar, la mente detrás de *The Griddle* [9], se rellena un tablero con forma de huso con números del 1 al 9, no se pueden repetir en las curvas ni en las áreas sombreadas, además añade fragmentos de Killer y Greater Than Sudoku.

4. Matemáticas tras el sudoku

En esta sección vamos a explicar, paso a paso, cómo se puede modelizar, mediante programación matemática, un sudoku tradicional y un sudoku de tamaño $n \times n$. Además realizaremos un breve paseo por las propiedades matemáticas que hay tras el sudoku.

4.1. Modelización del sudoku 9×9

Para llegar a modelizar cualquier sistema, partimos de dos preguntas: (1) ¿de qué información inicial dispongo? y (2) ¿qué información espero obtener?. Para el juego que nos ocupa las respuestas son inmediatas: conozco parcialmente los datos de una matriz 9×9 y con la resolución del problema espero obtener la información de las celdas vacías. Si pretendemos modelizar este pasatiempo mediante programación matemática, debemos ser capaces de pasar del estado de entrada (1) al estado de salida (2) representando el problema mediante unas *variables* (o incógnitas), que no son otras que los valores que toma cada una de las celdas vacías y estableciendo las *restricciones* entre ellas (es decir, las relaciones que deben satisfacer), que no son otras que las que expresadas en la llamada *regla única* (ver página 25).

En cuanto a las variables, podríamos definir una variable entera que tome valores entre 1 y 9, para cada una de las 81 posibles casillas. Pero una forma alternativa es utilizar 9 variables binarias para cada una de las celdas, es decir, definimos una variable que sólo puede tomar dos valores: 0 en caso de que el posible dígito sea descartado como solución y 1 en el caso de que sea aceptado. Será necesaria la siguiente notación:

i**:** subíndice correspondiente a fila, $i = 1, 2, \ldots, 9$

j**:** subíndice correspondiente a columna, $j = 1, 2, \ldots, 9$

k**:** superíndice para el correspondiente a posible valor, $k = 1, 2, \ldots, 9$

x_{ij}^k**:** variable binaria para cada celda (i, j) tal que

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{si la solución es k} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Es decir, si el sudoku está bien definido, el sistema devolverá para cada celda (i,j), el vector de variables solución $(x_{ij}^1,\ x_{ij}^2,\dots,x_{ij}^9)$ que es un vector nulo excepto por una única componente, cuya posición corresponde al valor que debe tomar la celda. Por tanto, necesitaremos 729 variables 0-1. Ahora bien, ¿qué deben cumplir dichas variables para satisfacer la regla única?

Esta regla, se concreta en cuatro restricciones que deben ser representadas como relaciones matemáticas entre las variables x_{ij}^k anteriormente definidas. Al haber escogido variables binarias, resulta muy sencillo expresarlas mediante relaciones lineales:

- Regla I: rellenar con cifras del 1 al 9 cada una de las 81 celdas. Por ejemplo, la casilla $(5,3)$ debe tomar un único valor entre 1 y 9, es decir, una variable x_{53}^k debe valer 1 y el resto deben ser nulas, lo cual se puede expresar mediante la siguiente restricción lineal: $x_{53}^1+x_{53}^2+x_{53}^3+x_{53}^4+x_{53}^5+x_{53}^6+x_{53}^7+x_{53}^8+x_{53}^9=1$, y en general para cualquier celda (i,j) tenemos:
$$\sum_{k=1}^{9} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i,j = 1,2,\dots,9. \tag{2.1}$$
- Regla II: no repetir ninguna cifra en una misma fila. Por ejemplo, para la fila 5 cualquier valor k debe aparecer una única vez, es decir, $x_{51}^k+x_{52}^k+x_{53}^k+x_{54}^k+x_{55}^k+x_{56}^k+x_{57}^k+x_{58}^k+x_{59}^k=1$. Y por tanto, para cualquier fila i y valor k, tenemos:
$$\sum_{j=1}^{9} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i,k = 1,2,\dots,9. \tag{2.2}$$
- Regla III: no repetir ninguna cifra en una misma columna. Por ejemplo, para la columna 3 cualquier valor k debe aparecer una única vez, $x_{13}^k+x_{23}^k+x_{33}^k+x_{43}^k+x_{53}^k+x_{63}^k+x_{73}^k+x_{83}^k+x_{93}^k=1$. La expresión para cualquier columna j y cifra k sería:
$$\sum_{i=1}^{9} x_{ij}^k = 1, \quad \forall j,k = 1,2,\dots,9. \tag{2.3}$$
- Regla IV: no repetir ninguna cifra en una misma caja. Cada región puede ser representada por la casilla superior izquierda. Por ejemplo, la caja que contiene la celda $(5,3)$ podemos representarla por la notación caja $(i_0,j_0)=(4,1)$ y para este caso particular: $x_{41}^k+x_{51}^k+x_{61}^k+x_{42}^k+x_{52}^k+x_{62}^k+x_{43}^k+x_{53}^k+x_{63}^k=1$. Por tanto, para cualquier posible caja (i_0,j_0) y cifra k:
$$\sum_{i=i_0}^{i_0+2}\sum_{j=j_0}^{j_0+2} x_{ij}^k = 1, \quad \forall i_0,j_0 = 1,4,7; k = 1,2,\dots,9. \tag{2.4}$$

