Tensegridades: arte en equilibrio[1]

por

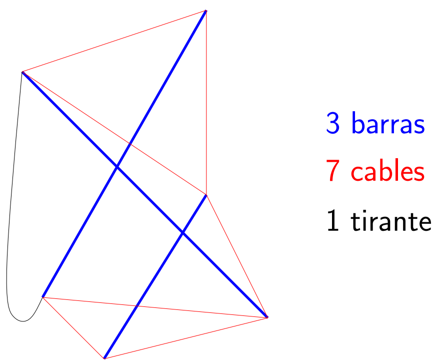
David Orden, Universidad de Alcalá

El presente trabajo trata de proporcionar un punto de partida para aproximar al lector al estudio de las tensegridades, objetos tan controvertidos como fascinantes, con tantas aplicaciones como enfoques distintos.

1. Orígenes

Como sucede a menudo, el origen y la autoría de la noción de tensegridad han sido motivo de disputa entre quienes, de una u otra forma, interpretaron y modelaron a su manera una misma idea. A continuación se presenta de forma somera a quienes, de una u otra forma, tuvieron un papel protagonista en el desarrollo de las tensegridades. El lector interesado en más detalles puede consultar el libro de V. Gómez Jáuregui, disponible en su página web [10].

1.1. Karl Ioganson

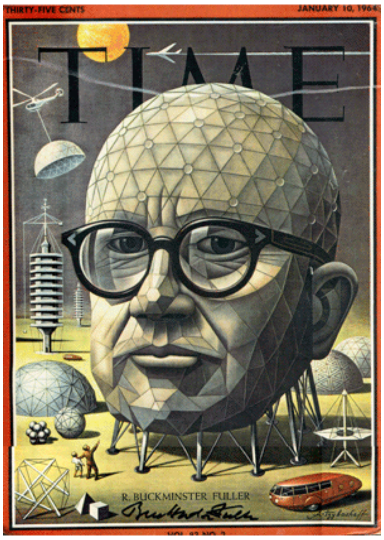


Artista letón perteneciente al movimiento de los constructivistas [2], presentó en una exposición celebrada en Moscú en 1921, una pieza denominada *Gleichgewichtkonstruktion*, o *estructura en equilibrio*, con la configuración de la figura. Ésta constaba de 3 barras, 7 cables y un octavo tirante que permitía cambiar la configuración conservando su equilibrio. Desafortunadamente, la obra de Ioganson fue destruida a mediados de esa misma déca-

[1]Basado en la conferencia del ciclo *Un paseo por la geometría*

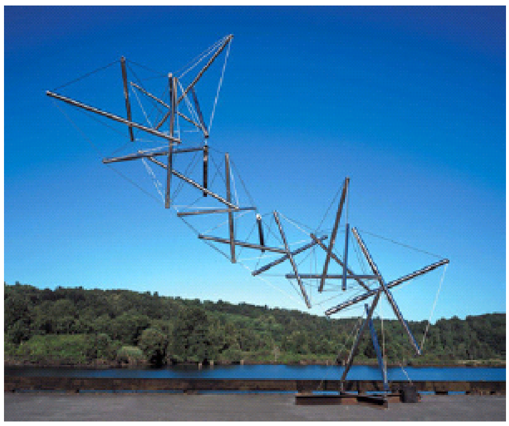
da por el régimen soviético, y sólo se conservaron algunas fotografías, de no muy buena calidad, de aquella exposición. Basándose en ellas, un trabajo [6] publicado en 1998 reconstruyó la estructura y la proclamó como la primera tensegridad. Si bien tal afirmación ha generado no poca controversia [4], sí parece haber coincidencia en señalar esta estructura como inspiradora de los trabajos que posteriormente desarrollaron otros.

