Sobre la Conjetura de Poincaré

por

Martintxo Saralegi Aranguren, Université d'Artois

La primera duró apenas cuatro años.
La segunda, la buena, casi un siglo...
¿Qué dice esta Conjetura?
¿Por qué tardó tanto en resolverse?
¿Quién la atacó... y perdió?
¿Quién dio con ella?
¿Cómo lo consiguió?
¿Por un puñado de dólares?

Durante 100 años la conjetura de Poincaré ha movilizado sin éxito a los mayores espíritus científicos.

En 1904, Henri Poincaré planteó la pregunta siguiente: "Imaginen una hormiga paseándose sobre una superficie. ¿Cómo podría saber este insecto, sin abandonar la superficie, si ésta es plana o bien si es una esfera o bien posee otra forma diferente?".

En 2003, Grigori Perelman publicó en Internet tres comunicaciones que no solamente terminaban con la conjetura de Poincaré sino que aportan una luz nueva al estudio de la geometría de los espacios de dimensión superior.

La comunidad científica descubre así un sabio singular, solitario, que prefiere, a la admiración de sus pares, permanecer enclaustrado con su madre.

Y cuando en 2006, Grigori Perelman obtiene la más alta distinción matemática, la Medalla Fields *, la rechaza y prefiere una vez más el silencio de su investigación.* (ver [1]).

De todo esto vamos a hablar en estas páginas.

1. Enunciado de la Conjetura de Poincaré

Rigurosamente, la Conjetura de Poincaré dice lo siguiente:
Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$.

Es cierto que hay muchos términos técnicos en este enunciado, pero se puede expresar de modo más sencillo y geométrico de la siguiente manera:

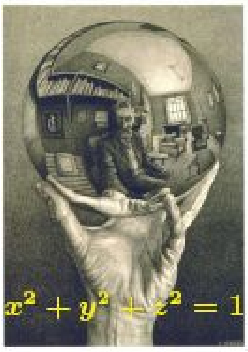
La esfera es el único espacio tridimensional cerrado sin agujeros.

Es difícil hacerse una idea de los espacios de dimensión 3, por ello vamos a comenzar con... la dimensión 2.

2. Conjetura de Poincaré en dimensión 2

El enunciado que vamos a tratar aquí es ahora el siguiente
La esfera es la única superficie cerrada de $\mathbb{R}^3$ *que no tiene agujeros.*

Presentamos una demostración de esta afirmación que nos permitirá más adelante entender la verdadera conjetura de Poincaré (en dimensión tres). Hay que decir que este resultado se conocía ya en el siglo XIX ¡antes del nacimiento de Poincaré! Es un resultado relativamente sencillo ya que las superficies de las que hablamos se pueden clasificar y comprobar directamente que la esfera es la única entre ellas que no tiene agujeros.



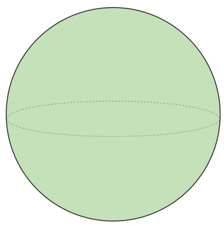
3. Clasificación de superficies

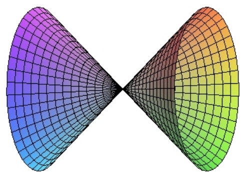
¿Qué entendemos por superficie?

Definición. Una *superficie cerrada* de $\mathbb{R}^3$ es un subconjunto conexo, compacto de $\mathbb{R}^3$, que no tiene borde y que, visto de cerca, es un plano.

Más que dar una presentación precisa de cada término que aparece en esta definición vamos a dar diferentes ejemplos que ilustran esta nociones.

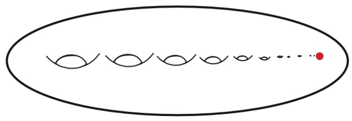
La figura de la derecha es una superficie cerrada: es subconjunto de $\mathbb{R}^3$ (si no, ¡no lo veríamos!). Es acotado (no se va al infinito). Es cerrado (no falta ningún punto). Es compacto (¡cerrado y acotado!). No tiene borde (claro, ¿no?). Visto de cerca es un plano (es decir, para describir lo que pasa cerca de cada punto, necesitamos dos parámetros).

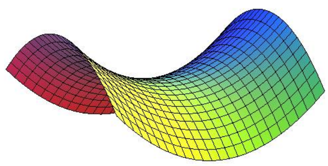




La figura de la izquierda no es una superficie cerrada: el problema es el vértice del diábolo. Cerca del vértice, no estamos en presencia de un plano. Basta observar que, cuando a este diábolo le quitamos el vértice, obtenemos dos trozos (dos conos); mientras que cuando a un plano le quitamos un punto, obtenemos una sola pieza.