Dicho esto, observamos que hemos definido un problema entero 0-1, todas las restricciones son función lineal de las variables y todas las variables son binarias. Por ello, debemos añadir explícitamente al sistema de ecuaciones (2.1)-(2.4) el carácter binario de todas las variables:

$$x_{ij}^k \in \{0,1\}, \quad \forall i,j,k = 1,2,\ldots,9. \tag{2.5}$$

Para completar la modelización, debemos escribir el algoritmo que aporta la información inicial al modelo. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz de entradas, consideraremos $a_{ij} = 0$ si la casilla está vacía, y tomará su valor solución entre 1 y 9, en caso contrario. Por tanto,

$$\textit{si } a_{ij} = k \neq 0, \ \textit{entonces} \quad x_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \textit{si } a_{ij} = k \\ 0, & \textit{si } a_{ij} \neq k \end{cases} \tag{2.6}$$

Con este paso aseguramos que el sistema recoja la información de las entradas iniciales, y el sistema (2.1)-(2.5) junto con las condiciones iniciales (2.6) es suficiente para modelizar el problema.

Sin embargo, sería interesante añadir la información adicional que se deduce instantáneamente en la resolución humana. Cuando conocemos un valor inicial, por ejemplo, si el valor de la celda $(5,3)$ es 8, deducimos que a lo largo de la fila 5, así como de la columna 3 y de su caja correspondiente, no puede haber ningún otro 8. En general, si en la celda (i,j) viene dada la entrada $a_{ij} = k \neq 0$, entonces se deduce:

$$x_{ij_0}^k = 0, \ \forall j_0, \ j_0 \neq j, \tag{2.7}$$

$$x_{i_0 j}^k = 0, \ \forall i_0, \ i_0 \neq i, \tag{2.8}$$

$$x_{i_0 j_0}^k = 0, \ \forall (i_0, j_0) \text{ en la caja de } (i,j), \ i_0 \neq i \text{ o bien } j_0 \neq j. \tag{2.9}$$

Analizaremos más adelante si el introducir dicha información (2.7)-(2.9) en el sistema (2.1)-(2.6), que llamaremos en adelante *programa modificado*, tiene un efecto significativo en los tiempos de resolución.

4.2. Modelización del sudoku $n \times n$

Vamos a generalizar la modelización del sudoku tradicional a uno de tamaño genérico $n \times n$. Para ello, definimos la *clase de puzles sudoku* como una matriz de filas y columnas parcialmente completa, compuesta por n^2 celdas distribuidas en n bloques, cada uno de n celdas, a rellenar utilizando un conjunto de n símbolos diferentes, de forma que cada fila, columna y bloque contenga exactamente uno de los elementos de dicho conjunto. Si las cajas son regulares, pueden ser cuadradas o rectangulares de dimensión $r \times c$, donde r es el número de filas y c el número de columnas de cada región.

Definamos adicionalmente, los siguientes conjuntos:

$\mathcal{N}$: conjunto de símbolos $\{1, 2, \ldots n\}$ en el que varían los índices i (número de fila), j (número de columna) y k (solución).