1.2. Buckminster Fuller



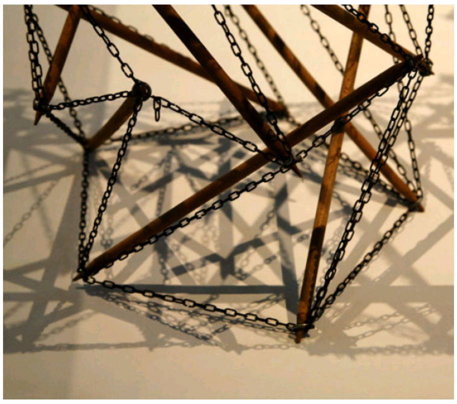
Este ingeniero estadounidense [1], que con el tiempo sería capaz de cautivar a la sociedad estadounidense hasta el punto de ser portada de la prestigiosa revista *Time*, era aún poco conocido cuando en el verano de 1948 sustituyó a un colega durante dos semanas en un curso del Black Mountain College. Interesado en modelos geométricos, estaba ya fascinado por la geometría de diversas estructuras, como las cúpulas geodésicas, y transmitió esta fascinación entre otros a Kenneth Snelson, uno de los alumnos de aquellas clases. En 1959 solicitó la patente de una estructura a la que llamó *integridad tensional*, acuñando por contracción de estas palabras el término *tensegridad*. Definía este tipo de estructuras como *islas de compresión en un océano de tensión* y fue aún más allá al afirmar, envuelto en el misticismo del que gustaba impregnar sus trabajos, que *el universo cohesiona de manera tensional eventos no simultáneos, el universo es integridad tensional*.

1.3. Kenneth Snelson



Estudiante de segundo curso de arte en la Universidad de Oregón, en el verano de 1948 decidió asistir al curso antes mencionado en el Black Mountain College de Carolina del Norte, atraído por el pintor Josef Albers. Fue éste quien, dada su habilidad escultórica, le pidió que ayudara al recién llegado Fuller a montar los modelos geométricos que llevaba para utilizar en sus clases. Tan fascinado por su carisma como por sus enseñanzas, pasó el siguiente curso construyendo y estudiando estructuras, que tuvo ocasión de mostrar a Fuller un verano más tarde. Más ducho en publicitar sus trabajos, fue éste quien difundió la noción de tensegridad, mostrándose más bien ambiguo acerca del papel de Snelson en el descubrimiento [5]. Tras solicitar una primera patente en 1963, éste se centró en la creación de esculturas, aplicando y desarrollando los principios de las tensegridades [3]. Segun él, éstas se caracterizan por su *tensión continua y compresión discontinua*.

1.4. David Georges Emmerich

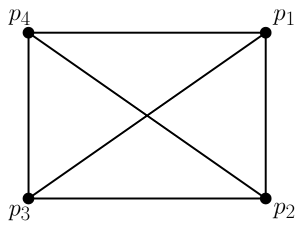


Este arquitecto, de origen húngaro pero afincado en Francia, se inspiró en la estructura de Ioganson para desarrollar sus trabajos. De manera independiente, al otro lado del Atlántico, estudió lo que llamaba *estructuras tensadas y auto-pretensadas*, así como agrupaciones de las mismas que daban lugar a *redes auto-pretensadas*, solicitando una patente en 1963. Colaboró activamente con René Motro [9], profesor de Ingeniería civil en la Universidad de Montpellier II, para quien una tensegridad es *un sistema en un estado de auto-equilibrio estable, que comprende un conjunto discontinuo de elementos en compresión dentro de un continuo de componentes en tensión*.