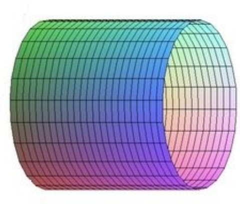
La figura de la derecha no es una superficie cerrada: el problema es el punto gordo. Cerca de este punto, no estamos en presencia de un plano. Basta observar que cerca de el punto en cuestión, hay una infinidad de agujeros; y esto por mucho que nos acerquemos. Esto no sucede con ningún punto del plano.





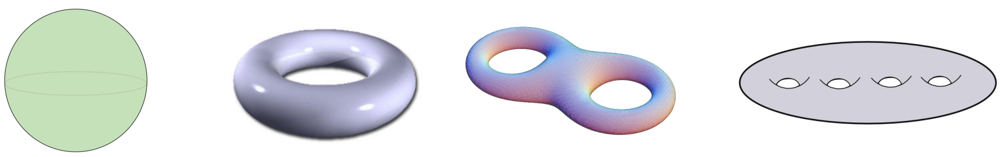
La figura de la izquierda no es una superficie cerrada, pues posee borde.

La figura de la derecha no es una superficie cerrada: el dibujo quiere representar un cilindro infinito. Y puesto que es infinito, no es acotado. Y por lo tanto no es compacto.

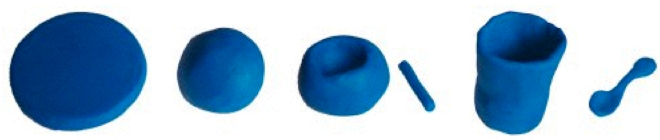


La figura de la izquierda no es una superficie cerrada: como consta de dos trozos, no es conexa.

Teorema (clasificación de superficies). *Las superficies cerradas de* $\mathbb{R}^3$ *son las siguientes: la esfera y los toros de género finito cualquiera.*



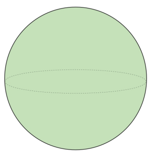
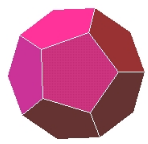
Observación. Cuando decimos, por ejemplo, que la superficie S *es* una esfera, entendemos que S es homeomorfo a una esfera. Por ejemplo, que podemos deformar S (la cucharilla de la siguiente figura) en una esfera.



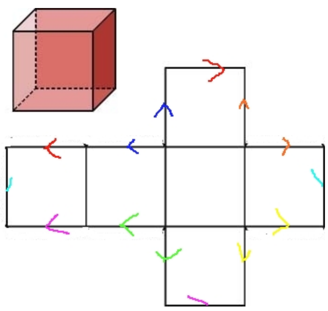
Así pues, un toro *es* una taza de café:

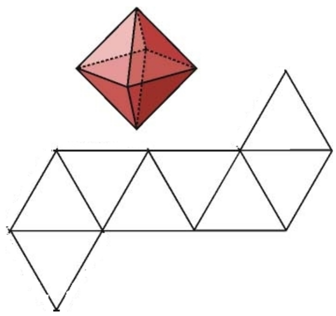
Demostración de la clasificación de superficies. Aunque es un resultado puramente topológico, la llave de la solución consiste en cambiar de universo. Pasamos de la topología a ... ¡¡los origamis!!

I - Toda superficie es un poliedro (Radó 1925)

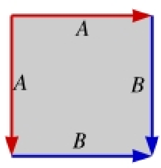
 =  =  etc.

II - Todo poliedro es desplegable.