$\mathcal{N}_r$: conjunto de c símbolos para el primer índice i_0, representativo de cada caja (i_0, j_0). Corresponde al conjunto formado por la menor fila de cada banda. En general, $\mathcal{N}_r = \{1,\ 1+r,\ 1+2r, \ldots, 1+(c-1)r\}$.

$\mathcal{N}_c$: conjunto de r símbolos para el segundo índice j_0, representativo de cada caja (i_0, j_0). Corresponde al conjunto formado por la menor columna de cada pilar. En general, $\mathcal{N}_c = \{1,\ 1+c,\ 1+2c, \ldots, 1+(r-1)c\}$.

$\mathcal{N}_r^i$: conjunto de filas de la caja que contiene la fila i. Corresponde a las filas de la banda que contiene la i-ésima fila.

$$\mathcal{N}_r^i = \left\{ \left\lfloor \frac{i-1}{r} \right\rfloor r+1, \left\lfloor \frac{i-1}{r} \right\rfloor r+2, \ldots, \left\lfloor \frac{i-1}{r} \right\rfloor r+r \right\},$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función suelo.

$\mathcal{N}_c^j$: conjunto de columnas de la caja que contiene la columna j. Corresponde a las columnas del pilar que contiene la j-ésima columna.

$$\mathcal{N}_c^j = \left\{ \left\lfloor \frac{j-1}{c} \right\rfloor c+1,\ \left\lfloor \frac{j-1}{c} \right\rfloor c+2, \ldots, \left\lfloor \frac{j-1}{c} \right\rfloor c+c \right\}.$$

Ahora, la generalización del problema entero 0-1 viene dada por:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} x_{ij}^k = 1, & \forall i,j \in \mathcal{N} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}^k = 1, & \forall i,k \in \mathcal{N} \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij}^k = 1, & \forall j,k \in \mathcal{N} \\ \sum_{i=i_0}^{i_0+r-1} \sum_{j=j_0}^{j_0+c-1} x_{ij}^k = 1, & \forall (i_0,j_0) \in \mathcal{N}_r \times \mathcal{N}_c, k \in \mathcal{N} \\ x_{ij}^k \in \{0,1\}, & \forall i,j,k \in \mathcal{N} \end{cases} \tag{2.10}$$

Para un sudoku 12×12 con cajas 3×4, $(n, r, c) = (12, 3, 4)$ se definen los conjuntos $\mathcal{N} = \{1, 2, \ldots, 12\}$, $\mathcal{N}_r = \{1, 4, 7, 10\}$, $\mathcal{N}_c = \{1, 5, 9\}$. Y por ejemplo, para la fila $i = 2$, las filas de su banda pertenecen a $\mathcal{N}_r^2 = \{1, 2, 3\}$ y para la columna $j = 5$, las columnas de su pilar están en $\mathcal{N}_c^5 = \{5, 6, 7, 8\}$.

En la Figura 1 presentamos el pseudocódigo del algoritmo para resolver un sudoku $n \times n$, que describe la secuencia de instrucciones para implementar el *programa modificado*, es decir, el algoritmo inicial sobre las entradas (2.6)-(2.9) junto al problema entero 0-1 (2.10). El *programa simple*, (2.6),(2.10), prescinde de las líneas 11 a 22. Evidentemente, la mayor complejidad computacional radica en la resolución del problema entero, líneas 26 a 29.

```
Pseudocódigo para la resolución de sudokus $n \times n$
// Comentario: Leer datos de entrada y asignación según (2.6)-(2.9)
Lectura de la matriz de entradas $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times n},\ a_{ij} \in \mathcal{N} \cup \{0\},\ i,j, \in \mathcal{N}$
para cada $i \in \mathcal{N}$ hacer
  para cada $j \in \mathcal{N}$ hacer
    si $a_{ij} \neq 0$, entonces
    // Comentario: hay una entrada inicial en la celda $(i,j)$
      para cada $k \in \mathcal{N}$ hacer
        si $a_{ij} = k$, entonces
        // Comentario: solución $k$ para la celda $(i,j)$
          $x_{ij}^k \leftarrow 1$;
          para cada $i_0 \in \mathcal{N}$ hacer
            si $i_0 \neq i$, entonces
            // Comentario: en la columna $j$, ninguna otra fila vale $k$
              $x_{i_0 j}^k \leftarrow 0$;
          para cada $j_0 \in \mathcal{N}$ hacer
            si $j_0 \neq j$, entonces
            // Comentario: en la fila $i$, ninguna otra columna vale $k$
              $x_{ij_0}^k \leftarrow 0$;
          para cada $(i_0, j_0) \in \mathcal{N}_r^i \times \mathcal{N}_c^j$ hacer
            si $i_0 \neq i$ ó $j_0 \neq j$, entonces
            // Comentario: en la caja $(i,j)$, ninguna otra celda vale $k$
              $x_{i_0 j_0}^k \leftarrow 0$;
        sino
        // Comentario: la celda $(i,j)$ no toma ningún otro valor
          $x_{ij}^k \leftarrow 0$;
// Comentario: Resolución PE, mediante simplex y branch and bound
Almacenar los coeficientes y términos independientes de (2.10)
Resolver el problema entero 0-1
Obtener las soluciones $x_{ij}^k,\ i,j,k, \in \mathcal{N}$
// Comentario: Escribir datos de salida
para cada $i \in \mathcal{N}$ hacer
  para cada $j \in \mathcal{N}$ hacer
    para cada $k \in \mathcal{N}$ hacer
      si $x_{ij}^k \neq 0$, entonces
        escribir la solución $k$ para la celda $(i,j)$
```