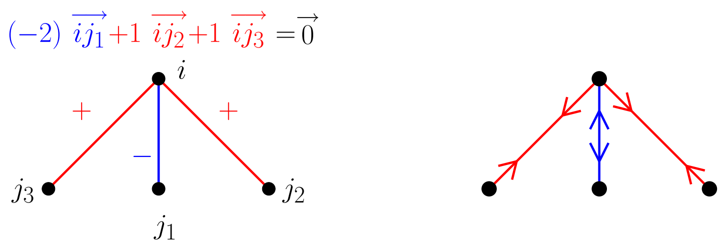
2. Definición

A estas alturas, y a pesar de las definiciones dadas, es más que probable que el lector siga preguntándose qué es exactamente una tensegridad. La respuesta parece depender del campo desde el que uno se aproxime; arquitectura, escultura, ingeniería o, como en el presente trabajo, matemáticas. La sustancial diferencia puede comprobarse con las definiciones mencionadas anteriormente; todas ellas comparten una cierta ambigüedad, hasta el punto de que Motro [9] afirma que *generally, so far as a concept is concerned, one can not define it completely*. Para las matemáticas, por el contrario, las definiciones deben ser inequívocas si se pretende que sirvan para algo. Por esta razón trataremos ahora de ser un poco más formales para intentar aclarar, de una vez por todas, a qué objetos nos estamos refiriendo.

Un *grafo abstracto* es un par de conjuntos $G = (V, E)$ para el que los elementos de V se denominan *vértices* y los elementos de E, denominados *aristas*, son pares de elementos de V. Por ejemplo, se conoce como K_4 al grafo dado por el par de conjuntos $(\{1, 2, 3, 4\}, \{12, 13, 14, 23, 24, 34\})$.

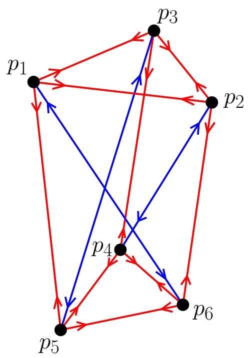


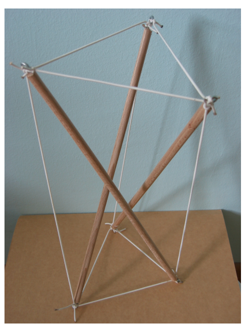
Un *armazón* es una inmersión $G(P)$ de un grafo G, sobre un conjunto de puntos $P \subset \mathbb{R}^d$ y con segmentos rectos como aristas. En este caso nos interesará principalmente $d = 2, 3$. La figura muestra un armazón que es una inmersión en $\mathbb{R}^2$ del grafo K_4.

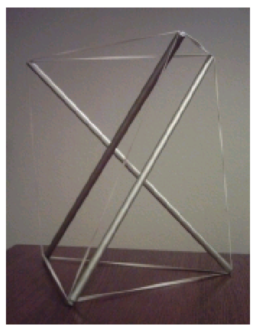


Una *auto-tensión* en un armazón es una asignación de tensiones w_{ij} a las aristas ij, de forma que cada vértice está en *equilibrio*, es decir, la resultante de las tensiones incidentes a él es nula. Llamaremos *tensegridad* a un armazón dotado de una auto-tensión.

Obsérvese que este concepto admite varios tipos de modelos físicos. En primer lugar, podemos eliminar las aristas con tension nula y, como se muestra en la figura, reemplazar el resto por un muelle, de tipo intensor para aquellas aristas con tensión positiva, y de tipo extensor para las de tensión negativa. Alternativamente, se pueden sustituir los muelles intensores por gomas elásticas y los muelles extensores por barras (que, por el principio de acción y reacción, aplican una tensión en sus extremos). Por último, conocidas las longitudes de las gomas elásticas en la posición de equilibrio, es posible sustituir éstas por cables para obtener una estructura como las que suelen asociarse a la noción de tensegridad.





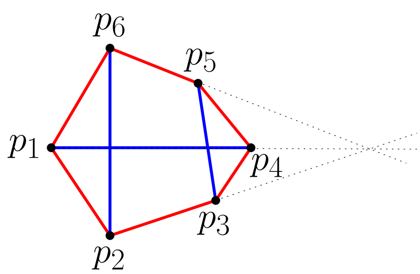


3. Un problema a estudiar

Una vez fijada la definición de tensegridad, su estudio ofrece innumerables posibilidades, que pueden ser exploradas en las referencias que se proporcionan. De entre todas ellas, nuestro carácter de matemáticos no puede dejar pasar la oportunidad de proponer al lector el siguiente problema:

Dados un grafo abstracto G y una dimensión d,
¿puede existir una tensegridad con esa estructura en $\mathbb{R}^d$?
y si es así,
¿qué se puede decir sobre la posición relativa de sus vértices?