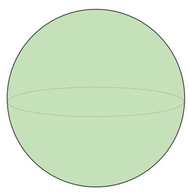


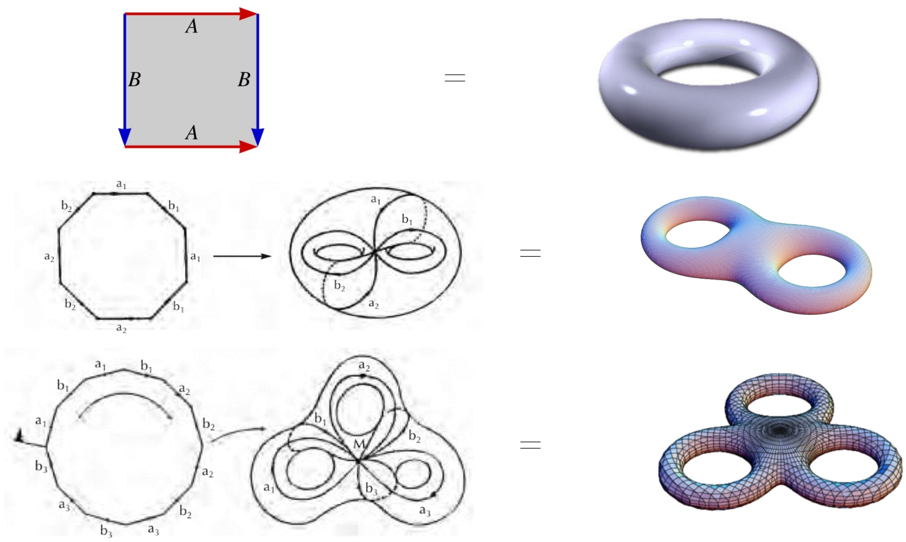


III - Después de una reducción astuta, nos quedan los modelos siguientes (Dehn y Heegard 1907):



=





etc. etc.

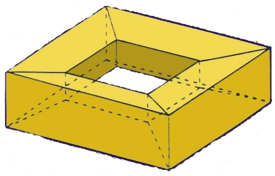
Ex cursus: Característica de Euler-Poincaré. Antes de pasar a la demostración de la Conjetura de Poincaré en dimensión 2, vamos a ver una propiedad típica de las superficies y que desaparece al pasar a dimensión 3 y superior. Resulta que podemos diferenciar las superficies (poliedros) utilizando un simple número: la característica de Euler-Poincaré.

Comencemos con un poliedro P. Su característica de Euler-Poincaré $\chi(P)$ viene dada por:

$$\chi(P) = \text{Caras} - \text{Aristas} + \text{Vértices}.$$

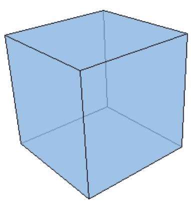
Para un poliedro que representa al toro tenemos:

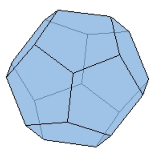
Caras $= 16$
Aristas $= 32$
Vértices $= 16$
$\chi(P) = 16 - 32 + 16 = 0$



Pero lo importante es que este número no depende del poliedro P elegido para representar a las superficie. Por ejemplo, para una esfera tenemos:

Caras $= 16$
Aristas $= 32$
Vértices $= 8$
$\chi(P) = 2$





Caras $= 12$
Aristas $= 30$
Vértices $= 20$
$\chi(P) = 2$

Así pues, podemos definir sin ninguna ambigüedad la característica de Euler-Poincaré $\chi(S)$ de una superficie S cualquiera. De hecho, tenemos:

$$\chi(\text{esfera}) = 2, \quad \chi(\text{toro}) = 0, \quad \chi(\text{toro género g}) = 2 - 2g,$$

que son cantidades diferentes. En conclusión, ¡la característica de Euler-Poincaré caracteriza las superficies!

La primera vez que esta propiedad aparece en la literatura es cuando Euler demuestra que para todo poliedro P tenemos

$$\text{Caras - Vértices} + \text{Aristas} = 2 \ldots$$

Lo que quiere decir que Euler en realidad sólo consideró los poliedros que representan a las esferas. Este error lo repararon Descartes y l'Huilier... pero no dieron el nombre a este invariante.

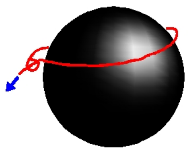
Más adelante, Poincaré extendió este invariante a todo espacio topológico. De ahí el nombre Euler-Poincaré. Pero hizo más, creó invariantes algebraicos mucho más potentes que un simple número: grupo fundamental, homología,... Pero, sobre todo, creó la *Topología Algebraica*, rama de las Matemáticas que trata de la clasificación de los espacios topológicos utilizando invariantes algebraicos como números, grupos, cuerpos, ...

4. Vuelta a la Conjetura de Poincaré en dimensión 2

Recordemos que esta conjetura se enuncia

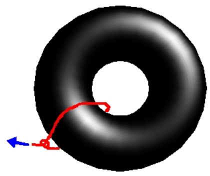
La única superficie S cerrada y simplemente conexa de $\mathbb{R}^3$ es la esfera.

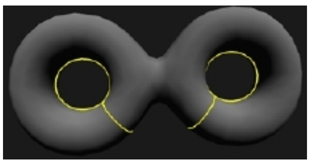
¿Cuándo es una superficie simplemente conexa? Cuando podamos deshacer todo lazo de S. Veamos algunos ejemplos:



Es simplemente conexa: todos los lazos, como el rojo, se pueden deshacer.