Figura 1: Pseudocódigo del programa modificado

Tanto el programa simple como el programa modificado, han sido implementados para diferentes valores n. La experiencia computacional se ha realizado en lenguaje de programación C++, utilizando las funciones de optimización *COmputational INfrastructure for Operations Research* (*COIN-OR*, [5]) en una workstation Sun FIRE v245 con 2 CPU de 1.5 Ghz y 4 GB de RAM, bajo Solaris 10.

En la Tabla 1 aparecen los resultados principales de la implementación. n denota el número de símbolos ($n = 9$ corresponde al sudoku tradicional); $celdas$, el número total de celdas; var, el número total de variables 0-1; $rest$, el número de restricciones del problema entero; $nele$, el número de elementos no nulos de la matriz de restricciones; $dens$, la densidad en tanto por ciento de dicha matriz ($dens = 100\ \frac{nele}{var \cdot filas}$); T y T^m, los tiempos de ejecución (en segundos) con el programa simple y con el modificado.

Cabe resaltar en primer lugar, la eficiencia de la programación matemática en la resolución del sudoku tradicional (centésimas de segundo). Además respecto a la comparativa del programa simple con el modificado, la inclusión del algoritmo inicial (2.7)-(2.9) influye sensiblemente en la velocidad de la ejecución de los problemas de mayor tamaño. Finalmente, es reseñable la velocidad en obtener la solución de un sudoku de tamaño 25×25, que consta de 15.625 variables 0-1. No cabe duda de que es una herramienta poderosa para la resolución de modelos de gran cantidad de variables y restricciones, como los que se necesitan en problemas de la vida real.

Tabla 1: Dimensiones y tiempos de ejecución

n	$celdas$	var	$rest$	$nele$	$dens$	T	T^m
4	16	64	64	256	6,25	0,03	0,03
6	36	216	144	864	2,78	0,04	0,04
8	64	512	256	2048	1,56	0,08	0,05
9	81	729	324	2916	1,23	0,36	0,08
12	144	1728	576	6912	0,69	1,51	0,28
16	256	4096	1024	16384	0,39	21,79	1,59
25	625	15625	2500	62500	0,16	1110,09	37,61
$Total$	n^2	n^3	$4n^2$	$4n^3$	$100/n^2$	$p.simp.$	$p.mod.$

4.3. Algunas propiedades matemáticas

Para finalizar, quisiera incidir someramente en algunas de las matemáticas que se esconden tras este juego. Esta es un área relativamente nueva de exploración, reflejo de la popularidad creciente que va alcanzando el sudoku (véase [23], [14], [6] y [17]). El análisis matemático del mismo se desarrolla principalmente en dos áreas:

- El análisis de las propiedades de matrices completas, es decir, de sudokus resueltos totalmente. Su objetivo fundamental es el conteo o enumeración de las posibles soluciones para los sudokus $n \times n$ y sus múltiples variantes.
- El análisis de las propiedades de los puzles. Se centra en los valores de entrada: sus valores máximo y mínimo y su geometría.