Sea, por ejemplo, el grafo $G = (\{1, \ldots, 6\}, \{12, 14, 16, 23, 26, 34, 35, 45, 56\})$.



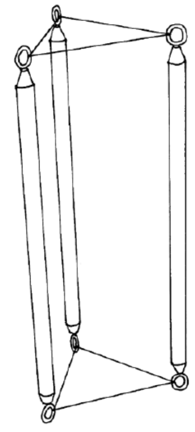
En primer lugar, nos preguntamos si puede existir una tensegridad con esa estructura o no en $\mathbb{R}^2$. La respuesta es afirmativa, por lo que podemos preguntarnos si, en esa posición de equilibrio, los vértices deben estar dispuestos con alguna característica. La respuesta es de nuevo afirmativa, puesto que en la posición de equilibrio las rectas definidas por $\overline{p_1p_4}$, $\overline{p_2p_3}$ y $\overline{p_5p_6}$ deben ser concurrentes.

La demostración de esta afirmación está fuera del objetivo del presente trabajo, por lo que se invita al lector a experimentar con el applet que se ofrece en la página web `http://www2.uah.es/ordend/DIVULGACION/TENSEGRIDADES/Tensegrities2d.html` para convencerse de la veracidad de lo afirmado. Los matemáticos pertinaces pueden encontrar una demostración en [7]. Además del anterior, en esta página se ofrecen también applets con los grafos de 8 vértices que son 3-regulares, para los que se invita al lector a tratar de adivinar las propiedades de su posición de equilibrio.

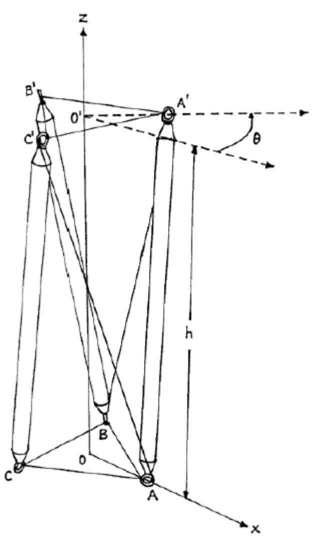
Para no limitarnos al caso del plano, consideremos la pregunta de si puede existir en $\mathbb{R}^3$ una tensegridad con el grafo mostrado al final de la Sección 2, es decir,

$$G = (\{1, \ldots, 6\}, \{12, 13, 15, 16, 23, 24, 26, 34, 35, 45, 46, 56\}).$$

En este caso jugamos con ventaja, puesto que ya hemos visto que efectivamente tal tensegridad existe, pero ¿qué propiedades deben cumplir los vértices en la posición de equilibrio? La respuesta es que éstos están en un hiperboloide reglado [8] que contiene las aristas de uno de los tres ciclos 1245, 1346, o 2356 del grafo.



La demostración de este hecho puede encontrarse también en [7]; aquí nos limitaremos a mostrar, omitiendo algunos detalles, el proceso de construcción de 3 tensegridad con cables y barras para este grafo (obsérvese que la construcción con barras y gomas elásticas resulta más sencilla). Consideremos en primer lugar un prisma sobre un triángulo equilátero, con las barras (de la misma longitud) como verticales, los extremos inferiores a la misma altura. Como el lector ya habrá podido observar, la tensegridad que queremos construir (mostrada al final de la Sección 2) se obtiene con una rotación del triángulo superior en este prisma triangular.



Esta rotación convierte las 3 caras verticales cuadradas del prisma en 6 caras triangulares. Asimismo, los 4 ángulos rectos de cada una de estas caras se convierten en 2 ángulos agudos y 2 ángulos obtusos. Al rotar el triángulo superior, los vértices con ángulos obtusos de cada cara se acercan entre sí al principio, para alejarse posteriormente. Es en la posición de distancia mínima en la que debemos unirlos entre sí con un cable (sobre una diagonal de la cara correspondiente).