No es simplemente conexa: el lazo rojo no se deshace.





No es simplemente conexa: los lazos amarillos no se deshacen.

Observamos que entre todas las superficies que hemos encontrado en la sección anterior, sólo la esfera es simplemente conexa. Así pues hemos demostrado la Conjetura de Poincaré en dimensión 2:

Teorema (Conjetura de Poincaré en dimensión 2). *La única superficie S cerrada y simplemente conexa de $\mathbb{R}^3$ es la esfera.*

5. ¿Quién era Poincaré?

Jules Henri Poincaré nació en Nancy[1] en 1854. Su familia pertenecía a la élite intelectual de la ciudad. Su primo Raymond, fue Presidente de la República de 1913 a 1920. Tuvo 3 hijas y un hijo. Murió en Paris en 1912. Henri Poincaré es descrito a menudo como el último "universalista": matemático capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. Fue también también Físico y Filósofo. Realizó contribuciones en muchos y variados campos:

- Topología algebraica.
- Probabilidades.
- Teoría de funciones analíticas de varias variables complejas.
- Teoría de funciones abelianas.
- Geometría algebraica.
- Teoría de números.
- El problema de los tres cuerpos.
- Teoría de ecuaciones diofánticas.
- Teoría del electromagnetismo.
- Teoría de la Relatividad Especial.[2]
- Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales.
- Mecánica celeste.
- Mecánica de fluidos.
- Óptica.
- Electricidad.
- Telegrafía.
- Capilaridad.
- Elasticidad.
- Termodinámica.
- Teoría potencial.
- Mecánica cuántica.
- Cosmología.
- ...

¡¡Ganó el primer Óscar!! Con motivo de su 60 cumpleaños, el Rey Óscar II de Suecia ofreció un premio de 2.500 coronas por una respuesta a una cuestión fundamental en astronomía.

¿Es estable el Sistema Solar?

[1]Donde más tarde jugó Michel Platini, pero ésta es otra historia ...

[2]Hay una polémica sobre la paternidad de esta teoría, pero ésta es también otra Historia...

El premio fue otorgado a Henri Poincaré en Marzo de 1889. Seis meses después, las 150 páginas del manuscrito pasaron por imprenta para ser publicadas en *Acta Mathematica*, serie matemática dirigida por G. Mittag-Leffler. Un ayudante suyo, E. Phragmén, encontró un error importante en la demostración. Es cierto que Poincaré fue un genio, pero el rigor en sus escritos no fue una de sus mayores cualidades. Henri Poincaré intentó arreglar el problema por todos los medios hasta que se dio cuenta que había "pinchado hueso". Demasiado tarde ya que el trabajo ya había sido impreso. G. Mittag-Leffler se encargó que toda la edición fuese destruida.[3]

Tras varios meses de trabajo, y con 100 páginas más, Henri Poincaré consigue arreglar el problema. Su trabajo es publicado en la citada revista en Junio de 1890. Esta vez, él corre con los gastos de la publicación ... ¡3.585 coronas y 65 öre!

En estas nuevas cien páginas Henri Poincaré introdujo una nueva teoría que también ha perdurado hasta nuestros días: es el inicio de la Teoría del Caos de R. Thom.

6. La Conjetura de Poincaré. Biografía somera.

- La conjetura de Poincaré nació en el año 1904. Tuvo una hermana mayor que vio la luz en 1900 pero que apenas vivió 4 años (ver apartado 7).

- También tuvo una hermana pequeña, que vivió unos pocos años en los años sesenta (ver apartado 8).

- Desde su más tierna infancia fue el centro de atención de los más grandes matemáticos de la época. Sobrevivió a todos sus ataques, tanto topológicos, como geométricos, algebraicos, diferenciales ... (ver apartado 9).

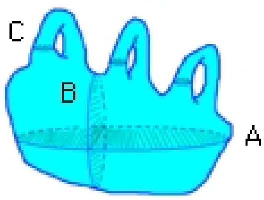
- La situación iba a cambiar cuando Hamilton propuso su programa de atacar la Conjetura de Poincaré utilizando las ecuaciones diferenciales. Más concretamente, el flujo de Ricci que permite modificar la curvatura de una variedad (ver apartado 10).

- Y en 2004, de modesta manera, Grisha Perelman  terminó con la centenaria Conjetura de Poincaré (ver apartado 11).

7. La hermana mayor

Antes de hablar de ella, tenemos que observar que hay tres tipos de lazos. Aparecen en el dibujo siguiente:

[3] Como ya ha pasado otras veces en la Historia, alguno de estos inocentes volúmenes se salvó y llegó a nuestros días.