Las técnicas empleadas son básicamente las mismas: Combinatoria y Teoría de Grupos, así como la aplicación de herramientas de Programación. Dado que previamente se ha considerado este último punto, nos resta comentar que a finales de 2002 se documentó por Takayuki Yato y Takahiro Seta (Universidad de Tokyo) en [27] la NP-completitud, aunque como hemos visto, algoritmos de programación lineal permiten su resolución en centésimas de segundo.

4.3.1. Enumeración

Los primeros resultados conocidos de enumeración del sudoku clásico aparecieron en setiembre de 2003, enviados por Edward Russell a *USENET newsgroup rec.puzzles*. Junto a Bertram Felgenhauer (Department of Computer Science, TU Dresden, Alemania) y Frazer Jarvis (Department of Pure Mathematics, University of Sheffield, Reino Unido) fueron los primeros en obtener el número de soluciones válidas para un sudoku estándar cuyo resultado es:

$$6.670.903.752.021.072.936.960$$

Este número es igual a $9! \cdot 72^2 \cdot 2^7 \cdot 27.704.267.971$, cuyo último factor es primo; para el cálculo detallado veáse [7] y [13]. El resultado fue calculado gracias a la lógica y a la fuerza bruta computacional.

Las siguientes operaciones definen una relación de simetría entre matrices equivalentes: reetiquetaje de los símbolos (9!), permutación de las bandas (3!), permutación de las filas dentro de una banda ($3!^3$), permutación de los pilares (3!), permutación de las columnas dentro de un pilar ($3!^3$), reflexión, transposición y rotación (2). Si excluimos el reetiquetaje, con respecto a las 81 celdas de la matriz, las operaciones forman un subgrupo del *grupo de simetría* S_{81} de orden $3!^8 \cdot 2$=3.359.232. Así, el número total de simetrías es

$$1.218.998.108.160.$$

Para una solución dada, el conjunto de soluciones equivalentes se puede alcanzar utilizando dichas operaciones (excepto reetiquetado), formando así una *órbita* del grupo de simetría. El número de soluciones esencialmente diferentes es, por tanto, el número de órbitas, que puede ser calculado gracias al *Lema de Burnside o Lema de Cauchy-Frobenius*. Los puntos fijos Burnside son las soluciones que difieren únicamente por reetiquetado. Usando esta técnica, Edward Russell y Frazer Jarvis [19] hallaron el número de soluciones esencialmente diferentes (simétricamente distintas):

$$5.472.730.538.$$

Si completáramos un sudoku por día, tardaríamos 14.993.782 años en resolver todos los posibles. Si resolviéramos uno por minuto, nos llevaría 10.412 años y a velocidad de uno por segundo, 174 años. Además, si se tiene en cuenta que dada la matriz solución los puzles que se pueden crear son múltiples, de hecho, nadie ha determinado cuántos puzles podrían formarse (ni siquiera minimales), parece que las editoriales pueden, al menos teóricamente, asegurarnos este pasatiempo por muchas generaciones.

Se puede consultar en la Tabla 2, el número de soluciones posibles de otras variantes, verificadas por sus autores. Sin embargo, todavía existe un amplio campo de conjeturas por demostrar y de resultados por obtener, como el número de soluciones válidas para un sudoku 16×16.

Tabla 2: Enumeración de soluciones para variantes de sudoku

Variante	Soluciones	Autor
Magic Sudoku	5971968	Guenter Stertenbrink
Hypercube	37739520	Guenter Stertenbrink
Sudoku NRC	6337174388428800	Andries E. Brouwer
Sudoku X	55613393399531520	Edward Russell
Sudoku DG	201105135151764480	Edward Russell

4.3.2. Entradas

En cuanto al número de entradas, ¿cuál es el mínimo número necesario para resolver un sudoku de solución única? Por el momento, es un problema sin respuesta, aunque el menor valor encontrado hasta ahora para un sudoku tradicional sin simetría es 17 (no se han encontrado ejemplos de 16 entradas), este número ha sido obtenido por japoneses entusiastas de los puzles como Ken'ichiro Takahashi. Gordon Royle (School of Mathematics and Statistics, University of Western Australia) ha recopilado una colección de 48826 sudokus de estas características. El menor número para sudokus con celdas rotacionalmente simétricas es 18. Sin embargo, no debemos pensar que la dificultad está basada en la cantidad de entradas, sino más bien en la relevancia y posición de estos números iniciales.