¿Cuál es el ángulo del giro para el que esto sucede? Para determinarlo es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas, tomando como eje z el eje del prisma y como origen O el centro del triángulo inferior. De este modo, el radio r y el lado s de los triángulos son datos, mientras que el ángulo de rotación θ es una variable. El estudio del problema lleva a que la solución se obtiene cuando se minimiza, respecto de θ, la expresión

$$s^2 + 2r^2\cos(\theta) - 2r^2 cos(\frac{2\pi}{3} - \theta),$$

cuya solución se da para $\sin(\theta) = \sin(\theta - \frac{2\pi}{3})$. La trigonometría elemental nos dice que cuando el seno de dos ángulos coincide, o bien la diferencia de éstos es múltiplo par de π, o bien la suma de éstos es múltiplo impar de π. Nuestro caso no puede ser el primero, luego debe ser el segundo; de $\theta + \theta - \frac{2\pi}{3} = \pi$ se obtiene $\theta = \frac{5\pi}{6}$, mientras que de $\theta + \theta - \frac{2\pi}{3} = -\pi$ no se obtiene un mínimo, sino un máximo. Por tanto, $\theta = \frac{5\pi}{6}$ es el ángulo que debe rotarse el triángulo superior.

4. Aplicaciones

Una introducción a las tensegridades no puede dejar de mostrar algunas de sus utilidades prácticas, por lo que a continuación se muestran diferentes aplicaciones de las mismas, junto con los enlaces en los que obtener más información al respecto. Algunas de ellas se basan en la propiedad de equilibrio que las define, mientras que otras explotan la capacidad de desplegarse y alcanzar esa propiedad de equilibrio. Un buen número de ellas son fáciles de encontrar a nuestro alrededor, otras suponen interesantes vías de estudio para ramas como la biología o la robótica.

http://www.kennethsnelson.net

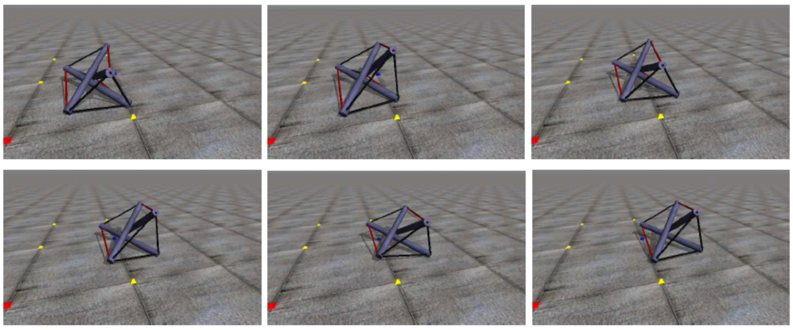
http://www.columbia.edu/cu/gsapp/BT/DOMES/GEORGIA/g-anal.html

http://www.news.cornell.edu/chronicle/97/2.20.97/AAAS_Connelly.html

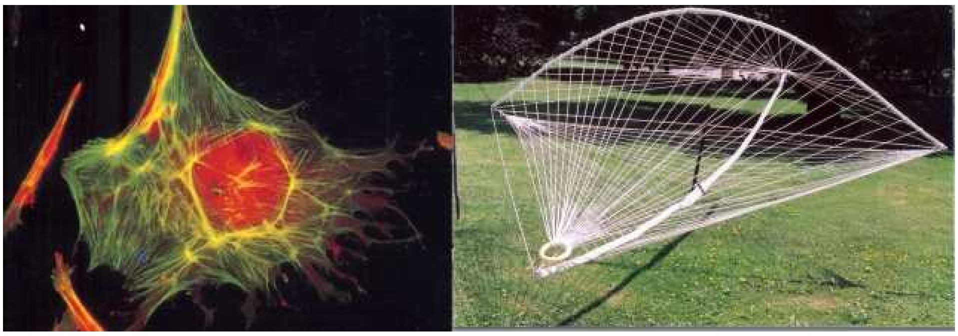
http://www.designjournalmag.com/product/tensegrity_coffee_table.htm

http://www.oregonphotos.com/Backpacking-Revolution1.html

`http://seconds.quechua.com/ES/main.html`



`http://ccsl.mae.cornell.edu/tensegrity`



`http://www.childrenshospital.org/research/Site2029/mainpageS2029P23sublevel24.html`