- El lazo A corta la figura en dos trozos y además el lazo bordea un disco.
- El lazo B corta la figura en dos trozos, pero no bordea un disco.
- El lazo C no corta la figura en dos trozos.

La primera Conjetura por Henri Poincaré fue la siguiente
Primer intento. *Toda variedad topológica de dimensión 3* cuyos grupos de homología sean triviales *y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.*

Aquí, decir que los grupos de homología son triviales significa que todos los lazos que aparecen son de tipo A o B. Apenas cuatro años después, el mismo Poincaré mostró que la primera conjetura era falsa. Dio un contraejemplo que la historia ha bautizado como *esfera de Poincaré*. Hay que decir que se ha demostrado que, esencialmente, ¡éste era el único contraejemplo posible!

Así pues lanzó un
Segundo intento. *Toda variedad topológica de dimensión 3* simplemente conexa *y que sea compacta, orientable y sin borde es homeomorfa a la esfera.*

Aquí, decir que los grupos de homología son triviales significa que todos los lazos que aparecen son de de tipo A. Este intento fue el bueno, la que se conoce como Conjetura de Poincaré, y que tardó un siglo en ser demostrada...

8. La hermana pequeña

Estamos en los años 60. Todos los esfuerzos para demostrar la Conjetura de Poincaré han sido vanos. Los matemáticos no sabían que hacer... Así que se preguntaron que pasaría en dimensión superior. La pregunta cambia un poco:[4]
Conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 4$. *Toda variedad de dimensión n que sea compacta, orientable, sin borde y homótopa a la esfera, es de hecho homeomorfa a la esfera.*

Aunque parezca paradójico, esta conjetura es más fácil que la de dimensión 3, ya que en dimensión superior hay más espacio para moverse. De hecho:

• Smale  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.

[4] Ya que sino, la respuesta es evidentemente no: el producto $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ de dos esferas de dimensión 2 es simplemente conexo, pero no es la esfera de dimensión 4. La razón es que, cuando se aumenta la dimensión, hay que tener en cuenta los lazos de toda dimensión y no solamente los de dimensión uno.

• Stallings resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 7$ a principios de los 60.

• Zeeman completó la prueba de Stallings para $n = 5, 6$ a principios de los 60.

• Wallace resolvió la Conjetura de Poincaré para $n \geq 5$ a principios de los 60.

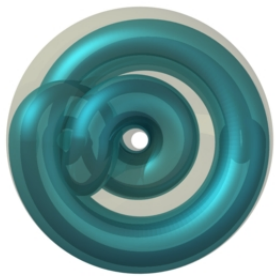
• Freedman  resolvió la Conjetura de Poincaré para $n = 4$ en 1981.

Hay que decir que hubo una cierta polémica al decidir quién resolvió la Conjetura de Poincaré en dimensión $n \geq 5$.[5]

9. Luchando con la Conjetura de Poincaré

La primera prueba publicada de la conjetura de Poincaré es la de J.HenriC. Whitehead en 1934. Para ello, "probó" que $\mathbb{R}^3$ es la única variedad abierta en la que todos los lazos (de cualquier dimensión) colapsan en un punto. En 1935 publicó una rectificación. De hecho, construyó un contraejemplo W (llamado desde entonces *variedad de Whitehead*). Es un ejemplo muy importante en Matemáticas. Verifica, en particular, la sorprendente propiedad:

$$W \neq \mathbb{R}^3 \quad \text{y} \quad W \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$



La idea para construirlo es la siguiente. Considera en $\mathbb{S}^3$ un toro (sólido) no anudado $\mathbb{T}$. Dentro de $\mathbb{T}$ considera dos toros anudados como muestra la imagen contigua, donde el toro oscuro es paralelo al toro $\mathbb{T}$. Cogemos ahora el toro claro y consideramos en el interior el nudo anterior donde el antiguo toro claro y el nuevo toro oscuro son paralelos.
Y seguimos así hasta el infinito. La variedad W se construye quitando a $\mathbb{S}^3$ la intersección de todos los toros amarillos. Estaréis de acuerdo en decir que es una construcción enrevesada ... Entenderéis que sus alumnos dijesen que las iniciales del nombre de Whitehead significaban:

Jesus, **H**e's **C**onfusing!

En los años 60 C. Papakyriakopoulos demostró que la conjetura de Poincaré era equivalente a dos conjeturas algebraicas ... que no consiguió resolver. E. Strasser-Rapaport y J. Birman continuaron en esta línea, sin éxito.