En la Tabla 3 se muestra el mínimo número de entradas para diversas variantes con restricciones adicionales, así como el autor respectivo al que se le atribuye el resultado (véase [14]). Excepto en el caso del hypercube que está demostrado, los demás valores mínimos son, hasta hoy, meras conjeturas. El Sudoku Killer ni siquiera ha sido conjeturado, tampoco hay resultados para la variante 3Doku.

Como vemos, existe un amplio campo de conjeturas por demostrar y resultados por obtener, así como divertidas variantes para resolver, que os animo a recorrer.

Tabla 3: Enumeración y entradas para variantes de sudoku

Variante	Entradas	Autor
Magic Sudoku	7*	Guenter Stertenbrink
Hypercube	8	Guenter Stertenbrink
Sudoku GT-MM	8*	Miyuki Misawa
Sudoku NRC	11*	Andries E. Brouwer
Sudoku DG	11*	Glenn Fowler
Sudoku X	12*	Ruud van der Werf

$*$: Conjetura

Bibliografía

[1] R. L. Ackoff, *El arte de resolver problemas: las fábulas de Ackoff*, Noriega, Limusa Wiley, 2007.
[2] *Acm icpc*, http://cm.baylor.edu/welcome.icpc
[3] D. Berthier, *The Hidden Logic of Sudoku*, Lightning Source Inc, 2007.
[4] E. A. C. W. Churchman, R. L. Ackoff, *Introduction to Operations Research*, Wiley, 1957.
[5] *Coin-or*, http://www.coin-or.org/
[6] J. Delahaye, *The science behind sudoku*, tech. rep., Scientific American, 2006.
[7] B. Felgenhauer and F. Jarvis, *Enumerating possible sudoku grids*, Tech. Rep. 1-7, 2005.
[8] A. F. García, *Los mejores Sudokus*, País Aguilar, 2005.
[9] *The griddle*, http://www.thegriddle.net/
[10] V. H. Hjemmesid, *Sudoku*, http://www.menneske.no/
[11] *IFORS*, http://www.ifors.org/
[12] *INFORMS, "Science of better."*, http://www.scienceofbetter.org/
[13] F. Jarvis, *Sudoku enumeration problems*, http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/
[14] *The math behind sudoku*, http://www.math.cornell.edu/m̃ec/Summer2009/Mahmood/References.html/
[15] M. Misawa, http://www7a.biglobe.ne.jp/s̃umnumberplace/27268961/
[16] J. Nash, *The (dantzig) simplex method for linear programming*, Computing in Science & Engineering, 29-31, 2000.
[17] J. S. Provan, *Sudoku: Strategy versus structure*, tech. rep., University of North Carolina, 2009.
[18] *Puzzlinks*, http://puzzlinks.com/

[19] E. Russell, F. Jarvis, *There are 5472730538 essentially different sudoku grids... and the sudoku symmetry group*,
http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html/
[20] *Sudoku variations*, http://www.sudopedia.org/wiki/Sudoku_Variations
[21] *Sudokumania*, http://www.sudokumania.com.ar/
[22] C. Vorderman, *Carol Vorderman's How To Do Sudoku*, Ebury Press (UK), 2005.
[23] *Wikipedia, "Mathematics of sudoku"*,
http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku/
[24] *Wikipedia,* "*OR.*", http://en.wikipedia.org/wiki/Operations_research/
[25] *Wikipedia, "Sudoku."*, http://en.wikipedia.org/wiki/Sudoku/
[26] *World sudoku federation*,http://worldsudokufederation.org/
[27] T. Yato and T. Seta, *Complexity and completeness of finding another solution and its application to puzzles*, IEICE TRANSACTIONS on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences, 1052-1060, 2003.

María Merino Maestre
Universidad del País Vasco
Facultad de Ciencia y Tecnología
Departamento de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa
Barrio Sarriena s/n. 48940 Leioa, Bizkaia
e-mail: ***maria.merino@ehu.es***
http://www.ehu.es/mae/html/prof/Maria.html