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento a Marta Macho y Raúl Ibañez por invitarme al Paseo, por sus atenciones, y por la labor de divulgación que realizan.

Asimismo, mi recuerdo más respetuoso a Miguel de Guzmán, que fue quien me introdujo en el estudio de las tensegridades.

Bibliografía

Lista de referencias web sobre tensegridades

El lector interesado puede encontrar una gran cantidad de información sobre tensegridades en la web, la mayor parte de ella asociada a su expresión en inglés, *tensegrity*, aunque cada vez va apareciendo más información en castellano. Además de las referencias ya proporcionadas, cabe destacar entre otras las siguientes páginas (así como los enlaces contenidos en ellas), consultadas en junio de 2009:

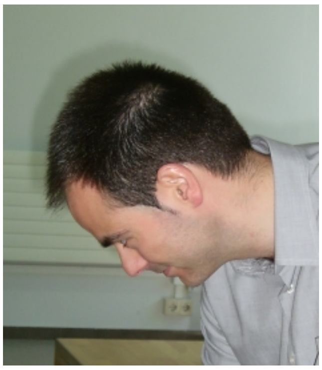
- `http://en.wikipedia.org/wiki/Tensegrity`
- `http://www.tensegrity.com`
- `http://tensegrity-structures.blogspot.com`
- `http://www.tensegrity.org`
- `http://www.math.cornell.edu/~tens`
- `http://www.trip.net/~bobwb/ts/`
- `http://www.tensegridad.es`

Referencias

[1] B. Fuller: `http://es.wikipedia.org/wiki/Buckminster_Fuller`, consultado en junio de 2009.
[2] Constructivismo: `http://es.wikipedia.org/wiki/Constructivismo_(arte)`, consultado en junio de 2009.
[3] K. Snelson: `http://www.kennethsnelson.net`, consultado en junio de 2009.
[4] Letter from Kenneth Snelson to Maria Gough on Karl Ioganson: `http://bobwb.tripod.com/synergetics/photos/snelson_gough.html`, consultado en junio de 2009.
[5] Letter from Kenneth Snelson to René Motro: *International Journal of Space Structures* (1990). `http://www.grunch.net/snelson/rmoto.html`, consultado en junio de 2009.
[6] M. Gough: In the laboratory of Constructivism: Karl Ioganson's cold structures, *October*, **84** (1998), 91–117. Disponible en `http://www.jstor.org/pss/779210`, consultado en junio de 2009.
[7] M. de Guzmán y D. Orden: From graphs to tensegrity structures: Geometric and symbolic approaches, *Publicacions Matemàtiques*, **50** (2006), 279–299. Disponible en `http://www.arxiv.org/abs/math.CO/0404334`, consultado en junio de 2009.

[8] Hyperboloid as a ruled surface:
`http://demonstrations.wolfram.com/HyperboloidAsARuledSurface/`, consultado en junio de 2009.
[9] R. Motro: *Tensegrity: Structural systems for the future*, Kogan Page Science, London, 2003.
[10] V. Gómez Jáuregui: *Tensegridad. Estructuras tenségricas en Ciencia y Arte*, Servicio de publicaciones, Universidad de Cantabria, 2007. Más información en `http://www.tensegridad.es`, consultado en junio de 2009.

David Orden
Universidad de Alcalá
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Apartado de Correos 20
28871 Alcalá de Henares
e-mail: `david.orden@uah.es`
`http://www2.uah.es/ordend`



Trabajo realizado con la financiación del proyecto **MTM2008-04699-C03-02**.