[5] Y, como veremos más adelante, ¡para $n = 3$!

RH[6] Bing dio una condición suficiente (topología algebraica) para probar la Conjetura de Poincaré en 1958 ... ¡pero murió en 1986 convencido que la Conjetura era falsa!

En los años 50 E. Moise mostró que toda variedad topológica M de dimensión 3 era un politopo (como Radó había hecho para la dimensión 2 en 1925). Esto permite tratar M como una variedad diferenciable, y poder así utilizar todo el arsenal diferenciable para atacar la Conjetura de Poincaré (*resultado esencial para el final de la historia* apartado 11). Es lo que hizo E. Moise ... sin éxito:

> *"a cabezazos como si la Conjetura de Poincaré fuese una pared, y en esos casos, o la pared cae o la cabeza cede"*,

según uno de sus estudiantes esto último es lo que le pasó a E. Moise que terminó sus días como crítico literario de los que "mean fuera del tiesto".

W. Haken había demostrado el Teorema de los Cuatro colores en 1951 por un método algorítmico. Utilizando el resultado de Moise intentó hacer lo mismo con la Conjetura de Poincaré, sin éxito.

Poénaru concibió en 1994 un programa para resolver la Conjetura de Poincaré. En 2004, podemos encontrar en su página web una prepublicación en la que... continúa con su programa...

J. Stallings (ya hemos hablado de él antes) también intentó, un poco, ser el primero en resolver la Conjetura de Poincaré. Pero se curó pronto de "poincaritis", enfermedad que describe del modo siguiente:

> *"Durante mucho tiempo fui incapaz de encontrar los defectos de mi* demostración*, aunque el error era evidente. Era un problema psicológico, una ceguera, un exceso de entusiasmo, una inhibición de la razón por el secreto temor de equivocarme."*

A partir de los años 70 el número de matemáticos que intentó resolver la Conjetura de Poincaré no dejó de aumentar. Los resultados de E. Moise permitían utilizar todas las herramientas diferenciales. Cirugía, nudos, foliaciones (G. Hector) ... sin resultado.

Errare humanum est. Cuando un matemático pensaba haber encontrado una demostración de la Conjetura de Poincaré, lo primero que hacía era era presentársela a sus colegas más cercanos. Después, peregrinaba por algunas Universidades más lejanas para encontrar más adeptos a su prueba[7]. El último paso era el de publicar su trabajo en una revista internacional para

[6] Este era su nombre que no iniciales. ¡Como el famoso JR Ewing!

[7] Aunque a veces eran más bien *Tribunales de la Inquisición.*

predicar la buena nueva. En cada paso, corría el riesgo de encontrar un colega que hallase un error en su prueba. Hay que saber que en general eran escritos de decenas o centenas de páginas con argumentos complicados y sutiles. En estas circunstancias, errores, haberlos, haylos. El momento temido. El autor pasaba así un mal momento local, regional o internacional, que no es lo mismo para su ego y su reputación.

Perdonare divinum. Si los errores eran menores, el autor conseguía corregirlos y la comunidad matemática lo aceptaba normalmente sin resquemor.

Perseverare diabolicum. Durante un siglo, cada prueba contenía un error mayor, de esos que de hecho anulaba todo el trabajo. Algunos autores lo aceptaban y volvían a sus quehaceres. Otros se emperraban en reparar lo irreparable. Algunos, como hemos visto, terminaban mal.

La llegada de Internet aceleró el proceso, ya que los autores podían pasar directamente del entorno local al entorno universal. Por ejemplo, S. Nikitine presentó en 2002 su prueba en Internet. Los foros se animaron y empezaron a encontrar errores que Nikitine corregía en sucesivas versiones de su prueba: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8. Esta última ya nadie la comentó...

10. El otro Hamilton[8]

El gran mérito de Hamilton ha sido el de atacar la Conjetura de Poincaré (que es puramente topológica) utilizando la métrica que tenemos en las variedades, la curvatura asociada y una evolución de esta métrica dada por el flujo de Ricci, que es una ecuación diferencial (¡con el Análisis topamos, Sancho!).

$$\begin{array}{rcl} \text{Variedad topológica} & \xrightarrow{\text{Moise}} & \text{Variedad triangularizable} \longrightarrow \\ \text{Variedad diferenciable} & \longrightarrow & \text{Variedad métrica} \longrightarrow \\ \text{Flujo de Ricci} & =\!=\!=\!= & g'(t) = -2Ric(g(t)). \end{array}$$

Es exactamente la idea reflejada en la famosa frase[9]

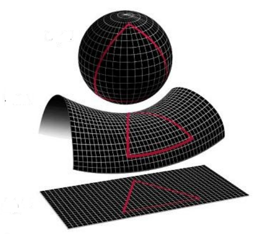
> *Somos como enanos a hombros de gigantes. Podemos ver más, y más lejos que ellos, no por alguna distinción física nuestra, sino porque somos levantados por su gran altura.*

Pasamos a explicar la noción de curvatura, en dimensión 2. Cada punto de una superficie de $\mathbb{R}^3$ tiene una curvatura, que es un número real. Este número tiene:

---

[8]Richard no Lewis.

[9]Dicha por Bernard de Chartres. Más conocida es la versión “Si he visto más lejos es porque estoy sentado sobre los hombros de gigantes” de Isaac Newton. Otro problema de paternidad.

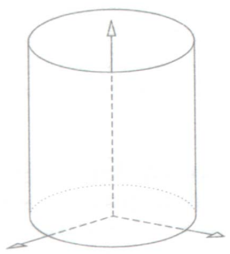


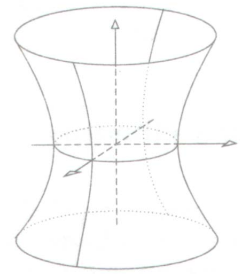
signo

y

magnitud

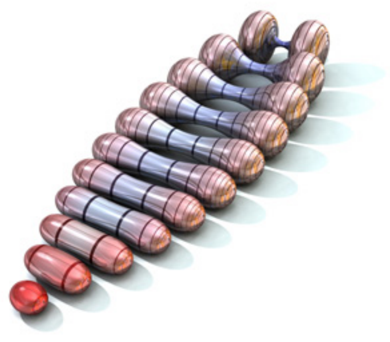
Una superficie no tiene una curvatura intrínseca, ésta depende de la manera que la vemos en $\mathbb{R}^3$.





Las dos figuras representan un cilindro, pero el de la izquierda tiene curvatura nula mientras que el de la derecha tiene curvatura negativa.

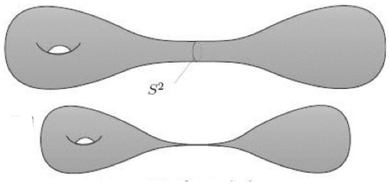
El flujo de Ricci modifica la curvatura de la superficie S sin modificar S. Redistribuye la curvatura dilatando las zonas de curvatura negativa y contrayendo las zonas de curvatura positiva. La superficie S misma no varía. Este es el *programa de Hamilton*. Empezamos con una variedad que verifica las condiciones de la Conjetura de Poincaré. Sabemos que podemos considerar una métrica en la variedad. Aplicamos el flujo de Ricci para simplificar la curvatura de esta métrica. Si al final obtenemos una esfera habremos demostrado que al principio teníamos también una esfera, *quod erat demostrandum*. Con este programa, lo primero que demostró Hamilton fue lo siguiente.

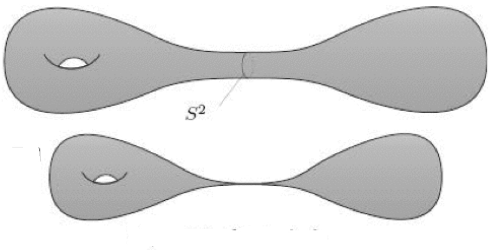


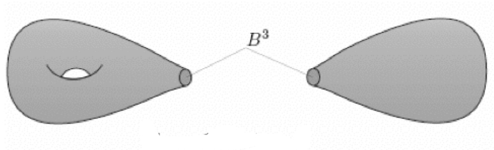
Teorema. *Toda variedad topológica de dimensión tres que sea simplemente conexa, compacta, orientable, sin borde y* cuya curvatura de Ricci sea positiva *es homeomorfa a la esfera.*

Animado por la respuesta parcial que había dado a la Conjetura de Poincaré, Hamilton intentó aplicar el mismo procedimiento sin la hipótesis subrayada pero encontró un hueso.

El primer problema que encontró fue que en su largo caminar el flujo de Ricci puede crear singularidades ... y muchos tipos de singularidades: tubos filiformes, circuitos, capuchones, cigarros,... Utilizó la cirugía (¡cortar y coser!).





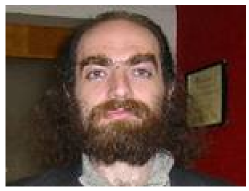


Fue un éxito... parcial, ya que

(a) Los cigarros se le resistían.

(b) Nada le permitía asegurar que un número finito de cirugías le serían suficientes.

11. Grigori Perelman



Nació en Leningrado (San Petersburgo) en 1966. Fue un estudiante brillante desde joven. A los 16 años ganó la Olimpiada Matemática con la nota máxima.

Rechazó el premio que la Sociedad Matemática otorga cuadrienalmente a diez prometedores matemáticos. Trabajó en San Petersburgo, Nueva York y Berkeley. En 1994 comenzó a trabajar en la Conjetura de Poincaré. Tras ocho años la resolvió.

Tras una pequeña controversia, la comunidad matemática[10] aceptó la prueba. Ganó la Medalla Fields , que también rechazó. Abandonó su trabajo en San Petesburgo. Ganó el premio de un millón de dólares que el Instituto Clay de Matemáticas otorga a quien resuelva uno de los siete problemas del milenio. Hasta la fecha, no ha ido a cobrarlo.

[10] Uno puede pensar que las matemáticas son esencialmente claras y objetivas (¡no he dicho fáciles!): si o no, blanco o negro, par o impar. Pero los matemáticos, sub-clase del homo sapiens, no somos siempre así. Hemos visto en esta breve exposición, varios ejemplos de casos donde la paternidad de un Teorema es puesta en duda por varios "genitores". Y como los tests ADN no han llegado hasta aquí...

Habíamos dejado a Hamilton con los problemas (a) y (b) (final del apartado 10). Perelman respondió a las dos preguntas:

no y no.

Y demostró así que la Conjetura de Poincaré era cierta.

Y más aún, la Conjetura de Geometrización de Thurston, de la que no hemos hablado, y que generaliza la Conjetura de Poincaré.

Contrariamente a los usos habituales, no publicó un artículo, sino que puso sus trabajos en Internet, sobriamente sin bombo ni platillos. Entre el otoño de 2002 y la primavera de 2003 puso sus tres artículos en Arχiv:

• La fórmula de entropía para el flujo de Ricci y sus aplicaciones geométricas (39 páginas).

• Flujo de Ricci con cirugía en 3-variedades (22 páginas).

• Tiempo de extinción finita para las soluciones del flujo de Ricci en ciertas variedades de dimensión 3 (7 páginas).

Durante 2003 dio varias conferencias en EE.UU. para convencer a la comunidad matemática de lo acertado de su prueba. Lo consiguió aunque faltaban los detalles, muchos detalles. Observemos que su prueba ocupa apenas 70 páginas. Tres grupos de dos matemáticos cada uno se puso a trabajar para rellenar los agujeros:

• J. Morgan y G. Tian. El flujo de Ricci y la Conjetura de Poincaré (2007) 493 páginas.

• B. Kleiner y J. Lott. Notas sobre los trabajos de Perelman (2007) 200 páginas.

• Henri-D. Cao y X.-P. Zhu. Una prueba completa de las Conjeturas de Geometrización y de Poincaré. Aplicación de la Teoría Hamilton-Perelman del flujo de Ricci (2006) 327 páginas.

Hubo una cierta polémica ya que en cierto momento Cao-Zhu sugirieron que fueron ellos los que esencialmente habían demostrado la Conjetura de Poincaré. La postura de Perelman era contraria a este espíritu. El teorema que resuelve la conjetura lo denomina Teorema de Hamilton-Perelman, ya que considera que él termino el trabajo emprendido por Hamilton. El Congreso Internacional de Matemáticas terminó con la discusión ya que decidió otorgar la Medalla Fields a Perelman en 2006. Éste rechazó el galardón:

> *El Premio me es completamente irrelevante. Todos saben que si la prueba es correcta ningún otro reconocimiento es necesario.*

El Instituto Clay de Matemáticas estableció en el año 2000 los Siete Problemas del Milenio: “preguntas clásicas importantes que no han sido resueltas en años". La primera persona que resuelva cada uno de estos problemas recibirá un premio de un millón de dólares. Puesto que la Conjetura de Poincaré es uno estos siete problemas, Perelman tiene derecho a este premio.

Hasta hoy no ha ido a cobrarlo.

Bibliografía

[1] Georges G. Szpiro, *La Conjecture de Poincaré*, J.-C. Lattès, 2007.

Martintxo Saralegi Aranguren
Université d'Artois
Laboratoire Mathématiques Lens
Rue Jean Souvraz S.P. 18
62307 Lens Cedex (Francia)
e-mail: ***saralegi@euler.univ-artois.fr***
http://www.univ-artois.fr/saralegi